

Презиме и име студента

бр. индекса

1. Четворо пријатеља Аца, Боки, Цеца и Дуда су осумњичени за убиство. Могуће је да је више особа истовремено криво за убиство. Пред истражним судијом они су изјавили следеће:

- **Аца:** Ако је Боки крив, крива је и Дуда.
- **Боки:** Ако Аца није крив, онда је крива Цеца.
- **Цеца:** Ја нисам крива, али је или Аца крив или је Дуда крива.
- **Дуда:** Ја нисам крива.

Да ли су ове четири изјаве непротивречне? Ако свако говори истину ко је крив?  
(Уколико има више могућих решења навести их сва!)

2. Дата је скупова формула

$$(A \setminus B) \cup (A \setminus (A \setminus C)) \subseteq A \setminus (B \setminus C).$$

- а) Представити леву и десну страну ове формуле преко Венових дијаграма.
- б) Представити ову формулу преко исказних формула.
- в) Испитати да ли је исказна формула таутологија (тј. да ли је полазна скупова формула увек тачна).

3. Одредити истинитосну вредност предикатске формуле

$$(\exists x) \left( (\exists z) \alpha(f(x, z), y) \vee (\alpha(x, y) \Rightarrow \neg \alpha(z, a)) \right)$$

за интерпретацију  $\mathcal{D} = \mathcal{P}(A)$ ,  $\alpha: =, f: \cup, a: \emptyset$ .

4. Дата је релација

$$\varrho: x \varrho y \stackrel{\text{def}}{\iff} \text{разлика збира цифара броја } x \text{ и збира цифара броја } y \text{ је дељива са } 3$$

на скупу  $\{11, 22, 34, 36, 56\}$ .

- а) Набројати све елементе који су у релацији  $\varrho$  и који нису у релацији  $\varrho$ .
- б) Представити дату релацију таблично и преко графа.
- в) Да ли је дата релација рефлексивна, симетрична, антисиметрична, транзитивна?
- г) Испитати да ли је то релација еквиваленције и/или релација поретка.
- д) Уколико је то релација еквиваленције одредити све класе еквиваленције, а уколико је то релација поретка представити је преко Хасеовог дијаграма и испитати да ли је то релација тоталног или парцијалног поретка.

Презиме и име студента

бр. индекса

1. Четворо пријатеља Аца, Боки, Цеца и Дуда су осумњичени за убиство. Могуће је да је више особа истовремено криво за убиство. Пред истражним судијом они су изјавили следеће:

- **Аца:** Ако Боки није крив, онда је Дуда крива.
- **Боки:** Цеца и Дуда нису криве.
- **Цеца:** Ја нисам крива, а крив је Боки.
- **Дуда:** Ја нисам крива, али је Аца крив.

Да ли су ове четири изјаве непротивречне? Ако свако говори истину ко је крив?  
(Уколико има више могућих решења навести их сва!)

2. Дата је скупова формула

$$A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \cup (A \cap C).$$

- а) Представити леву и десну страну ове формуле преко Венових дијаграма.
- б) Представити ову формулу преко исказних формула.
- в) Испитати да ли је исказна формула таутологија (тј. да ли је полазна скупова формула увек тачна).

3. Одредити истинитосну вредност предикатске формуле

$$(\forall x) \left( (\exists z) \alpha(x, f(y, z)) \vee \neg \alpha(y, a) \Rightarrow (\exists y) \alpha(y, f(x, z)) \right)$$

за интерпретацију  $\mathcal{D} = \mathbb{N}$ ,  $\alpha: =$ ,  $f$ : множење,  $a: 1$ .

4. Дата је релација

$$\varrho = \{(1, 1), (1, 3), (1, 4), (2, 2), (2, 5), (3, 1), (3, 3), (3, 4), (4, 1), (4, 3), (4, 4), (5, 2), (5, 5)\}$$

на скупу  $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ .

- а) Набројати све елементе који су у релацији  $\varrho$  и који нису у релацији  $\varrho$ .
- б) Представити дату релацију таблично и преко графа.
- в) Да ли је дата релација рефлексивна, симетрична, антисиметрична, транзитивна?
- г) Испитати да ли је то релација еквиваленције и/или релација поретка.
- д) Уколико је то релација еквиваленције одредити све класе еквиваленције, а уколико је то релација поретка представити је преко Хасеовог дијаграма и испитати да ли је то релација тоталног или парцијалног поретка.

Презиме и име студента

бр. индекса

1. Четворо пријатеља Аца, Боки, Цеца и Дуда су осумњичени за убиство. Могуће је да је више особа истовремено криво за убиство. Пред истражним судијом они су изјавили следеће:

- **Аца:** Ја нисам крив, а крив је Боки.
- **Боки:** Аца и Цеца нису криви.
- **Цеца:** Ја нисам крива, али је Дуда крива.
- **Дуда:** Ако Боки није крив, онда је Цеца крива.

Да ли су ове четири изјаве непротивречне? Ако свако говори истину ко је крив?  
(Уколико има више могућих решења навести их сва!)

2. Дата је скупова формула

$$(A \cap B) \cup C = A \cap (B \cup C) \Leftrightarrow C \subseteq A.$$

- а) Представити  $(A \cap B) \cup C$  и  $A \cap (B \cup C)$  преко Венових дијаграма.
- б) Представити ову формулу преко исказних формула.
- в) Испитати да ли је исказна формула таутологија (тј. да ли је полазна скупова формула увек тачна).

3. Одредити истинитосну вредност предикатске формуле

$$(\forall x) \left( (\exists y) \alpha(x, f(x, y)) \Leftrightarrow \neg (\neg \alpha(x, y) \wedge \neg \alpha(y, a)) \right)$$

за интерпретацију  $\mathcal{D} = \mathcal{P}(A)$ ,  $\alpha: =$ ,  $f: \cup$ ,  $a: \emptyset$ , где је  $A$  непразан скуп.

4. Дата је релација

$$\varrho = \{(a, a), (a, b), (a, d), (b, b), (c, a), (c, b), (c, c), (c, d), (c, e), (d, b), (d, d), (e, a), (e, b), (e, d), (e, e)\}$$

на скупу  $\{a, b, c, d, e\}$ .

- а) Набројати све елементе који су у релацији  $\varrho$  и који нису у релацији  $\varrho$ .
- б) Представити дату релацију таблично и преко графа.
- в) Да ли је дата релација рефлексивна, симетрична, антисиметрична, транзитивна?
- г) Испитати да ли је то релација еквиваленције и/или релација поретка.
- д) Уколико је то релација еквиваленције одредити све класе еквиваленције, а уколико је то релација поретка представити је преко Хасеовог дијаграма и испитати да ли је то релација тоталног или парцијалног поретка.

Презиме и име студента

бр. индекса

1. Четворо пријатеља Аца, Боки, Цеца и Дуда су осумњичени за убиство. Могуће је да је више особа истовремено криво за убиство. Пред истражним судијом они су изјавили следеће:

- **Аца:** Ја нисам крив.
- **Боки:** Ако Аца није крив, онда је крива Дуда.
- **Цеца:** Ако је Боки крив, крив је и Аца.
- **Дуда:** Или је Аца крив или је Цеца крива. Наравно, ја нисам крива.

