

Презиме и име студента

бр. индекса

1. (25 поена) Мислећи да је атрактиван изглед довољан за каријеру певачице, пет мојих младих суграђанки (Кристина, Јелена, Тања, Радица, Виолета) иду са аудиције на аудицију и – доживљава неуспех за неуспехом. Колико која има година (18,19,20,21,22), на колико су аудиција биле до сада (4,5,6,7,8) и шта су певале на последњој ("Плава лампа трепери", "Кроз шљивике и ливаде", "Мирно спавај, нано", "Шта ће ми живот" и "Кукавица") открићете из овог задатка.

- Кристина има годину дана више од интерпретаторке песме "Мирно спавај, нано", а годину дана је млађа од девојке са најмањим бројем покушаја.
- Девојка која има 21 годину, била је на аудицијама једном више него Јелена, а једном мање од оне која је покушала са "Кукавицом".
- Једну годину више и једну аудицију више од Радице има девојка чија је песма на аудицији била "Шта ће ми живот".
- Тања, која се окушала са "Кроз шљивике и ливаде", млађа је годину дана од девојке са 6 неуспелих аудиција.
- "Плаву лампу" је певала двадесетогодишњакиња.

(Ако поставите тачно таблицу са 0 и 1 за ове исказе добијате 5 поена, а затим за сваки тачан исказ попут „Девојка која има 18 година није била на тачно 5 аудиција“ са образложењем како сте до тога дошли добијате по 1 поен – до укупно 20 поена и за комплетирање задатка још 5 поена \Rightarrow укупно 25 поена)

2. (25 поена) Испитати да ли је релација ρ дефинисана као $x \rho y \stackrel{\text{def}}{\iff} (x^2 - y^2)(x^2 y^2 - 1) = 0$ једна релација еквиваленције на скупу реалних бројева. Уколико јесте, одредити класе еквиваленције $[0]$, $[1]$ и $[2]$.

3. (25 поена) Нека су фреквенције појављивања неких симбола дате у следећој табели

симбол	а	и	к	м	о	т	у
фреквенција	26	20	4	8	2	17	1

а) Одредити одговарајуће Хафманово стабло S (тј. бинарно стабло минималне средње дужине пута код кога су дати симболи листови), као и одговарајући Хафманов код.

б) Колика је висина добијеног стабла S ? Одредити ниво сваког листа у стаблу S . Да ли је стабло S балансирано? Да ли је стабло S потпуно бинарно стабло?

в) Кодирати реч „аутоматика“.

г) Да ли је неки од следећих кодова исправан (тј. представља неку од речи горње азбуке):

01, 101, 00100, 00011101, 001100111, 010000100111?

4. (25 поена) Наћи коначан аутомат који препознаје оне речи над азбуком $\{a, b\}$ које почињу са $ababa$ и садрже тачно два b или најмање пет b и садрже најмање три a .

а) Да ли је добијени аутомат оптималан? Ако није оптимизовати га.

б) Одредити регуларну граматiku $G = (N, \Sigma, P, S)$ која одговара оптималном аутомату.

Задатке детаљно образложити! Срећно!

Решења

1. На основу података датих у задатку можемо попунити следеће у табlici (црвени су на основу прве реченице, плави на основу друге, зелени на основу треће, наранџасти на основу четврте и љубичасти на основу пете и при томе 1 означава да је то тачно, а 0 да није):

	"Плава лампа трепери"	"Кроз шљивике и ливаде"	"Мирно спавај, нано"	"Шта ће ми живот"	"Кукавица"	18 година	19 година	20 година	21 година	22 године	4 аудиције	5 аудиција	6 аудиција	7 аудиција	8 аудиција
Кристина		0	0			0			0	0	0				
Јелена		0			0				0					0	0
Тања	0	1	0	0	0			0		0			0		
Радица		0		0						0					0
Виолета		0													
4 аудиција			0	0	0	0	0		0						
5 аудиција					0										
6 аудиција		0				0									
7 аудиција															
8 аудиција									0						
18 година	0			0											
19 година	0														
20 година	1	0	0	0	0										
21 година	0		0		0										
22 година	0	0	0												

На основу претходне табlice имамо да је девојка са најмање аудиција певала или "Плава лампа трепери" или "Кроз шљивике и ливаде".

То не може бити "Кроз шљивике и ливаде" јер онда особа са 4 аудиције не би могла да има 18, 19 или 21 годину, а особа која пева "Кроз шљивике и ливаде" не би могла да има 20 или 22 године, што је немогуће! Стога је девојка са најмање аудиција (4) певала "Плава лампа трепери", а за њу знамо да има 20 година. Даље из прве реченице имамо да Кристина има 19 година, а да је интерпретаторка песме "Мирно спавај, нано" стара 18 година.

	"Плава..."	"Кроз..."	"Мирно..."	"Шта..."	"Кукавица"	18 година	19 година	20 година	21 година	22 године	4 аудиције	5 аудиција	6 аудиција	7 аудиција	8 аудиција
Кристина		0	0			0	1	0	0	0	0				
Јелена		0			0		0		0					0	0
Тања	0	1	0	0	0		0	0		0			0		
Радица		0		0			0			0					0
Виолета		0					0								
4 аудиција	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0					
5 аудиција	0				0			0							
6 аудиција	0	0				0		0							
7 аудиција	0							0							
8 аудиција	0							0	0						
18 година	0	0	1	0	0										
19 година	0		0												
20 година	1	0	0	0	0										
21 година	0		0		0										
22 година	0	0	0												

Даље, како Тања може да има или 18 година или 21, а она пева "Кроз шљивике и ливаде", а не "Мирно спавај, нано", добијамо да је она стара 21 годину (ово уносимо и у поља која су пресеку броја година и песме коју певају!). То повлачи (на основу 4. реченице) да девојка са 6 неуспелих аудиција има 22 године. За њу знамо да она није певала "Мирно спавај, нано" (јер то пева 18-тогодишњакиња).

	"Плава лампа трепери"	"Кроз шљивике и ливаде"	"Мирно спавај, нано"	"Шта ће ми живот"	"Кукавица"	18 година	19 година	20 година	21 година	22 године	4 аудиције	5 аудиција	6 аудиција	7 аудиција	8 аудиција
Кристина		○	○			○	1	○	○	○	○				
Јелена		○			○		○		○					○	○
Тања	○	1	○	○	○	○	○	○	1	○			○		
Радица		○		○			○		○	○					○
Виолета		○					○		○						
4 аудиција	1	○	○	○	○	○	○	1	○	○					
5 аудиција	○				○			○		○					
6 аудиција	○	○	○			○	○	○	○	1					
7 аудиција	○							○		○					
8 аудиција	○							○	○	○					
18 година	○	○	1	○	○										
19 година	○	○	○												
20 година	1	○	○	○	○										
21 година	○	1	○	○	○										
22 година	○	○	○												

Тражимо 1 и ○ које су у истој врсти и колони са њима. То нам даје следеће закључке: у пресеку 4 аудиције и 20 година је 1, а у пресеку Тање и 20 година је ○, па Тања није имала 4 аудиције. У пресеку 6 аудиција и 22 године је 1, а у пресеку 22 године са Кристином и Радицом је ○, па оне не могу бити на 6 аудиција.

Даље, Радица може да има 18 или 20 година. Ако би имала 20 година онда би она била на 4 аудиције и певала би "Плава лампа трепери", а онда би на основу 3. реченице девојка која чија је песма на аудицији била "Шта ће ми живот" имала једну годину више од Радице, тј. 21 годину, колико има Тања, али је она певала "Кроз шљивике и ливаде"! Како смо добили контрадикцију, Радица мора да има 18 година.

Сада, на основу 3. реченице добијамо да девојка која чија је песма на аудицији била "Шта ће ми живот" имала једну годину више од Радице, тј. 19 година. То повлачи да је девојка стара 22 године певала "Кукавицу", чиме смо комплетирали поља која се налазе у пресеку година и песме.