Да ли су ове четири изјаве непротивречне? Ако свако говори истину ко је крив?  
(Уколико има више могућих решења навести их сва!)

2. Дата је скуповна формула

$$A \subseteq C \Rightarrow (A \cup B) \cap C = (A \cup C) \cap (A \cup B).$$

- а) Представити  $(A \cup B) \cap C$  и  $(A \cup C) \cap (A \cup B)$  преко Венових дијаграма.
  - б) Представити ову формулу преко исказних формула.
  - в) Испитати да ли је исказна формула таутологија (тј. да ли је полазна скуповна формула увек тачна).
3. Одредити истинитосну вредност предикатске формуле

$$(\forall x) \left( (\exists y) \alpha(x, f(y, z)) \Rightarrow \neg(\alpha(x, a) \wedge \neg \alpha(x, y)) \right)$$

за интерпретацију  $\mathcal{D} = \mathbb{N}$ ,  $\alpha: =$ ,  $f$ : множење,  $a: 5$ .

4. Дата је релација

$$\varrho: x \varrho y \stackrel{\text{def}}{\iff} x \mid y$$

на скупу  $\{1, 2, 3, 6, 8\}$ .

- а) Набројати све елементе који су у релацији  $\varrho$  и који нису у релацији  $\varrho$ .
- б) Представити дату релацију таблично и преко графа.
- в) Да ли је дата релација рефлексивна, симетрична, антисиметрична, транзитивна?
- г) Испитати да ли је то релација еквиваленције и/или релација поретка.
- д) Уколико је то релација еквиваленције одредити све класе еквиваленције, а уколико је то релација поретка представити је преко Хасеовог дијаграма и испитати да ли је то релација тоталног или парцијалног поретка.

## Решења групе А

1. Означимо са  $a$  исказ "Аца је крив", са  $b$  исказ "Боки је крив", са  $c$  исказ "Пеца је крива" и са  $d$  исказ "Дуда је крива".

Тада дате реченице (које можемо означити редом са  $A, B, C, D$ ) можемо записати као:

•  $b \Rightarrow d$ .

•  $\neg a \Rightarrow c$ .

•  $\neg c \wedge (a \vee d)$ .

Признавали смо и  $\neg c \wedge (a \vee d)$  мада или-или представља  $\vee$ .

•  $\neg d$ .

Ове 4 изјаве су непротивречне, само уколико исказна формула

$$A \wedge B \wedge C \wedge D$$

има валуацију основних исказа  $(a, b, c, d)$  за коју постиже вредност 1.

Наставак задатка ћемо разматрати на 2 различита начина.

I начин (преко таблице истинитости):

$A$				$B$			$C$			$D$	
$a$	$b$	$c$	$d$	$b \Rightarrow d$	$\neg a$	$\neg a \Rightarrow c$	$\neg c$	$a \vee d$	$\neg c \wedge (a \vee d)$	$\neg d$	$A \wedge B \wedge C \wedge D$
0	0	0	0	1	1	0	1	0	0	1	0
0	0	0	1	1	1	0	1	1	1	0	0
0	0	1	0	1	1	1	0	0	0	1	0
0	0	1	1	1	1	1	0	1	0	0	0
0	1	0	0	0	1	0	1	0	0	1	0
0	1	0	1	1	1	0	1	1	1	0	0
0	1	1	0	0	1	1	0	0	0	1	0
0	1	1	1	1	1	1	0	1	0	0	0
<span style="border: 1px solid black;">1</span>	<span style="border: 1px solid black;">0</span>	<span style="border: 1px solid black;">0</span>	<span style="border: 1px solid black;">0</span>	1	0	1	1	1	1	1	<span style="border: 1px solid black;">1</span>
1	0	0	1	1	0	1	1	0	0	0	0
1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0
1	0	1	1	1	0	1	0	0	0	0	0
1	1	0	0	0	0	1	1	1	1	1	0
1	1	0	1	1	0	1	1	0	0	0	0
1	1	1	0	0	0	1	0	1	0	1	0
1	1	1	1	1	0	1	0	0	0	0	0

Како смо добили бар једну 1 у последњој колони то су дате изјаве непротивречне.

Вредност 1 у последњој колони се постиже само када је  $v(a) = 1$ ,  $v(b) = 0$ ,  $v(c) = 0$ ,  $v(d) = 0$ , тј. добили смо да је Аца крив, а да Боки, Пеца и Дуда нису.

II начин (дискусија вредности  $a, b, c, d$ ):

Претпоставимо да постоји интерпретација у којој су све четири формуле  $A, B, C, D$  тачне и одредимо вредности  $a, b, c, d$  у тој интерпретацији.

Како је  $D$  тачна, тј.  $v(D) = v(\neg d) = 1$  добијамо да је  $v(d) = 0$ .

Из  $C$  добијамо  $v(C) = v(\neg c \wedge (a \vee d)) = 1 \Rightarrow v(\neg c) = 1$ , тј.  $v(c) = 0$  и  $v(a \vee d) = 1$ , одакле је  $v(a) = v(\neg d) = 1$ .

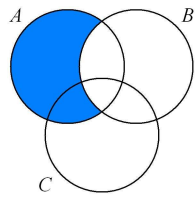
Како смо добили да је  $v(c) = 0$  и  $v(a) = 1$ , тј.  $v(\neg a) = 1$  добијамо да је  $v(B) = v(\neg a \Rightarrow c) = 1$ , тј.  $B$  је тачна.

Сада из  $A$ ,  $v(A) = v(b \Rightarrow d) = 1$ , како је  $v(d) = 0$  следи да је  $v(b) = 0$ .

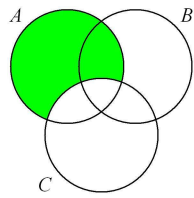
Тиме смо добили интерпретацију  $\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$  у којој су све 4 формуле тачне, што значи да је горњи скуп формула непротивречан, тј. полазне изјаве нису противречне.

Такође, ако су све 4 изјаве тачне, онда из претходног следи да се то може десити само у случају горње интерпретације, што значи да је Аца крив, а остали су невини.

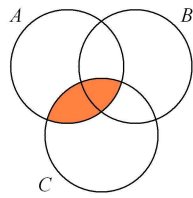
2. а) За леву страну (она је на последњој слици) имамо следећа представљања Веновим дијаграмима:



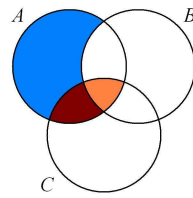
$A \setminus B$



$A \setminus C$

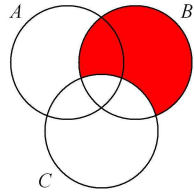


$A \setminus (A \setminus C)$

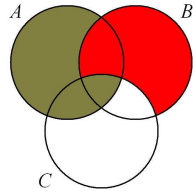


$(A \setminus B) \cup (A \setminus (A \setminus C))$

За десну страну (она је на последњој слици) имамо следећа представљања Веновим дијаграмима:



$B \setminus C$



$A \setminus (B \setminus C)$

**Напомена.** Са ових слика видимо да важи и јача формула  $(A \setminus B) \cup (A \setminus (A \setminus C)) = A \setminus (B \setminus C)$ .

б) Означимо са  $a = x \in A$  (онда је  $\neg a = x \notin A$ ),  $b = x \in B$ ,  $c = x \in C$  и  $d = x \in D$ . Тада скуповна формула  $(A \setminus B) \cup (A \setminus (A \setminus C)) \subseteq A \setminus (B \setminus C)$  прелази у исказну формулу

$$\left( ((a \wedge \neg b) \vee (a \wedge \neg(a \wedge \neg c))) \Rightarrow (a \wedge \neg(b \wedge \neg c)) \right).$$

в)

			$p$			$q$			$L$			$D$			
$a$	$b$	$c$	$\neg a$	$\neg b$	$\neg c$	$a \wedge \neg b$	$a \wedge \neg c$	$\neg(a \wedge \neg c)$	$a \wedge \neg(a \wedge \neg c)$	$p \vee q$	$b \wedge \neg c$	$\neg(b \wedge \neg c)$	$a \wedge \neg(b \wedge \neg c)$	$L \Rightarrow D$	
0	0	0	1	1	1	0	0	1	0	0	0	1	0	1	
0	0	1	1	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	1	
0	1	0	1	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	
0	1	1	1	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0	1	
1	0	0	0	1	1	1	1	0	0	1	0	1	1	1	
1	0	1	0	1	0	1	0	1	1	1	0	1	1	1	
1	1	0	0	0	1	0	1	0	0	0	1	0	0	1	
1	1	1	0	0	0	0	0	1	1	1	0	1	1	1	

Како смо добили све 1 у последњој колони која одговара датом исказу, то је он таутологија, па добијамо да и полазна скуповна формула важи.

**Напомена.** Како су колоне  $L$  и  $D$  исте добијамо да важи строжија једнакост  $(A \setminus B) \cup (A \setminus (A \setminus C)) = A \setminus (B \setminus C)$ , тј. да су лева и десна страна једнаке.

Обе стране имају вредност 1 за  $(a, b, c) = (1, 0, 0)$ ,  $(a, b, c) = (1, 0, 1)$  и  $(a, b, c) = (1, 1, 1)$ . Њима одговарају скупови  $\overline{A}\overline{B}\overline{C}$ ,  $\overline{A}\overline{B}C$  и  $ABC$ , који су обојени сивом бојом на оба цртежа.

3. Пребацимо дату предикатску формулу на "уобичајени" математички језик:

$$(\exists x \in \mathcal{P}(A)) \left( (\exists z \in \mathcal{P}(A)) x \cup z = y \quad \vee \quad (x = y \Rightarrow z \neq \emptyset) \right).$$

Предикатска формула  $(\exists z \in \mathcal{P}(A)) x \cup z = y$  је еквивалентна са  $x \subseteq y$ , па се полазна формула своди на

$$(\exists x \in \mathcal{P}(A)) \left( x \subseteq y \quad \vee \quad (x = y \Rightarrow z \neq \emptyset) \right).$$

Ова дисјунција је тачна ако је бар један њен члан тачан, тј. како можемо одабрати  $x = \emptyset$  и увек је  $\emptyset \subseteq y$  (или можемо одабрати  $x = y$  и увек је  $y \subseteq y$ ) то је полазна формула  $F$  тачна, тј.  $v(F) = 1$ .

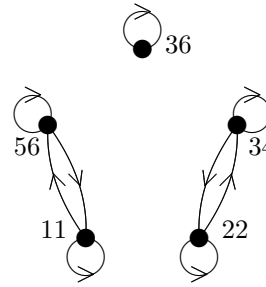
4. Поједноставимо дату релацију. Како је број дељив са 3 ако и само ако је његов збир цифара дељив са 3, дата релација се своди на то да је разлика 2 броја дељива са 3 (тј. да дају исти остатак при дељењу са 3).

а) У релацији су:  $11 \varrho 11, 11 \varrho 56, 22 \varrho 22, 22 \varrho 34, 34 \varrho 22, 34 \varrho 34, 36 \varrho 36, 56 \varrho 11, 56 \varrho 56$ .

У релацији нису:  $11 \not\varrho 22, 11 \not\varrho 34, 11 \not\varrho 36, 22 \not\varrho 11, 22 \not\varrho 36, 22 \not\varrho 56, 34 \not\varrho 11, 34 \not\varrho 36, 34 \not\varrho 56, 36 \not\varrho 11, 36 \not\varrho 22, 36 \not\varrho 34, 36 \not\varrho 56, 56 \not\varrho 22, 56 \not\varrho 34, 56 \not\varrho 36$ .

б)

$\varrho$	11	22	34	36	56
11	1	0	0	0	1
22	0	1	1	0	0
34	0	1	1	0	0
36	0	0	0	1	0
56	1	0	0	0	1



в) Ова је релација **P** (у табlici су елементи на главној дијагонали једнаки 1; у графу видимо да око сваког чвора имамо петљу).

Ова је релација **C** (у табlici су елементи који су симетрични у односу на главну дијагоналу међусобно једнаки; у графу видимо да између 2 различита чвора имамо или 0 или 2 гране).

Ова релација није **AC** (не важи  $11 \varrho 56, 56 \varrho 11 \Rightarrow 11 = 56$ ).

Ова је релација **T** (видимо са графа).

г) Ова релација је **P**, **C** и **T**, па је релација еквиваленције.

Како није **AC** она није релација поретка.

д) Класе еквиваленције су:

$$[11] = [56] = \{11, 56\},$$

$$[22] = [34] = \{22, 34\},$$

$$[36] = \{36\}.$$

**Напомена.** И број 0 је дељив са 3 (јер је  $0 = 3 \cdot 0$ ), а и за негативне бројеве важе исти услови за дељивост са 3 (нпр.  $3 \mid -6$  јер је  $-6 = 3 \cdot (-2)$ )!

## Решења групе Б

1. Означимо са  $a$  исказ "Аца је крив", са  $b$  исказ "Боки је крив", са  $c$  исказ "Пеца је крива" и са  $d$  исказ "Дуда је крива".

Тада дате реченице (које можемо означити редом са  $A, B, C, D$ ) можемо записати као:

- $\neg b \Rightarrow d$ .
- $\neg c \wedge \neg d$ .
- $\neg c \wedge b$ .
- $\neg d \wedge a$ .

Ове 4 изјаве су непротивречне, само уколико исказна формула

$$A \wedge B \wedge C \wedge D$$

има валуацију основних исказа  $(a, b, c, d)$  за коју постиже вредност 1.

Наставак задатка ћемо разматрати на 2 различита начина.