	"Плава..."	"Кроз..."	"Мирно..."	"Шта..."	"Кукавица"	18 година	19 година	20 година	21 година	22 године	4 аудиције	5 аудиција	6 аудиција	7 аудиција	8 аудиција
Кристина		○	○			○	1	○	○	○	○		○		
Јелена		○			○	○	○		○					○	○
Тања	○	1	○	○	○	○	○	○	1	○	○		○		
Радица		○		○		1	○	○	○	○			○		○
Виолета		○				○	○		○						
4 аудиција	1	○	○	○	○	○	○	1	○	○					
5 аудиција	○				○			○		○					
6 аудиција	○	○	○			○	○	○	○	1					
7 аудиција	○							○		○					
8 аудиција	○							○	○	○					
18 година	○	○	1	○	○										
19 година	○	○	○	1	○										
20 година	1	○	○	○	○										
21 година	○	1	○	○	○										
22 година	○	○	○	○	1										

У поља са бројем аудиција и песама уносимо да је девојка са 6 аудиција певала "Кукавицу" (розе бојом).

Сада решавање задатка иде праволинијски ка крају (следеће закључке уносимо браон бојом). На основу 2. реченице имамо да је девојка са 21 годином (а за њу знамо да је то Тања) била на аудицијама једном мање од оне која је покушала са "Кукавицом", тј. 5 пута. На основу остатка 2. реченице добијамо да је Јелена била на аудицијама 4 пута, па је она стара 20. година и певала је "Плава лампа трепери".

	"Плава..."	"Кроз..."	"Мирно..."	"Шта..."	"Кукавица"	18 година	19 година	20 година	21 година	22 године	4 аудиције	5 аудиција	6 аудиција	7 аудиција	8 аудиција
Кристина	○	○	○			○	1	○	○	○	○	○	○		
Јелена	1	○	○	○	○	○	○	1	○	○	1	○	○	○	○
Тања	○	1	○	○	○	○	○	○	1	○	○	1	○	○	○
Радица	○	○		○		1	○	○	○	○	○	○	○		○
Виолета	○	○				○	○	○	○		○	○			
4 аудиција	1	○	○	○	○	○	○	1	○	○					
5 аудиција	○	1	○	○	○	○	○	○	1	○					
6 аудиција	○	○	○	○	1	○	○	○	○	1					
7 аудиција	○	○			○			○	○	○					
8 аудиција	○	○			○			○	○	○					
18 година	○	○	1	○	○										
19 година	○	○	○	1	○										
20 година	1	○	○	○	○										
21 година	○	1	○	○	○										
22 година	○	○	○	○	1										

На основу преосталих празних поља (која су једина у врсти или колони) добијамо да је Радица била на 7 аудиција, одатле следи да је Кристина била на 8 и коначно да је Виолета била на 6, као и да Виолета има 22 године.

На основу овога можемо комплетирати таблицу:

	"Плава лампа трепери"	"Кроз шљивике и ливаде"	"Мирно спавај, нано"	"Шта ће ми живот"	"Кукавица"	18 година	19 година	20 година	21 година	22 године	4 аудиције	5 аудиција	6 аудиција	7 аудиција	8 аудиција
Кристина	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1
Јелена	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0
Тања	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0
Радица	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0
Виолета	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0
4 аудиција	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0					
5 аудиција	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0					
6 аудиција	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1					
7 аудиција	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0					
8 аудиција	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0					
18 година	0	0	1	0	0										
19 година	0	0	0	1	0										
20 година	1	0	0	0	0										
21 година	0	1	0	0	0										
22 година	0	0	0	0	1										

Коначно, из последње таблице можемо извучи и следеће закључке:

- Кристина има 19 година, била је на 8 аудиција и пева "Шта ће ми живот",
- Јелена има 20 година, била је на 4 аудиција и пева "Плава лампа трепери",
- Тања има 21 година, била је на 5 аудиција и пева "Кроз шљивике и ливаде",
- Радица има 18 година, била је на 7 аудиција и пева "Мирно спавај, нано",
- Виолета има 22 година, била је на 6 аудиција и пева "Кукавицу".

$$2. \quad x \rho y \Leftrightarrow (x^2 - y^2)(x^2 y^2 - 1) = 0 \Leftrightarrow x^2 = y^2 \text{ или } x^2 y^2 = 1 \Leftrightarrow x = y \text{ или } x = -y \text{ или } x = \frac{1}{y} \text{ или } x = \frac{-1}{y}.$$

P $x = x$ па је $x \rho x$. ✓

C Ако је $x \rho y$ онда имамо 4 случаја: 1° $x = y$, 2° $x = -y$, 3° $x = \frac{1}{y}$ и 4° $x = \frac{-1}{y}$.

$$1^\circ \quad x = y \Rightarrow y = x \Rightarrow y \rho x;$$

$$2^\circ \quad x = -y \Rightarrow y = -x \Rightarrow y \rho x.$$

$$3^\circ \quad x = \frac{1}{y} \Rightarrow y = \frac{1}{x} \Rightarrow y \rho x;$$

$$4^\circ \quad x = \frac{-1}{y} \Rightarrow y = \frac{-1}{x} \Rightarrow y \rho x.$$

Како смо у сва 4 случаја добили $x \rho y \Rightarrow y \rho x$ то је ова релација симетрична.

T Ако је $x \rho y$ онда имамо 4 случаја и ако је $y \rho z$ онда имамо 4 случаја, што даје укупно $4 \cdot 4 = 16$ случаја (што је већ много за испитивати иако је за опену :) те ћемо прибећи редукцији случајева.

Ако је $x \rho y$ онда имамо 2 случаја 1° $x^2 = y^2$ и 2° $x^2 = \frac{1}{y^2}$.

Ако је $y \rho z$ онда имамо 2 случаја а° $y^2 = z^2$ и б° $y^2 = \frac{1}{z^2}$. То даје укупно $2 \cdot 2 = 4$ случаја:

$$1a^\circ \quad x^2 = y^2, y^2 = z^2 \Rightarrow x^2 = z^2 \Rightarrow x \rho z;$$

$$1b^\circ \quad x^2 = y^2, y^2 = \frac{1}{z^2} \Rightarrow x^2 = \frac{1}{z^2} \Rightarrow x \rho z;$$

$$2a^\circ \quad x^2 = \frac{1}{y^2}, y^2 = z^2 \Rightarrow x^2 = \frac{1}{z^2} \Rightarrow x \rho z;$$

$$2b^\circ \quad x^2 = \frac{1}{y^2}, y^2 = \frac{1}{z^2} \Rightarrow x^2 = \frac{1}{\frac{1}{z^2}} = z^2 \Rightarrow x \rho z.$$

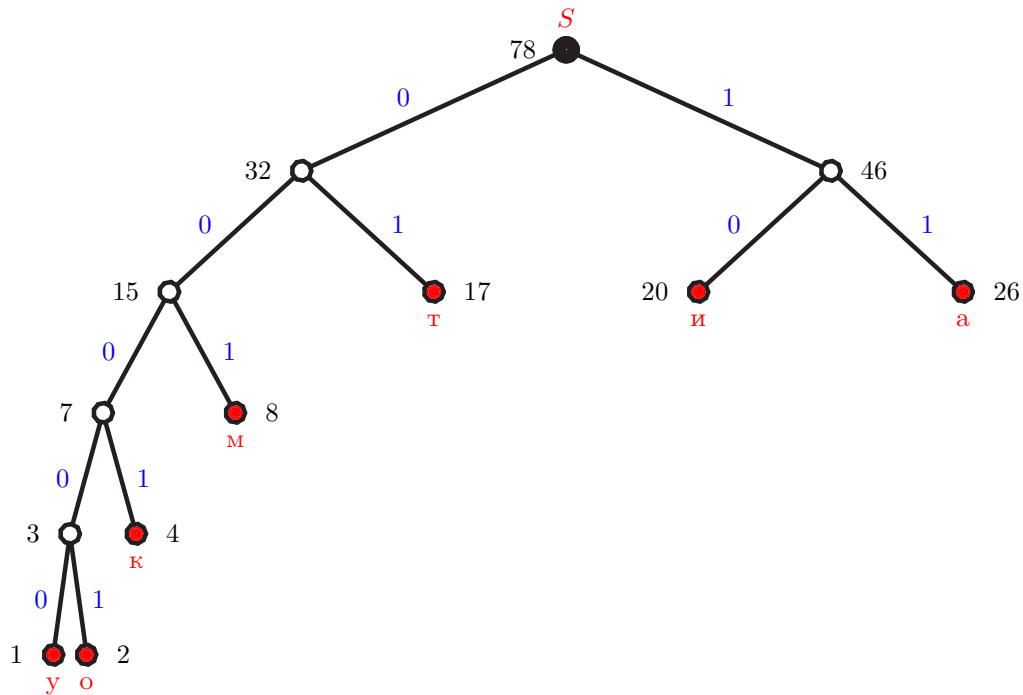
Како смо у сва 4 случаја добили $x \rho y, y \rho z \Rightarrow x \rho z$ то је ова релација транзитивна.