I начин (преко таблице истинитости):

$A$				$B$				$C$		$D$	
$a$	$b$	$c$	$d$	$\neg b$	$\neg b \Rightarrow d$	$\neg c$	$\neg d$	$\neg c \wedge \neg d$	$\neg c \wedge b$	$\neg d \wedge a$	$A \wedge B \wedge C \wedge D$
0	0	0	0	1	0	1	1	1	0	0	0
0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	0
0	0	1	0	1	0	0	1	0	0	0	0
0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0
0	1	0	0	0	1	1	1	1	1	0	0
0	1	0	1	0	1	1	0	0	1	0	0
0	1	1	0	0	1	0	1	0	0	0	0
0	1	1	1	0	1	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	1	0	1	1	1	0	1	0
1	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	0
1	0	1	0	1	0	0	1	0	0	1	0
1	0	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0
<span style="border: 1px solid black;">1</span>	<span style="border: 1px solid black;">1</span>	<span style="border: 1px solid black;">0</span>	<span style="border: 1px solid black;">0</span>	0	1	1	1	1	1	1	<span style="border: 1px solid black;">1</span>
1	1	0	1	0	1	1	0	0	1	0	0
1	1	1	0	0	1	0	1	0	0	1	0
1	1	1	1	0	1	0	0	0	0	0	0

Како смо добили бар једну 1 у последњој колони то су дате изјаве непротивречне.

Вредност 1 у последњој колони се постиже само када је  $v(a) = 1$ ,  $v(b) = 1$ ,  $v(c) = 0$ ,  $v(d) = 0$ , тј. добили смо да су Аца и Боки криви, а Пеца и Дуда нису.

II начин (дискусија вредности  $a, b, c, d$ ):

Претпоставимо да постоји интерпретација у којој су све четири формуле  $A, B, C, D$  тачне и одредимо вредности  $a, b, c, d$  у тој интерпретацији.

Како је  $D$  тачна, тј.  $v(D) = v(\neg d \wedge a) = 1$  добијамо да је  $v(\neg d) = 1$ , тј.  $v(d) = 0$  и  $v(a) = 1$ .

Из  $C$  добијамо  $v(C) = v(\neg c \wedge b) = 1 \Rightarrow v(\neg c) = 1$ , тј.  $v(c) = 0$  и  $v(b) = 1$ .

Тиме смо добили вредности свих исказних променљивих. Проверимо да ли су за ове вредности прве 2 реченице тачне.

Како је  $v(c) = 0$  и  $v(d) = 0$ , тј.  $v(\neg c) = 1$  и  $v(\neg d) = 1$  добијамо да је  $v(B) = v(\neg a \wedge \neg c) = 1$ , тј.  $B$  је тачна.

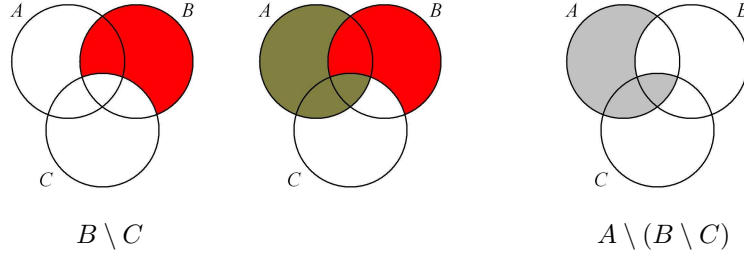
Како је  $v(b) = 1$  и  $v(d) = 0$ , тј.  $v(\neg b) = 0$  добијамо да је  $v(A) = v(\neg b \Rightarrow d) = v(0 \Rightarrow 0) = 1$ , тј.  $A$  је тачна.

Тиме смо добили интерпретацију  $\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$  у којој су све 4 формуле тачне, што значи да је горњи скуп формула непротивречан, тј. полазне изјаве нису противречне.

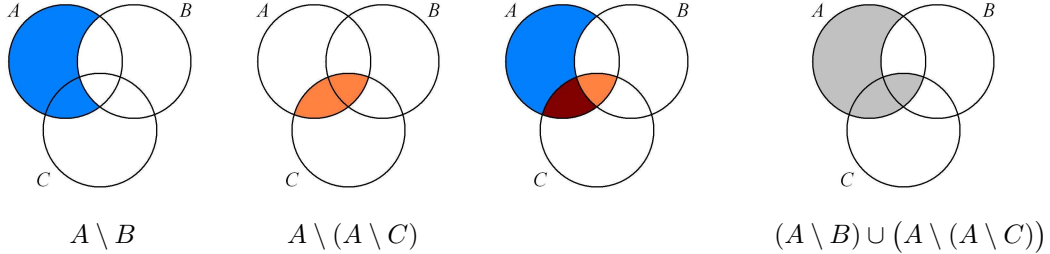
Такође, ако су све 4 изјаве тачне, онда из претходног следи да се то може десити само у случају горње интерпретације, што значи да су Аца и Боки криви, Пеца и Дуда нису.



2. а) За леву страну (она је на последњој слици) имамо следећа представљања Веновим дијаграмима:



За десну страну (она је на последњој слици) имамо следећа представљања Веновим дијаграмима:



**Напомена.** Са ових слика видимо да важи формула  $A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \cup (A \cap C)$ .

б) Означимо са  $a = x \in A$  (онда је  $\neg a = x \notin A$ ),  $b = x \in B$ ,  $c = x \in C$  и  $d = x \in D$ . Тада скуповна формула  $A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \cup (A \cap C)$  прелази у исказну формулу

$$(a \wedge \neg(b \wedge \neg c)) \Leftrightarrow ((a \wedge \neg b) \vee (a \wedge c)).$$

в)

$L$									$D$				
$a$	$b$	$c$	$\neg a$	$\neg b$	$\neg c$	$b \wedge \neg c$	$\neg(b \wedge \neg c)$	$a \wedge \neg(b \wedge \neg c)$	$a \wedge \neg b$	$a \wedge c$	$(a \wedge \neg c) \vee (a \wedge c)$	$L \Leftrightarrow D$	
0	0	0	1	1	1	0	1	0	0	0	0	1	
0	0	1	1	1	0	0	1	0	0	0	0	1	
0	1	0	1	0	1	1	0	0	0	0	0	1	
0	1	1	1	0	0	0	1	0	0	0	0	1	
1	0	0	0	1	1	0	1	1	1	0	1	1	
1	0	1	0	1	0	0	1	1	1	1	1	1	
1	1	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	1	
1	1	1	0	0	0	0	1	1	0	1	1	1	

Како смо добили све 1 у последњој колони која одговара датом исказу, то је он таутологија, па добијамо да и полазна скуповна формула важи.

**Напомена.** Обе стране имају вредност 1 за  $(a, b, c) = (1, 0, 0)$ ,  $(a, b, c) = (1, 0, 1)$  и  $(a, b, c) = (1, 1, 1)$ . Њима одговарају скупови  $\overline{A}\overline{B}\overline{C}$ ,  $\overline{A}\overline{B}C$  и  $ABC$ , који су обојени сивом бојом на оба цртежа.

3. Пребацимо дату предикатску формулу на ”уобичајени” математички језик:

$$(\forall x \in \mathbb{N}) \left( (\exists z \in \mathbb{N}) x = y \cdot z \quad \vee \quad y \neq 1 \quad \Rightarrow \quad (\exists y \in \mathbb{N}) y = x \cdot z \right).$$

Квантификатор  $(\exists z \in \mathbb{N})$  утиче само на прво следеће  $z$ , док је оно  $z$  на крају формуле слободно.

Квантификатор  $(\exists y \in \mathbb{N})$  утиче само на последње  $y$ , док је оно  $y$  пре њега слободно.

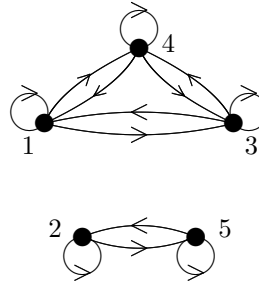
Формула у загради је облика  $p \vee q \Rightarrow r$ , што је (због приоритета логичких операција) исто што и  $(p \vee q) \Rightarrow r$ . Импликација је увек тачна када је  $v(r) = 1$ . За унапред задато  $z$  и за свако  $x$  постоји  $y$  такво да је  $y = x \cdot z$  (па узећемо баш да је  $y = xz$ !!!) те имамо да је дата импликација увек тачна, тј. полазна формула  $F$  је тачна, односно  $v(F) = 1$ .

**Напомена.** Важи да је и лева страна,  $(\exists z \in \mathbb{N}) x = y \cdot z \vee y \neq 1$ , тачна. Ако је  $y \neq 1$  онда је други део горње дисјункције тачан, тј.  $v(y \neq 1) = 1$ , па је и цела тачна. Ако је  $y = 1$  онда је  $v(y \neq 1) = 0$ , али тада имамо да треба да важи  $(\exists z \in \mathbb{N}) x = 1 \cdot z$ , што је увек тачно јер постоји  $z = x$ .

4. а) У релацији су:  $1 \varrho 1, 1 \varrho 3, 1 \varrho 4, 2 \varrho 2, 2 \varrho 5, 3 \varrho 1, 3 \varrho 3, 3 \varrho 4, 4 \varrho 1, 4 \varrho 3, 4 \varrho 4, 5 \varrho 2, 5 \varrho 5$ .  
 У релацији нису:  $1 \not\varrho 2, 1 \not\varrho 5, 2 \not\varrho 1, 2 \not\varrho 3, 2 \not\varrho 4, 3 \not\varrho 2, 3 \not\varrho 5, 4 \not\varrho 2, 4 \not\varrho 5, 5 \not\varrho 1, 5 \not\varrho 3, 5 \not\varrho 4$ .

б)

$\varrho$	1	2	3	4	5
1	1	0	1	1	0
2	0	1	0	0	1
3	1	0	1	1	0
4	1	0	1	1	0
5	0	1	0	0	1



в) Ова је релација **P** (у табlici су елементи на главној дијагонали једнаки 1; у графу видимо да око сваког чвора имамо петљу).

Ова је релација **C** (у табlici су елементи који су симетрични у односу на главну дијагоналу међусобно једнаки; у графу видимо да између 2 различита чвора имамо или 0 или 2 гране).

Ова релација није **AC** (не важи  $1 \varrho 3, 3 \varrho 1 \Rightarrow 1 = 3$ ).

Ова је релација **T** (видимо са графа).

г) Ова релација је **P**, **C** и **T**, па је релација еквиваленције.

Како није **AC** она није релација поретка.

д) Класе еквиваленције су:

$$[1] = [3] = [4] = \{1, 3, 4\}, \quad [2] = [5] = \{2, 5\}.$$

## Решења групе Г

1. Означимо са  $a$  исказ "Аца је крив", са  $b$  исказ "Боки је крив", са  $c$  исказ "Пеца је крива" и са  $d$  исказ "Дуда је крива".

Тада дате реченице (које можемо означити редом са  $A, B, C, D$ ) можемо записати као:

- $\neg a \wedge b$ .
- $\neg a \wedge \neg c$ .
- $\neg c \wedge d$ .
- $\neg b \Rightarrow c$ .

Ове 4 изјаве су непротивречне, само уколико исказна формула

$$A \wedge B \wedge C \wedge D$$

има валуацију основних исказа  $(a, b, c, d)$  за коју постиже вредност 1.

Наставак задатка ћемо разматрати на 2 различита начина.

I начин (преко таблице истинитости):

				$A$		$B$		$C$		$D$		
$a$	$b$	$c$	$d$	$\neg a$	$\neg a \wedge b$	$\neg c$	$\neg a \wedge \neg c$	$\neg c \wedge d$	$\neg b$	$\neg b \Rightarrow c$	$A \wedge B \wedge C \wedge D$	
0	0	0	0	1	0	1	1	0	1	0	0	
0	0	0	1	1	0	1	1	1	1	0	0	
0	0	1	0	1	0	0	0	0	1	1	0	
0	0	1	1	1	0	0	0	0	1	1	0	
0	1	0	0	1	1	1	1	0	0	1	0	
<span style="border: 1px solid black;">0</span>	<span style="border: 1px solid black;">1</span>	<span style="border: 1px solid black;">0</span>	<span style="border: 1px solid black;">1</span>	1	1	1	1	1	0	1	<span style="border: 1px solid black;">1</span>	
0	1	1	0	1	1	0	0	0	0	1	0	
0	1	1	1	1	1	0	0	0	0	1	0	
1	0	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0	
1	0	0	1	0	0	1	0	1	1	0	0	
1	0	1	0	0	0	0	0	0	1	1	0	
1	0	1	1	0	0	0	0	0	1	1	0	
1	1	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0	
1	1	0	1	0	0	1	0	1	0	1	0	
1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	
1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	1	0	

Како смо добили бар једну 1 у последњој колони то су дате изјаве непротивречне.

Вредност 1 у последњој колони се постиже само када је  $v(a) = 0$ ,  $v(b) = 1$ ,  $v(c) = 0$ ,  $v(d) = 1$ , тј. добили смо да су Боки и Дуда криви, а Аца и Пеца нису.

II начин (дискусија вредности  $a, b, c, d$ ):

Претпоставимо да постоји интерпретација у којој су све четири формуле  $A, B, C, D$  тачне и одредимо вредности  $a, b, c, d$  у тој интерпретацији.

Како је  $A$  тачна, тј.  $v(A) = v(\neg a \wedge b) = 1$  добијамо да је  $v(\neg a) = 1$ , тј.  $v(a) = 0$  и  $v(b) = 1$ .

Из  $B$  добијамо  $v(B) = v(\neg a \wedge \neg c) = 1 \Rightarrow v(\neg a) = 1$  и  $v(\neg c) = 1$ , тј.  $v(a) = 0$  и  $v(c) = 0$ .