Како је P,C,T дата релација је једна релација еквиваленције на скупу реалних бројева.

Одредимо тражене класе еквиваленције:

$$[0] = \{y \in \mathbb{R} \mid 0 \rho y\} = \{0\}, [1] = \{y \in \mathbb{R} \mid 1 \rho y\} = \{1, -1\}, [2] = \{y \in \mathbb{R} \mid 2 \rho y\} = \{2, -2, \frac{1}{2}, \frac{-1}{2}\}.$$

3. а) На следећој слици је приказано одговарајуће Хафманово стабло.



Из њега добијамо и одговарајући Хафманов код тако што пратимо битове (на слици плаве боје) који су придружени свакој грани у путу од корена Хафмановог стабла (црн чвор) до листа у коме се налази одговарајући симбол:

а	и	к	м	о	т	у
11	10	0001	001	00001	01	00000

б) Ниво листова (који су обојени црвеном бојом) је дат у следећој табlici:

ЛИСТ	а	и	к	м	о	т	у
НИВО	2	2	4	3	5	2	5

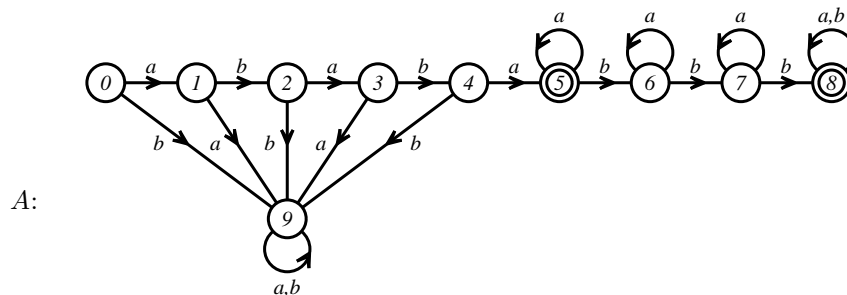
Због листова о и у висина стабла је 5. Стабло није балансирано јер постоје чворови чији се ниво разликује за више од 1 (нпр. а и о). Самим тим није ни потпуно бинарно (јер код њега морају сви листови бити на истом нивоу).

в) Реч „аутоматика“ када је кодирамо Хафмановим кодом је:

11 00000 01 00001 001 11 01 10 0001 11.
а у т о м а т и к а

г) Прва реч је „т“, друга и трећа не представљају речи дате азбуке, а затим иду „кат“, „мита“, „тома“.

4. Како дате речи почињу са *ababa* оне сигурно садрже бар 3 слова *a*. Тиме смо знатно поједноставили рад, те ћемо директно састављати аутомат *A* који почиње са *ababa* и који садржи или 2 слова *b* или најмање 5 слова *a*.



а) Аутомат *A* јесте оптималан.

б) Одредимо регуларну граматикку $G = (N, \Sigma, P, S)$ која одговара коначном аутомату *A*. Имамо да је $N = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, $\Sigma = \{a, b\}$, $P = \{0 \rightarrow a1, 0 \rightarrow b9, 1 \rightarrow a9, 1 \rightarrow b2, 2 \rightarrow a3, 2 \rightarrow b9, 3 \rightarrow a9, 3 \rightarrow b4, 4 \rightarrow a5, 4 \rightarrow b9, 5 \rightarrow e, 5 \rightarrow a5, 5 \rightarrow b6, 6 \rightarrow a6, 6 \rightarrow b7, 7 \rightarrow a7, 7 \rightarrow b8, 8 \rightarrow e, 8 \rightarrow a8, 8 \rightarrow b8, 9 \rightarrow a9, 9 \rightarrow b9\}$ и $S = 0$.