Из  $C$  добијамо  $v(C) = v(\neg c \wedge d) = 1 \Rightarrow v(\neg c) = 1$ , тј.  $v(c) = 0$  и  $v(d) = 1$ .

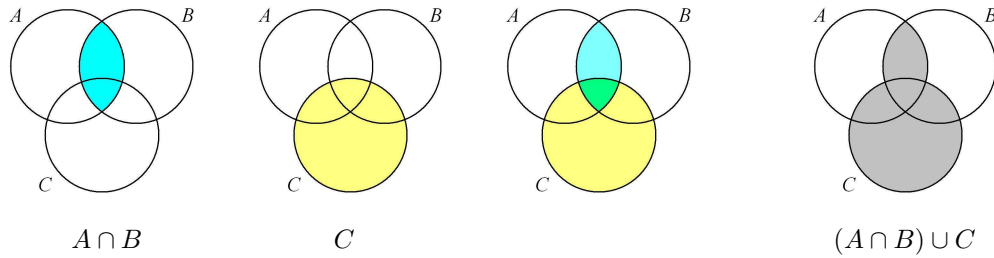
Тиме смо добили вредности свих исказних променљивих. Проверимо да ли је за ове вредности и последња реченица тачна.

Како је  $v(b) = 1$  и  $v(c) = 0$ , тј.  $v(\neg b) = 0$  добијамо да је  $v(A) = v(\neg b \Rightarrow c) = v(0 \Rightarrow 0) = 1$ , тј.  $A$  је тачна.

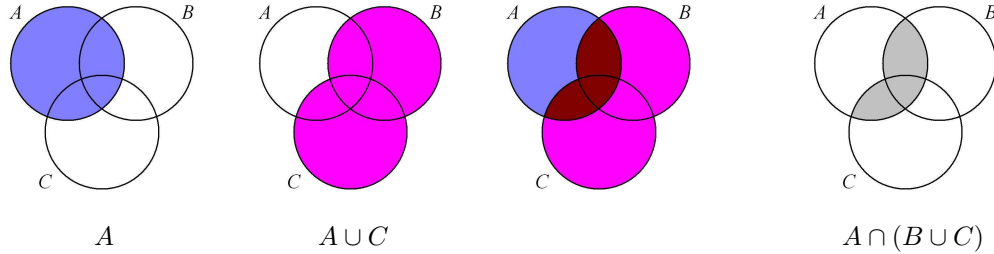
Тиме смо добили интерпретацију  $\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$  у којој су све 4 формуле тачне, што значи да је горњи скуп формула непротивречан, тј. полазне изјаве нису противречне.

Такође, ако су све 4 изјаве тачне, онда из претходног следи да се то може десити само у случају горње интерпретације, што значи да су Боки и Дуда криви, а Аца и Пеца нису.

2. а) За леву страну (она је на последњој слици) имамо следећа представљања Веновим дијаграмима:



За десну страну (она је на последњој слици) имамо следећа представљања Веновим дијаграмима:



**Напомена.** Са ових слика видимо да формула  $(A \cap B) \cup C = A \cap (B \cup C)$  важи само ако не постоји део скупа  $C$  који се не налази у  $A$ , тј. кад је  $C \subseteq A$ .

б) Означимо са  $a = x \in A$  (онда је  $\neg a = x \notin A$ ),  $b = x \in B$ ,  $c = x \in C$  и  $d = x \in D$ . Тада скуповна формула  $(A \cap B) \cup C = A \cap (B \cup C) \Leftrightarrow C \subseteq A$  прелази у исказну формулу

$$\left( ((a \wedge b) \vee c) \Leftrightarrow (a \wedge (b \vee c)) \right) \Leftrightarrow (c \Rightarrow a).$$

в)

			$p$		$q$		$L$	$D$	
$a$	$b$	$c$	$a \wedge b$	$(a \wedge b) \vee c$	$b \vee c$	$a \wedge (b \vee c)$	$p \Leftrightarrow q$	$c \Rightarrow a$	$L \Leftrightarrow D$
0	0	0	0	0	0	0	1	1	1
0	0	1	0	1	1	0	0	0	1
0	1	0	0	0	1	0	1	1	1
0	1	1	0	1	1	0	0	0	1
1	0	0	0	0	0	0	1	1	1
1	0	1	0	1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1

Како смо добили све 1 у последњој колони која одговара датом исказу, то је он таутологија, па добијамо да и полазна скуповна формула важи.

**Напомена.** У колони  $L$  која одговара левој страни добијамо вредност 0 само за  $(a, b, c) = (0, 0, 1)$  и  $(a, b, c) = (0, 1, 1)$ . Њима одговарају скупови  $\overline{A}BC$  и  $\overline{A}BC$ , тако да скуповна једнакост која је на левој страни није испуњена само у ова 2 случаја, тј. само када није  $C \subseteq A$ .

3. Пребацимо дату предикатску формулу на "уобичајени" математички језик:

$$(\forall x \in \mathcal{P}(A)) \left( (\exists y \in \mathcal{P}(A)) x = x \cup y \Leftrightarrow \neg (x \neq y \wedge y \neq \emptyset) \right).$$

Само прво појављивање  $y$  је везано за квантификатор, док су остала 2 слободна. Сва појављивања  $x$  су везана за квантификатор.

Када уђемо са негацијом у последњу формулу (тј. применимо Де Морганово правило) добијамо да је полазна формула еквивалентна са:

$$(\forall x \in \mathcal{P}(A)) \left( (\exists y \in \mathcal{P}(A)) x = x \cup y \Leftrightarrow (x = y \vee y = \emptyset) \right).$$

Предикатска формула  $(\exists y \in \mathcal{P}(A)) x = x \cup y$  је увек тачна (можемо изабрати нпр.  $y = x$  или  $y = \emptyset$ ). Како је  $v(1 \Leftrightarrow q) = v(q)$  то добијамо да се полазна формула своди на

$$(\forall x \in \mathcal{P}(A)) (x = y \vee y = \emptyset).$$

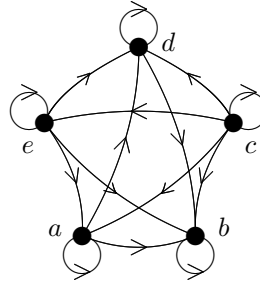
Како је  $A \neq \emptyset$  то је и  $\mathcal{P}(A) \neq \emptyset$ , па је прва формула у овој дисјункцији,  $(\forall x \in \mathcal{P}(A)) x = y$ , увек нетачна, а друга формула је тачна само уколико је  $y = \emptyset$ . Стога добијамо да је и полазна формула тачна ако и

$$\text{само ако је } y = \emptyset, \text{ тј. } v(F) = \begin{cases} 1, & y = \emptyset \\ 0, & y \neq \emptyset \end{cases}.$$

4. а) У релацији су:  $a \varrho a, a \varrho b, a \varrho d, b \varrho b, c \varrho a, c \varrho b, c \varrho c, c \varrho d, c \varrho e, d \varrho b, d \varrho d, e \varrho a, e \varrho b, e \varrho d, e \varrho c$ .  
У релацији нису:  $a \not\varrho c, a \not\varrho e, b \not\varrho a, b \not\varrho c, b \not\varrho d, b \not\varrho e, d \not\varrho a, d \not\varrho c, d \not\varrho e, e \not\varrho c$ .

б)

$\varrho$	$a$	$b$	$c$	$d$	$e$
$a$	1	1	0	1	0
$b$	0	1	0	0	0
$c$	1	1	1	1	1
$d$	0	1	0	1	0
$e$	1	1	0	1	1



в) Ова је релација **P** (у табlici су елементи на главној дијагонали једнаки 1; у графу видимо да око сваког чвора имамо петљу).

Ова релација није **C** (не важи  $a \varrho b \Rightarrow b \varrho a$ ).

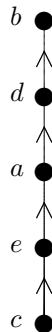
Ова је релација **AC** (у табlici међу елементима који су симетрични у односу на главну дијагоналу не налазимо две 1; у графу видимо да између 2 различита чвора имамо или 0 или 1 грану).

Ова је релација **T** (видимо са графа).

г) Ова релација је **P**, **AC** и **T**, па је релација поретка.

Како није **C** она није релација еквиваленције.

д) Како између свака два чвора постоји тачно једна грана ово је релација тоталног поретка (тј. скуп  $\{a, b, c, d, e\}$  са релацијом  $\varrho$  је ланац). То можемо видети и са следећег Хасеовог дијаграма:



## Решења групе Д

1. Означимо са  $a$  исказ "Аца је крив", са  $b$  исказ "Боки је крив", са  $c$  исказ "Пеца је крива" и са  $d$  исказ "Дуда је крива".

Тада дате реченице (које можемо означити редом са  $A, B, C, D$ ) можемо записати као:

•  $\neg a$ .

•  $\neg a \Rightarrow d$ .

•  $b \Rightarrow a$ .

Признавали смо и  $\neg c \wedge (a \vee d)$  мада или-или представља  $\vee$ .

•  $(a \vee c) \wedge \neg d$ .

Ове 4 изјаве су непротивречне, само уколико исказна формула

$$A \wedge B \wedge C \wedge D$$

има валуацију основних исказа  $(a, b, c, d)$  за коју постиже вредност 1.

Наставак задатка ћемо разматрати на 2 различита начина.

I начин (преко таблице истинитости):

				$A$	$B$	$C$	$D$			
$a$	$b$	$c$	$d$	$\neg a$	$\neg a \Rightarrow d$	$b \Rightarrow a$	$a \vee c$	$\neg d$	$(a \vee c) \wedge \neg d$	$A \wedge B \wedge C \wedge D$
0	0	0	0	1	0	1	0	1	0	0
0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0
0	0	1	0	1	0	1	1	1	1	0
0	0	1	1	1	1	1	1	0	0	0
0	1	0	0	1	0	0	0	1	0	0
0	1	0	1	1	1	0	0	0	0	0
0	1	1	0	1	0	0	1	1	1	0
0	1	1	1	1	1	0	1	0	0	0
1	0	0	0	0	1	1	1	1	1	0
1	0	0	1	0	1	1	1	0	0	0
1	0	1	0	0	1	1	0	1	0	0
1	0	1	1	0	1	1	0	0	0	0
1	1	0	0	0	1	1	1	1	1	0
1	1	0	1	0	1	1	1	0	0	0
1	1	1	0	0	1	1	0	1	0	0
1	1	1	1	0	1	1	0	0	0	0

Како смо добили све 0 у последњој колони то су дате изјаве противречне. Стога је немогуће да сви они говоре истину (тј. истражни судија не може на основу њихових изјава да одреди ко је крив).

II начин (дискусија вредности  $a, b, c, d$ ):

Претпоставимо да постоји интерпретација у којој су све четири формуле  $A, B, C, D$  тачне и одредимо вредности  $a, b, c, d$  у тој интерпретацији.

Како је  $A$  тачна, тј.  $v(A) = v(\neg a) = 1$  добијамо да је  $v(a) = 0$ .

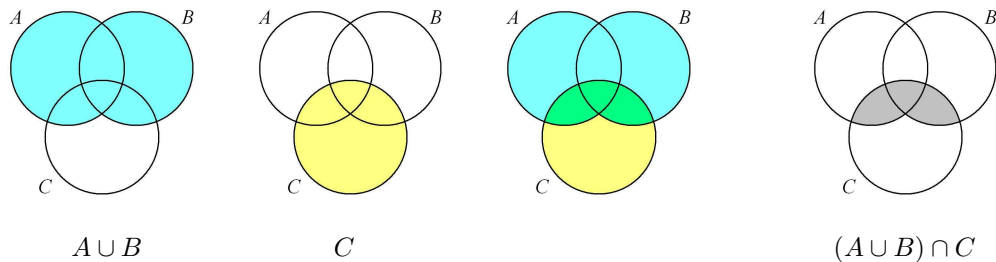
Из  $B$ ,  $v(B) = v(\neg a \Rightarrow d) = 1$ , како је  $v(\neg a) = 1$  следи да је  $v(d) = 1$ .

Из  $D$  добијамо  $v(C) = v((a \vee c) \wedge \neg d) = 1 \Rightarrow v(\neg d) = 1$ , тј.  $v(d) = 0$ , што је у супротности са претходним закључцима где смо добили да је  $v(d) = 1$ .

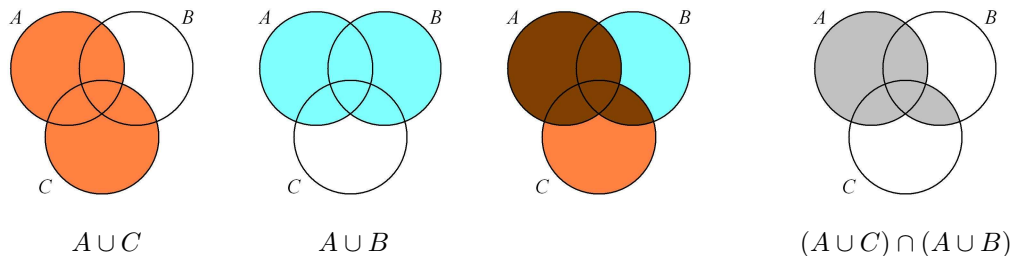
Како смо добили контрадикцију, горњи скуп формула је противречан, тј. полазне изјаве су противречне.

Такође, немогуће је да су све 4 изјаве тачне, тј. на основу ових изјава немогуће је одредити ко је крив.

2. а) За леву страну (она је на последњој слици) имамо следећа представљања Веновим дијаграмима:



За десну страну (она је на последњој слици) имамо следећа представљања Веновим дијаграмима:



**Напомена.** Са ових слика видимо да формула  $(A \cup B) \cap C = (A \cup C) \cap (A \cup B)$  важи само ако не постоји део скупа  $A$  који се не налази у  $C$ , тј. кад је  $A \subseteq C$ .

б) Означимо са  $a = x \in A$  (онда је  $\neg a = x \notin A$ ),  $b = x \in B$ ,  $c = x \in C$  и  $d = x \in D$ . Тада скуповна формула  $A \subseteq C \Rightarrow (A \cup B) \cap C = (A \cup C) \cap (A \cup B)$  прелази у исказну формулу

$$(a \Rightarrow c) \Rightarrow \left( ((a \vee b) \wedge c) \Leftrightarrow ((a \vee c) \wedge (a \vee b)) \right).$$

в)

$L$			$p$			$q$		$D$	
$a$	$b$	$c$	$a \Rightarrow c$	$a \vee b$	$(a \vee b) \wedge c$	$a \vee c$	$(a \vee c) \wedge (a \vee b)$	$p \Leftrightarrow q$	$L \Rightarrow D$
0	0	0	1	0	0	0	0	1	1
0	0	1	1	0	0	1	0	1	1
0	1	0	1	1	0	0	0	1	1
0	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	0	0	0	1	0	1	1	0	1
1	0	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	0	1	0	1	1	0	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1

Како смо добили све 1 у последњој колони која одговара датом исказу, то је он таутологија, па добијамо да и полазна скуповна формула важи.

**Напомена.** Како су колоне  $L$  и  $D$  исте добијамо да важи строжија исказна (а на основу ње и скуповна) формула  $(a \Rightarrow c) \Leftrightarrow \left( ((a \vee b) \wedge c) \Leftrightarrow ((a \vee c) \wedge (a \vee b)) \right)$ , тј.  $A \subseteq C \Leftrightarrow (A \cup B) \cap C = (A \cup C) \cap (A \cup B)$ .

Како је  $v(q) = 1$  и  $v(p) = 0$  само за  $(a, b, c) = (1, 0, 0)$  и  $(a, b, c) = (1, 1, 0)$ . Њима одговарају скупови  $\overline{A}\overline{B}\overline{C}$  и  $\overline{A}B\overline{C}$ . Значи, скупови које смо представљали Веновим дијаграмима су једнаки само уколико не може бити  $x \in \overline{A}\overline{B}\overline{C} \cup \overline{A}B\overline{C}$ , тј. уколико тих делова уопште нема, што је случај ако и само ако је  $A \subseteq C$ .

**Напомена.** Горња формула је облика  $p \Rightarrow (q \Leftrightarrow r)$ , а то је различито од формуле  $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow r!!!$

3. Пребацимо дату предикатску формулу на "уобичајени" математички језик:

$$(\forall x \in \mathbb{N}) \left( (\exists y \in \mathbb{N}) x = y \cdot z \Rightarrow \neg(x = 5 \wedge x \neq y) \right).$$

Само прво појављивање  $y$  је везано за квантификатор, док је следеће слободно. Сва појављивања  $x$  су везана за квантификатор. Сва појављивања  $z$  су слободна.

Када уђемо са негацијом у последњу формулу (тј. применимо Де Морганово правило) добијамо да је полазна формула еквивалентна са:

$$(\forall x \in \mathbb{N}) \left( (\exists y \in \mathbb{N}) x = y \cdot z \Rightarrow x \neq 5 \vee x = y \right).$$

Предикатска формула  $(\exists y \in \mathbb{N}) x = y \cdot z$  је еквивалентна са  $z \mid x$  (тј.  $x$  је дељиво са  $z$ ), па се полазна формула своди на

$$(\forall x \in \mathbb{N}) (z \mid x \Rightarrow x \neq 5 \vee x = y).$$

Вредност левог дела ове импликације је  $v(z \mid x) = \begin{cases} 1, & z \mid x \\ 0, & z \nmid x \end{cases}$ . Како имамо да је  $v(x \neq 5) = \begin{cases} 1, & x \neq 5 \\ 0, & x = 5 \end{cases}$

и  $v(x = y) = \begin{cases} 1, & x = y \\ 0, & x \neq y \end{cases}$  за десни део ове импликације је  $v(x \neq 5 \vee x = y) = \begin{cases} 1, & x \neq 5 \\ 1, & x = y \\ 0, & x = 5, x \neq y \end{cases}$ . Да би

импликација  $p \Rightarrow q$  била нетачна (тј.  $v(p \Rightarrow q) = 0$ ) потребно је да је  $v(p) = 1$  и  $v(q) = 0$ , тј. да важи  $z \mid x$  и  $x = 5$  и  $x \neq y$ , а то је могуће само када везана променљива  $x$  узима вредност 5, док за слободне променљиве треба да важи  $y \neq 5$  и  $z \mid 5$ , тј.  $z \in \{1, 5\}$ . Како полазна формула  $F$  треба да је тачна за свако  $x$  то је довољно наћи једно  $x$  (у овом случају  $x = 5$ ) за које није тачна да би цела била нетачна. Стога је

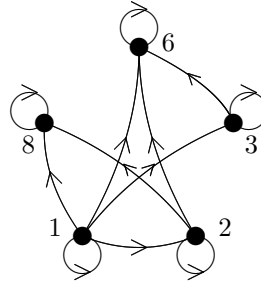
$$v(F) = \begin{cases} 0, & y \neq 5, z \in \{1, 5\} \\ 1, & \text{иначе} \end{cases}$$

4. а) У релацији су:  $1 \varrho 1, 1 \varrho 2, 1 \varrho 3, 1 \varrho 6, 1 \varrho 8, 2 \varrho 2, 2 \varrho 6, 2 \varrho 8, 3 \varrho 3, 3 \varrho 6, 6 \varrho 6, 8 \varrho 8$ .

У релацији нису:  $2 \not\varrho 1, 2 \not\varrho 3, 3 \not\varrho 1, 3 \not\varrho 2, 3 \not\varrho 8, 6 \not\varrho 1, 6 \not\varrho 2, 6 \not\varrho 3, 6 \not\varrho 8, 8 \not\varrho 1, 8 \not\varrho 2, 8 \not\varrho 3, 8 \not\varrho 6$ .

б)

$\varrho$	1	2	3	6	8
1	1	1	1	1	1
2	0	1	0	1	1
3	0	0	1	1	0
6	0	0	0	1	0
8	0	0	0	0	1



в) Ова је релација **P** (у табели су елементи на главној дијагонали једнаки 1; у графу видимо да око сваког чвора имамо петљу).

Ова релација није **C** (не важи  $1 \varrho 2 \Rightarrow 2 \varrho 1$ ).

Ова је релација **AC** (у табели међу елементима који су симетрични у односу на главну дијагоналу не налазимо две 1; у графу видимо да између 2 различита чвора имамо или 0 или 1 грану).

Ова је релација **T** (видимо са графа).

г) Ова релација је **P**, **AC** и **T**, па је релација поретка.

Како није **C** она није релација еквиваленције.

д) Како не важи да између свака два чвора постоји тачно једна грана, нпр.  $2 \not\varrho 3$  и  $3 \not\varrho 2$ , ово није релација тоталног поретка. То можемо видети и са следећег Хасеовог дијаграма:

