A　　I колоквијум из ДМС-а　　A
ФОН, 19.04.2015.

Презиме и име студента　　　　**бр. индекса**

1. Ана, Бока, Цеца и Дана су 4 студенткиње ФОН-а и свака од њих тренира тачно један спорт – кошарку или одбојку. Дате су следеће реченице:

I Дана игра одбојку или Бока и Цеца тренирају различите спортове.

II Дана и Бока играју кошарку или није тачно да ако Цеца игра кошарку онда бар једна од Ане и Боке игра кошарку.

III Дана и Цеца тренирају исти спорт или ако Бока игра кошарку онда и Цеца игра кошарку.

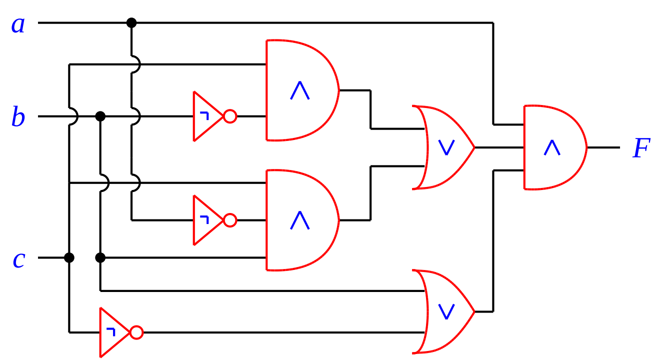
IV Обе Ана и Бока играју кошарку или Цеца игра кошарку; Дана и Бока се баве истим спортом.

а) Да ли су ове реченице непротивречне? Да ли међу њима има логички еквивалентних реченица?

б) За сваку исказну формулу $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4$ (редом одговарају I,II,III,IV реченици) одредити једну КНФ или једну ДНФ. Да ли је нека од ових формула таутологија или контрадикција?

в) За кога од њих можете са сигурношћу тврдити којим се спортом бави?

2. а) Одредити исказну формулу F која одговара датом колу.



б) Испитати да ли је F таутологија или контрадикција.
в) Да ли F представља СКНФ, СДНФ, КНФ или ДНФ?
г) Представити F у једној КНФ и једној ДНФ.

3. Одредити истинитосну вредност формуле

$$(\forall x)\Big((\exists y)\,\alpha\big(x, f(y,z)\big) \vee \beta(z,a) \;\Rightarrow\; \beta(x,y) \wedge (\exists y)\,\alpha\big(f(x,y), z\big)\Big),$$

где је a симбол константе, α и β бинарни релацијски знаци, f бинарни функцијски (операцијски) знак, при интерпретацији $\mathcal{D} = \mathbb{N}$, $a\colon 4$, $\alpha\colon =$, $\beta\colon \geqslant$, $f\colon -$ у зависности од валуације слободних промењљивих.

4. Нека је дат скуп $X = \{8, 11, 400, 484, 1000, 8888\}$ и на њему релација $\varrho \subseteq X^2$ дата са

$$\varrho:\ x\,\varrho\,y \quad \overset{\text{деф}}{\Longleftrightarrow} \quad \text{збир цифара броја } y \text{ дели збир цифара броја } x.$$

а) Представити дату релацију таблично и преко графа.

б) Да ли је дата релација рефлексивна, симетрична, антисиметрична, транзитивна?

в) Испитати да ли је то релација еквиваленције и/или релација поретка.

г) Уколико је то релација еквиваленције одредити све класе еквиваленције, а уколико је то релација поретка представити је преко Хасеовог дијаграма, испитати да ли је то релација тоталног или парцијалног поретка и одредити минималне, максималне, најмање и највеће елементе скупа X.

Б **I колоквијум из ДМС-а** Б

ФОН, 19.04.2015.

Презиме и име студента **бр. индекса**

1. Пера, Рака, Сава и Тома су 4 студента ФОН-а и свако од њих тренира тачно један спорт – фудбал или рукомет. Дате су следеће реченице:

I Тома и Рака играју фудбал или није тачно да ако Сава игра фудбал онда бар један од Пере и Раке игра фудбал.

II Тома и Сава тренирају исти спорт или ако Рака игра фудбал онда и Сава игра фудбал.

III Обојица Пера и Рака играју фудбал или Сава игра фудбал; Тома и Рака се баве истим спортом.

IV Тома игра рукомет или Рака и Сава тренирају различите спортове.

а) Да ли су ове реченице непротивречне? Да ли међу њима има логички еквивалентних реченица?

б) За сваку исказну формулу $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4$ (редом одговарају I,II,III,IV реченици) одредити једну КНФ или једну ДНФ. Да ли је нека од ових формула таутологија или контрадикција?

в) За кога од њих можете са сигурношћу тврдити којим се спортом бави?

2. Дата је скуповна формула F:

$$(C \setminus A) \cap (C \setminus B) \cup (A \cap B) = C \cup (A \cap B) \setminus (A \vartriangle B),$$

где $A \vartriangle B$ представља симетричну разлику скупова A и B.

а) Представити леву и десну страну формуле F преко Венових дијаграма.

б) Представити F преко исказних формула.

в) Испитати да ли је исказна формула таутологија (тј. да ли је F увек тачна).

г) Представити исказну формулу и њену десну страну у једној СДНФ или једној СКНФ.

3. Одредити истинитосну вредност формуле

$$(\forall x)\Big(\beta(x,y) \wedge (\exists y)\,\alpha\big(f(x,y),z\big) \;\Leftrightarrow\; (\exists y)\,\alpha\big(y,f(x,z)\big) \vee \beta(z,a)\Big),$$

где је a симбол константе, α и β бинарни релацијски знаци, f бинарни функцијски (операцијски) знак, при интерпретацији $\mathcal{D} = \mathcal{P}(A)$, $a\colon \emptyset$, $\alpha\colon\ =$, $\beta\colon\ \subseteq$, $f\colon \cup$, у зависности од валуације слободних промењљивих.

4. Означимо са $zcb(t)$ збир цифара броја t. Нека је дат скуп $X = \{1,4,8,10,11,13\}$ и на њему релација $\varrho \subseteq X^2$ дата са

$$\varrho:\ x\,\varrho\,y \quad \overset{\text{деф}}{\Longleftrightarrow} \quad \text{број 6 дели } zcb(x^2) - zcb(y^2).$$

а) Представити дату релацију таблично и преко графа.

б) Да ли је дата релација рефлексивна, симетрична, антисиметрична, транзитивна?

в) Испитати да ли је то релација еквиваленције и/или релација поретка.

г) Уколико је то релација еквиваленције одредити све класе еквиваленције, а уколико је то релација поретка представити је преко Хасеовог дијаграма, испитати да ли је то релација тоталног или парцијалног поретка и одредити минималне, максималне, најмање и највеће елементе скупа X.

Г

I колоквијум из ДМС-а
ФОН, 19.04.2015.

Г

Презиме и име студента — **бр. индекса**

1. Маја, Нина и Оља су 3 студенткиње ФОН-а и свака од њих тренира тачно један спорт – кошарку или одбојку. Дате су следеће реченице:

I Маја и Оља тренирају исти спорт или ако Нина игра кошарку онда Оља игра кошарку.

II Обе Маја и Нина играју кошарку или Оља игра кошарку; Маја и Нина се баве истим спортом.

III Маја игра одбојку или Нина и Оља тренирају различите спортове.

IV Маја и Нина играју кошарку или није тачно да ако Оља игра кошарку онда бар једна од Маје и Нине игра кошарку.

а) Да ли су ове реченице непротивречне? Да ли међу њима има логички еквивалентних реченица?

б) За сваку исказну формулу $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4$ (редом одговарају I,II,III,IV реченици) одредити једну КНФ или једну ДНФ. Да ли је нека од ових формула таутологија или контрадикција?

в) За кога од њих можете са сигурношћу тврдити којим се спортом бави?

2. Дата је скуповна формула F:

$$(A \triangle B \setminus D) \cup (B \cap C) \subseteq A \cup C \cup (B \cap D),$$

где $A \triangle B$ представља симетричну разлику скупова A и B.

а) Представити леву и десну страну формуле F преко Венових дијаграма.

б) Представити F преко исказних формула.

в) Испитати да ли је исказна формула таутологија (тј. да ли је F увек тачна).

г) Представити исказну формулу и њену десну страну у једној СДНФ или једној СКНФ.

3. Одредити истинитосну вредност формуле

$$(\forall x)\Big(\beta(x,y) \wedge (\exists y)\,\alpha\big(f(x,y),z\big) \;\Leftrightarrow\; (\exists y)\,\alpha\big(x,f(y,z)\big) \vee \beta(z,a)\Big),$$

где је a симбол константе, α и β бинарни релацијски знаци, f бинарни функцијски (операцијски) знак, при интерпретацији $\mathcal{D} = \mathbb{N}_0$, $a\colon 7$, $\alpha\colon =$, $\beta\colon \geqslant$, $f\colon -$ у зависности од валуације слободних промењљивих.

4. Нека је дат скуп $X = \{4, 11, 39, 100, 102, 221\}$ и на њему релација $\varrho \subseteq X^2$ дата са

$$\varrho:\; x\,\varrho\,y \quad \overset{\text{деф}}{\Longleftrightarrow} \quad \text{збир цифара броја } x \text{ дели збир цифара броја } y.$$

а) Представити дату релацију таблично и преко графа.

б) Да ли је дата релација рефлексивна, симетрична, антисиметрична, транзитивна?

в) Испитати да ли је то релација еквиваленције и/или релација поретка.

г) Уколико је то релација еквиваленције одредити све класе еквиваленције, а уколико је то релација поретка представити је преко Хасеовог дијаграма, испитати да ли је то релација тоталног или парцијалног поретка и одредити минималне, максималне, најмање и највеће елементе скупа X.

Д # I колоквијум из ДМС-а Д

ФОН, 19.04.2015.

Презиме и име студента **бр. индекса**

1. Јоца, Коле и Лале су 3 студента ФОН-а и свако од њих тренира тачно један спорт – фудбал или рукомет. Дате су следеће реченице:

I Обојица Јоца и Коле играју фудбал или Лале игра фудбал; Јоца и Коле се баве истим спортом.

II Јоца игра рукомет или Коле и Лале тренирају различите спортове.

III Јоца и Коле играју фудбал или није тачно да ако Лале игра фудбал онда бар један од Јоце и Колета игра фудбал.

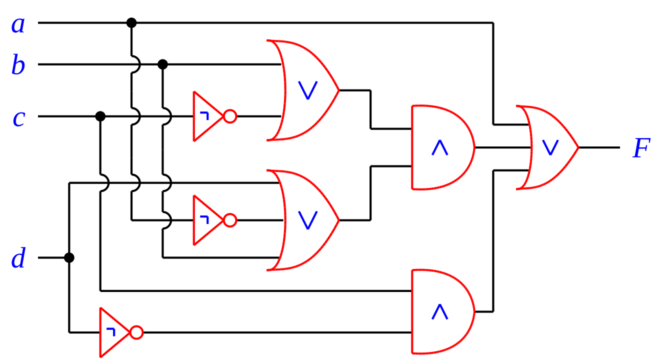
IV Јоца и Лале тренирају исти спорт или ако Коле игра фудбал онда и Лале игра фудбал.

а) Да ли су ове реченице непротивречне? Да ли међу њима има логички еквивалентних реченица?

б) За сваку исказну формулу $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4$ (редом одговарају I,II,III,IV реченици) одредити једну КНФ или једну ДНФ. Да ли је нека од ових формула таутологија или контрадикција?

в) За кога од њих можете са сигурношћу тврдити којим се спортом бави?

2. а) Одредити исказну формулу F која одговара датом колу.



б) Испитати да ли је F таутологија или контрадикција.
в) Да ли F представља СКНФ, СДНФ, КНФ или ДНФ?
г) Представити F у једној КНФ и једној ДНФ.

3. Одредити истинитосну вредност формуле

$$(\forall x)\Big((\exists y)\,\alpha\big(y, f(x,z)\big) \vee \beta(z,a) \;\Rightarrow\; \beta(x,y) \wedge (\exists y)\,\alpha\big(f(x,y),z\big)\Big),$$

где је a симбол константе, α и β бинарни релацијски знаци, f бинарни функцијски (операцијски) знак, при интерпретацији $\mathcal{D} = \mathcal{P}(A)$, $a\colon \emptyset$, $\alpha\colon =$, $\beta\colon \subseteq$, $f\colon \cup$, у зависности од валуације слободних променљивих.

4. Нека је дат скуп $X = \{6, 18, 22, 29, 61, 64\}$ и на њему релација $\varrho \subseteq X^2$ дата са

$$\varrho:\; x\,\varrho\,y \quad \overset{\text{деф}}{\iff} \quad \text{збир цифара броја } x \text{ дели збир цифара броја } y.$$

а) Представити дату релацију таблично и преко графа.

б) Да ли је дата релација рефлексивна, симетрична, антисиметрична, транзитивна?

в) Испитати да ли је то релација еквиваленције и/или релација поретка.

г) Уколико је то релација еквиваленције одредити све класе еквиваленције, а уколико је то релација поретка представити је преко Хасеовог дијаграма, испитати да ли је то релација тоталног или парцијалног поретка и одредити минималне, максималне, најмање и највеће елементе скупа X.

Решења групе А

1. а) a = „Ана тренира кошарку“ ($\neg a$ = „Ана тренира одбојку“), b = „Бока тренира кошарку“, c = „Цеца тренира кошарку“, d = „Дана тренира кошарку“.

$\mathrm{I} = \neg d \vee (b \veebar c)$, $\varphi = \mathrm{II} = d \wedge b \vee \neg(c \Rightarrow a \vee b)$, $\mathrm{III} = (d \Leftrightarrow c) \vee (b \Rightarrow c)$, $\mathrm{IV} = a \wedge b \vee c \wedge (d \Leftrightarrow b)$,

$F = \mathrm{I} \wedge \mathrm{II} \wedge \mathrm{III} \wedge \mathrm{IV}$.

						I	p		q		II	r	s	III		t	v	IV	
a	b	c	d	$\neg d$	$b \veebar c$	$\neg d \vee (b \veebar c)$	$d \wedge b$	$a \vee b$	$c \Rightarrow a \vee b$	$\neg q$	$p \vee \neg q$	$d \Leftrightarrow c$	$b \Rightarrow c$	$r \vee s$	$a \wedge b$	$a \wedge b \vee c$	$d \Leftrightarrow b$	$t \wedge v$	F
0	0	0	0	1	0	1	0	0	1	0	0	1	1	1	0	0	1	0	0
0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0
0	0	1	0	1	1	1	0	0	0	1	1	0	1	1	0	1	1	1	1
0	0	1	1	0	1	1	0	0	0	1	1	1	1	1	0	1	0	0	0
0	1	0	0	1	1	1	0	1	1	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0
0	1	0	1	0	1	1	1	1	1	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0
0	1	1	0	1	0	1	0	1	1	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0
0	1	1	1	0	0	0	1	1	1	0	1	1	1	1	0	1	1	1	0
1	0	0	0	1	0	1	0	1	1	0	0	1	1	1	0	0	1	0	0
1	0	0	1	0	0	0	0	1	1	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0
1	0	1	0	1	1	1	0	1	1	0	0	0	1	1	0	1	1	1	0
1	0	1	1	0	1	1	0	1	1	0	0	1	1	1	0	1	0	0	0
1	1	0	0	1	1	1	0	1	1	0	0	1	0	1	1	1	0	0	0
1	1	0	1	0	1	1	1	1	1	0	1	0	0	0	1	1	1	1	0
1	1	1	0	1	0	1	0	1	1	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0
1	1	1	1	0	0	0	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	0

Изјаве су непротивречне (има једна 1 у последњој колони F).

Како међу колонама у таблици које одговарају I, II, III и IV реченици нема две исте, то су међу датим реченицама нема логички еквивалентних.

б) Ниједна од ових формула није ни таутологија ни контрадикција (јер се у колонама које одговарају њима јављају и 1 и 0).

СКНФ: $\varphi_1 = (a \vee b \vee c \vee \neg d) \wedge (a \vee \neg b \vee \neg c \vee \neg d) \wedge (\neg a \vee b \vee c \vee \neg d) \wedge (\neg a \vee \neg b \vee \neg c \vee \neg d)$.

За КНФ можемо узети горњу СКНФ, али и једноставнији израз: $\varphi_1 = (b \vee c \vee \neg d) \wedge (\neg b \vee \neg c \vee \neg d)$.

СДНФ: $\varphi_2 = (\neg a \wedge \neg b \wedge c \wedge \neg d) \vee (\neg a \wedge \neg b \wedge c \wedge d) \vee (\neg a \wedge b \wedge \neg c \wedge \neg d) \vee (\neg a \wedge b \wedge c \wedge \neg d) \vee (a \wedge b \wedge \neg c \wedge \neg d) \vee (a \wedge b \wedge c \wedge \neg d)$.

За ДНФ можемо узети горњу СДНФ, али и једноставнији израз: $\varphi_2 = (\neg a \wedge \neg b \wedge c) \vee (b \wedge d)$.

СКНФ: $\varphi_3 = (a \vee \neg b \vee \neg c \vee d) \wedge (\neg a \vee \neg b \vee c \vee \neg d)$.

За КНФ ћемо узети горњу СКНФ.

СДНФ: $\varphi_4 = (\neg a \wedge \neg b \wedge c \wedge \neg d) \vee (\neg a \wedge b \wedge c \wedge \neg d) \vee (a \wedge \neg b \wedge c \wedge \neg d) \vee (a \wedge b \wedge \neg c \wedge \neg d) \vee (a \wedge b \wedge c \wedge \neg d)$.

За ДНФ ћемо узети горњу СДНФ.

в) Како је $F = 1$ само у случају $a = b = d = 0$ и $c = 1$, добијамо да Ана, Бока и Дана тренирају одбојку, а Цеца кошарку.

2. а) $F = a \wedge \big((c \wedge \neg b) \vee (c \wedge \neg a \wedge b)\big) \wedge (b \vee \neg c)$ која одговара датом колу.

б) F није таутологија (у последњој колони има 0), али јесте контрадикција (јер су све 0).

						p	q	II	III	F
a	b	c	$\neg a$	$\neg b$	$\neg c$	$c \wedge \neg b$	$c \wedge \neg a \wedge b$	$p \vee q$	$b \vee \neg c$	$a \wedge \mathrm{II} \wedge \mathrm{III}$
0	0	0	1	1	1	0	0	0	1	0
0	0	1	1	1	0	1	0	1	0	0
0	1	0	1	0	1	0	0	0	1	0
0	1	1	1	0	0	0	1	1	1	0
1	0	0	0	1	1	0	0	0	1	0
1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	0
1	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0
1	1	1	0	0	0	0	0	0	1	0

в) F не представља ни КНФ, ни ДНФ (самим тим ни СКНФ ни СДНФ), јер је средњи део ове формуле једна формула у ДНФ $\big((c \wedge \neg b) \vee (c \wedge \neg a \wedge b)\big)$ спојена коњункцијама са литералом a и дисјунктом $(b \vee \neg c)$.

г) Како је F идентички једнака 0, она нема СДНФ, али има и КНФ и ДНФ.
Како је $F = 0$, можемо узети да је $F = a \wedge \neg a$, што је и КНФ као конјункција дисјунката (литерала) и ДНФ јер конјункт.

3. Формула је $\underline{(\forall x \in \mathbb{N})}\Big(\underline{(\exists y \in \mathbb{N})}\, x = y - z \vee z \geqslant 4 \;\Rightarrow\; x \geqslant y \wedge \underline{(\exists y \in \mathbb{N})}\, x - y = z\Big)$,

Ту су црвено означене везане променљиве, а плаво слободне променљиве, па је формула облика $F(y, z)$.

Формула $(\exists y \in \mathbb{N})\, x = y - z$ је увек тачна (1), јер за све природне бројеве x и z постоји природан број $y = x + z$.
Формула $(\exists y \in \mathbb{N})\, x - y = z$ еквивалентна је са $x > z$, јер је $y = x - z \in \mathbb{N}$ (и тад постоји) само ако је $x > z$.

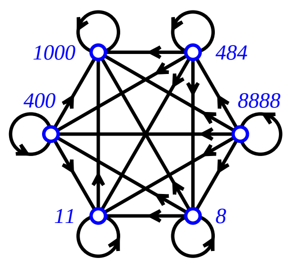
Како је $1 \vee p = 1$, формула у загради се своди на $1 \;\Rightarrow\; x \geqslant y \wedge x > z$, што је исто што и $x \geqslant y \wedge x > z$.

Даље, полазна формула $F = (\forall x \in \mathbb{N})\, x \geqslant y \wedge x > z$ је нетачна, јер за $x = 1$ имамо да $x = 1 > z \in \mathbb{N}$ није тачно, тј. $v(F) = 0$

4. За дате бројеве је збир цифара: $zcb(8) = 8$, $zcb(11) = 2$, $zcb(400) = 4$, $zcb(484) = 16$, $zcb(1000) = 1$, $zcb(8888) = 32$. Обратите пажњу да збир цифара другог броја y треба да дели збир цифара првог броја x, тј. $zbc(y) \mid zbc(x)$.

а)

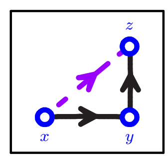
ϱ	8	11	400	484	1000	8888
8	1	1	1	0	1	0
11	0	1	0	0	1	0
400	0	1	1	0	1	0
484	1	1	1	1	1	0
1000	0	0	0	0	1	0
8888	1	1	1	1	1	1

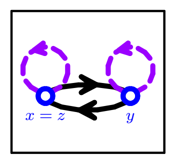


б) Јесте **Р** јер сваки збир цифара дели самог себе, а и на главној дијагонали таблице имамо све 1, а и у графу око сваког чвора има петља.

Није **С**, јер $8 \,\varrho\, 11 \;\Rightarrow\; 11 \,\varrho\, 8$ ↯.

Јесте **АС**, јер међу елементима симетричним у односу на главну дијагоналу таблице нема две 1, а и између свака 2 различита чвора у графу постоји или 0 или 1 грана.

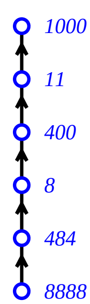
Јесте **Т** (јер у графу нема ниједне од 2 ситуације које кваре **Т**: 



).

г) Није релација еквиваленције, јер није **С**. Јесте релација поретка, јер је **Р**, **АС** и **Т**.

д) Ово је релација тоталног поретка, јер њен Хасеов дијаграм приказан на наредној слици јесте ланац. Такође, исти закључак можемо добити јер су свака 2 различита чвора спојена тачно 1 граном.



Најмањи елемент је 8888, јер је он у релацији са свим осталим (у таблици у врсти која одговара 8888 су све 1; у графу из 8888 води грана у све чворове; на Хасеовом дијаграму из 8888 води пут у све остале чворове), па је он и једини минимални елемент.

Највећи елемент је 1000, јер је са њим у релацији сви остали (у таблици у врсти која одговара 1000 су све 1; у графу у 1000 води грана из свих чворова; на Хасеовом дијаграму у 1000 води пут из свих осталих чворове), па је он и једини максимални елемент.

Решења групе Б

1. а) p = „Пера тренира фудбал“ $(\neg p$ = „Пера тренира рукомет“), r = „Рака тренира фудбал“, s = „Сава тренира фудбал“, t = „Тома тренира фудбал“.

$\varphi = \mathrm{I} = t \wedge r \vee \neg(s \Rightarrow p \vee r)$, $\mathrm{II} = (t \Leftrightarrow s) \vee (r \Rightarrow s)$, $\mathrm{III} = p \wedge r \vee s \wedge (t \Leftrightarrow r)$, $\mathrm{IV} = \neg t \vee (r \veebar s)$,

$F = \mathrm{I} \wedge \mathrm{II} \wedge \mathrm{III} \wedge \mathrm{IV}$.

				a		b		I	c	d	II		e	f	III			IV	
p	r	s	t	$t\wedge r$	$p\vee r$	$s\Rightarrow p\vee r$	$\neg b$	$a\vee\neg b$	$t\Leftrightarrow s$	$r\Rightarrow s$	$c\vee d$	$p\wedge r$	$p\wedge r\vee s$	$t\Leftrightarrow r$	$e\wedge f$	$\neg t$	$r\veebar s$	$\neg t\vee(r\veebar s)$	F
0	0	0	0	0	0	1	0	0	1	1	1	0	0	1	0	1	0	1	0
0	0	0	1	0	0	1	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0	0	1	1	0	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1
0	0	1	1	0	0	0	1	1	1	1	1	0	1	0	0	0	1	1	0
0	1	0	0	0	1	1	0	0	1	0	1	0	0	0	0	1	1	1	0
0	1	0	1	1	1	1	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	1	0
0	1	1	0	0	1	1	0	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	1	0
0	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	0	1	1	1	0	0	0	0
1	0	0	0	0	1	1	0	0	1	1	1	0	0	1	0	1	0	1	0
1	0	0	1	0	1	1	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	0	0	1	1	0	0	0	1	1	0	1	1	1	1	1	1	0
1	0	1	1	0	1	1	0	0	1	1	1	0	1	0	0	0	1	1	0
1	1	0	0	0	1	1	0	0	1	0	1	1	1	0	0	1	1	1	0
1	1	0	1	1	1	1	0	1	0	0	0	1	1	1	1	0	1	1	0
1	1	1	0	0	1	1	0	0	0	1	1	1	1	0	0	1	0	1	0
1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0

Изјаве су непротивречне (има бар једна 1 у последњој колони, тј. има две 1 у F).

Како међу колонама у таблици које одговарају I, II, III и IV реченици нема две исте, то су међу датим реченицама нема логички еквивалентних.

б) Ниједна од ових формула није ни таутологија ни контрадикција (јер се у колонама које одговарају њима јављају и 1 и 0).

СДНФ: $\varphi_1 = (\neg p \wedge \neg r \wedge s \wedge \neg t) \vee (\neg p \wedge \neg r \wedge s \wedge t) \vee (\neg p \wedge r \wedge \neg s \wedge \neg t) \vee (\neg p \wedge r \wedge s \wedge \neg t) \vee (p \wedge r \wedge \neg s \wedge \neg t) \vee (p \wedge r \wedge s \wedge \neg t)$.

За ДНФ можемо узети горњу СДНФ, али и једноставнији израз: $\varphi_1 = (\neg p \wedge \neg r \wedge s) \vee (r \wedge t)$.

СКНФ: $\varphi_2 = (p \vee \neg r \vee \neg s \vee t) \wedge (\neg p \vee \neg r \vee s \vee \neg t)$.

За КНФ ћемо узети горњу СКНФ.

СДНФ: $\varphi_3 = (\neg p \wedge \neg r \wedge s \wedge \neg t) \vee (\neg p \wedge r \wedge s \wedge \neg t) \vee (p \wedge \neg r \wedge s \wedge \neg t) \vee (p \wedge r \wedge \neg s \wedge \neg t) \vee (p \wedge r \wedge s \wedge \neg t)$.

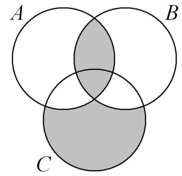
За ДНФ ћемо узети горњу СДНФ.

СКНФ: $\varphi_4 = (p \vee r \vee s \vee \neg t) \wedge (p \vee \neg r \vee \neg s \vee \neg t) \wedge (\neg p \vee r \vee s \vee \neg t) \wedge (\neg p \vee \neg r \vee \neg s \vee \neg t)$.

За КНФ можемо узети горњу СКНФ, али и једноставнији израз: $\varphi_4 = (r \vee s \vee \neg t) \wedge (\neg r \vee \neg s \vee \neg t)$.

в) Како је $F = 1$ само у случају $p = r = t = 0$ и $s = 1$, добијамо да Пера, Рака и Тома тренирају рукомет, а Сава фудбал.

2. а) И лева и десна страна скуповне формуле F се исто представљају преко Венових дијаграма:



б) $a = x \in A \quad (\neg a = x \notin A), \quad b = x \in B, \quad c = x \in C$: $\qquad (c \wedge \neg a) \wedge (c \wedge \neg b) \vee (a \wedge b) \;\Leftrightarrow\; c \vee (a \wedge b) \wedge \neg(a \veebar b)$.

в) F је увек тачна, јер је одговарајућа исказна формула φ таутологија (у последњој колони су све 1).

					p	q	r		L		s		D	φ
a	b	c	$\neg a$	$\neg b$	$c \wedge \neg a$	$c \wedge \neg b$	$a \wedge b$	$p \wedge q$	$p \wedge q \vee r$	$c \vee r$	$a \veebar b$	$\neg s$	$c \vee r \wedge \neg s$	$L \Leftrightarrow D$
0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1
0	0	1	1	1	1	1	0	1	1	1	0	1	1	1
0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1
0	1	1	1	0	1	0	0	0	0	1	1	0	0	1
1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1
1	0	1	0	1	0	1	0	0	0	1	1	0	0	1
1	1	0	0	0	0	0	1	0	1	1	0	1	1	1
1	1	1	0	0	0	0	1	0	1	1	0	1	1	1

г) $D = (\neg a \wedge \neg b \wedge c) \vee (a \wedge b \wedge \neg c) \vee (a \wedge b \wedge c)$.

φ нема СКНФ (јер нема 0), али има СДНФ: $\varphi = (\neg a \wedge \neg b \wedge \neg c) \vee (\neg a \wedge \neg b \wedge c) \vee (\neg a \wedge b \wedge \neg c) \vee (\neg a \wedge b \wedge c) \vee (a \wedge \neg b \wedge \neg c) \vee (a \wedge \neg b \wedge c) \vee (a \wedge b \wedge \neg c) \vee (a \wedge b \wedge c)$.

3. Формула је $\underline{(\forall x \subseteq A)}\Big(x \subseteq y \wedge \underline{(\exists y \subseteq A)}\, x \cup y = z \;\Leftrightarrow\; \underline{(\exists y \subseteq A)}\, y = x \cup z \vee z \subseteq \emptyset\Big)$,

Ту су црвено означене везане променљиве, а плаво слободне променљиве, па је формула облика $F(y, z)$.

Формула $(\exists y \subseteq A)\, x \cup y = z$ еквивалентна је са $x \subseteq z$ (ако је $x \subseteq z$ онда можемо узети $y = z$, а ако је $x \not\subseteq z$, онда постоји елемент $m \in x$, такав да $m \notin z$, али онда је $m \in x \cup y$, па не важи $x \cup y = z$ ни за једно y).
Формула $(\exists y \subseteq A)\, y = x \cup z$ је увек тачна (1), јер за фиксиране x и z увек постоји и њихова унија $x \cup z$.

Како је $1 \vee p = 1$, формула у загради се своди на $x \subseteq y \wedge x \subseteq z \;\Leftrightarrow\; 1$, што је исто што и $x \subseteq y \wedge x \subseteq z$.

Даље, полазна формула $F = (\forall x \subseteq A)\, x \subseteq y \wedge x \subseteq z$ је тачна за све $x \subseteq A$ ако и само ако је $y = z = A$, тј.

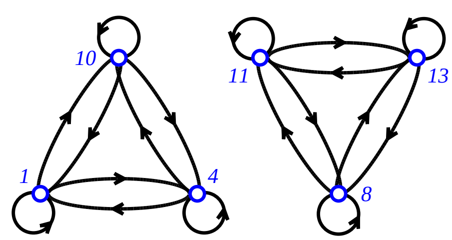
$$v(F) = \begin{cases} 1, & y = A,\ z = A \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases} = \begin{cases} 1, & y = A,\ z = A \\ 0, & y \neq A \\ 0, & z \neq A \end{cases}$$

Када је $A = \emptyset$ формула F је увек тачна, тј. $v(F) = 1$.

4. За дате бројеве је збир цифара њихових квадрата: $zcb(1^2) = 1$, $zcb(4^2) = 1 + 6 = 7$, $zcb(8^2) = 6 + 4 = 10$, $zcb(10^2) = 1 + 0 + 0 = 1$, $zcb(11^2) = 1 + 2 + 1 = 4$, $zcb(13^2) = 1 + 6 + 9 = 16$. Даље, посматрамо разлике ових бројева и оне треба да су дељиве са 6.

а)

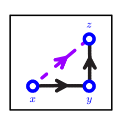
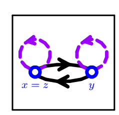
ϱ	1	4	8	10	11	13
1	1	1	0	1	0	0
4	1	1	0	1	0	0
8	0	0	1	0	1	1
10	1	1	0	1	0	0
11	0	0	1	0	1	1
13	0	0	1	0	1	1



б) Јесте **P** јер $6 \mid 0$, а и на главној дијагонали таблице имамо све 1, а и у графу око сваког чвора има петља.

Јесте **C**, јер су елементи симетрични у односу на главну дијагоналу таблице међусобно једнаки, а и између свака 2 различита чвора у графу постоји или 0 или 2 гране.

Није **AC**, јер $1 \,\varrho\, 4,\ 4 \,\varrho\, 1 \;\Rightarrow\; 1 = 4$ ↯.

Јесте **T** (јер у графу нема ниједне од 2 ситуације које кваре **T**:  ).

в) Није релација поретка, јер није **AC**. Јесте релација еквиваленције, јер је **P**, **C** и **T**.

г) Релација има 2 класе еквиваленције: $\qquad [1] = [4] = [10] = \{1, 4, 10\}$ и $[8] = [11] = [13] = \{8, 11, 13\}$.

Решења групе Г

1. а) $m =$ „Маја тренира кошарку“ $\quad (\neg m =$ „Маја тренира одбојку“$)$, $\qquad n =$ „Нина тренира кошарку“, $o =$ „Оља тренира кошарку“.

$\mathrm{I} = (m \Leftrightarrow o) \vee (n \Rightarrow o)$, $\quad \mathrm{II} = m \wedge n \vee o \wedge (m \Leftrightarrow n)$, $\quad \mathrm{III} = \neg m \vee (n \veebar o)$, $\quad \varphi = \mathrm{IV} = m \wedge n \vee \neg(o \Rightarrow m \vee n)$, $F = \mathrm{I} \wedge \mathrm{II} \wedge \mathrm{III} \wedge \mathrm{IV}$.

			r	s	I		t	v	II			III	p		q		IV	
m	n	o	$m \Leftrightarrow o$	$n \Rightarrow o$	$r \vee s$	$m \wedge n$	$m \wedge n \vee o$	$d \Leftrightarrow b$	$t \wedge v$	$\neg m$	$n \veebar o$	$\neg m \vee (n \veebar o)$	$m \wedge n$	$m \vee n$	$o \Rightarrow m \vee n$	$\neg q$	$p \vee \neg q$	F
0	0	0	1	1	1	0	0	1	0	1	0	1	0	0	1	0	0	0
0	0	1	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0
0	1	0	0	1	1	0	1	1	1	1	1	1	0	0	0	1	1	1
0	1	1	1	1	1	0	1	0	0	0	1	1	0	0	0	1	1	0
1	0	0	1	0	1	0	0	0	0	1	1	1	0	1	1	0	0	0
1	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	1	1	1	1	0	1	0
1	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	1	0	1	1	0	0	0
1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	0	0	0	1	1	1	0	1	0

Изјаве су непротивречне (има једна 1 у последњој колони F).

Како међу колонама у таблици које одговарају I, II, III и IV реченици нема две исте, то су међу датим реченицама нема логички еквивалентних.

б) Ниједна од ових формула није ни таутологија ни контрадикција (јер се у колонама које одговарају њима јављају и 1 и 0).

СКНФ: $\quad \varphi_1 = (\neg m \vee \neg n \vee o)$. $\qquad$ За КНФ ћемо узети горњу СКНФ.

СДНФ: $\quad \varphi_2 = (\neg m \wedge n \wedge \neg o) \vee (m \wedge n \wedge o)$. $\qquad$ За ДНФ ћемо узети горњу СДНФ.

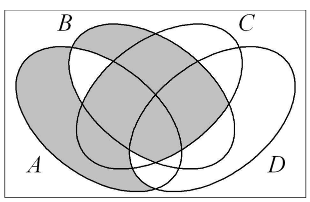
СКНФ: $\quad \varphi_3 = (m \vee n \vee \neg o) \wedge (\neg m \vee \neg n \vee \neg o)$. $\qquad$ За КНФ ћемо узети горњу СКНФ.

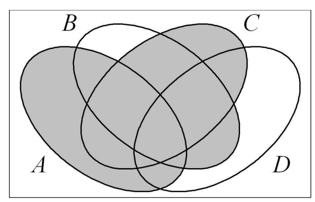
СДНФ: $\quad \varphi_4 = (\neg m \wedge n \wedge \neg o) \vee (\neg m \wedge n \wedge o) \vee (m \wedge \neg n \wedge o) \vee (m \wedge n \wedge o)$.

За ДНФ можемо узети горњу СДНФ, али и једноставнији израз: $\qquad \varphi_4 = (\neg m \wedge n) \vee (m \wedge o)$.

в) Како је $F = 1$ само за $m = o = 0$ и $n = 1$, добијамо да Маја и Оља тренирају одбојку, а Нина кошарку.

2. а) Лево доле је приказана лева страна $(A \triangle B \setminus D) \cup (B \cap C)$ скуповне формуле F), а десно је приказана десна страна $A \cup C \cup (B \cap D)$.





б) $a = x \in A$, $\quad b = x \in B$, $\quad c = x \in C$, $\quad d = x \in D$:

$\varphi: \qquad (a \veebar b) \wedge \neg d \vee (b \wedge c) \;\Rightarrow\; a \vee c \vee (b \wedge d)$.

в) Исказна формула φ није таутологија (у последњој колони има једна 0).

						p	q	L		D	φ
a	b	c	d	$a \veebar b$	$\neg d$	$(a \veebar b) \wedge \neg d$	$b \wedge c$	$p \vee q$	$b \wedge d$	$a \vee c \vee (b \wedge d)$	$L \Rightarrow D$
0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1
0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1
0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	1	1
0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	1	1
0	1	0	0	1	1	1	0	1	0	0	0
0	1	0	1	1	0	0	0	0	1	1	1
0	1	1	0	1	1	1	1	1	0	1	1
0	1	1	1	1	0	0	1	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	1	0	1	0	1	1
1	0	0	1	1	0	0	0	0	0	1	1
1	0	1	0	1	1	1	0	1	0	1	1
1	0	1	1	1	0	0	0	0	0	1	1
1	1	0	0	0	1	0	0	0	0	1	1
1	1	0	1	0	0	0	0	0	1	1	1
1	1	1	0	0	1	0	1	1	0	1	1
1	1	1	1	0	0	0	1	1	1	1	1

г) Исказну формулу φ представимо у СКНФ (јер има три 0):

$\varphi = (a \vee b \vee c \vee d) \wedge (a \vee b \vee c \vee \neg d) \wedge (a \vee \neg b \vee c \vee d)$.

Десну страну D представимо у СКНФ (јер има само једна 0): $\qquad D = a \vee \neg b \vee c \vee d$.

3. Формула је $\underline{(\forall x \in \mathbb{N}_0)}\Big(x \geqslant y \wedge \underline{(\exists y \in \mathbb{N}_0)}\, x - y = z \;\Leftrightarrow\; \underline{(\exists y \in \mathbb{N}_0)}\, x = y - z \vee z \geqslant 7\Big)$,

Ту су црвено означене везане променљиве, а плаво слободне променљиве, па је формула облика $F(y, z)$.

Формула $(\exists y \in \mathbb{N}_0)\, x - y = z$ еквивалентна је са $x \geqslant z$ (ако је $x \geqslant z$ онда можемо узети $y = x - z \in \mathbb{N}_0$, а ако је $x < z$, онда $y = x - z \notin \mathbb{N}_0$).
Формула $(\exists y \in \mathbb{N}_0)\, x = y - z$ је увек тачна (1), јер за све природне бројеве са нулом x и z постоји њихов збир $y = x + z$ и он је такође природан број или нула.

Како је $1 \vee p = 1$, формула у загради се своди на $x \geqslant y \wedge x \geqslant z \;\Leftrightarrow\; 1$, што је исто што и $x \geqslant y \wedge x \geqslant z$.

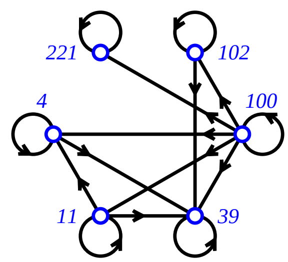
Даље, полазна формула $F = (\forall x \in \mathbb{N}_0)\, x \geqslant y \wedge x \geqslant z$ је тачна за све $x \in \mathbb{N}_0$ ако и само ако је $y = z = 0$, тј.

$$v(F) = \begin{cases} 1, & y = 0,\ z = 0 \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases} = \begin{cases} 1, & y = 0,\ z = 0 \\ 0, & y > 0 \\ 0, & z > 0 \end{cases}$$

4. За дате бројеве је збир цифара: $zcb(4) = 4$, $zcb(11) = 2$, $zcb(39) = 12$, $zcb(100) = 1$, $zcb(102) = 3$, $zcb(221) = 5$.

а)

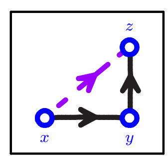
ϱ	4	11	39	100	102	221
4	1	0	1	0	0	0
11	1	1	1	0	0	0
39	0	0	1	0	0	0
100	1	1	1	1	1	1
102	0	0	1	0	1	0
221	0	0	0	0	0	1

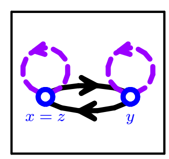


б) Јесте **P** јер сваки збир цифара дели самог себе, а и на главној дијагонали таблице имамо све 1, а и у графу око сваког чвора има петља.

Није **C**, јер $4 \,\varrho\, 39 \;\Rightarrow\; 39 \,\varrho\, 4$ $\lightning$.

Јесте **AC**, јер међу елементима симетричним у односу на главну дијагоналу таблице нема две 1, а и између свака 2 различита чвора у графу постоји или 0 или 1 грана.

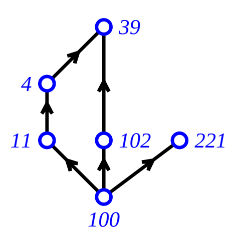
Јесте **T** (јер у графу нема ниједне од 2 ситуације које кваре **T**: 



).

г) Није релација еквиваленције, јер није **C**. Јесте релација поретка, јер је **P**, **AC** и **T**.

д) Ово је релација парцијалног поретка, јер $4 \not\varrho\ 221, 221 \not\varrho\ 4$. Такође, исти закључак можемо добити јер њен Хасеов дијаграм приказан на наредној слици није ланац.



Најмањи елемент је 100, јер је он у релацији са свим осталим (у таблици у врсти која одговара 100 су све 1; у графу из 100 води грана у све чворове; на Хасеовом дијаграму из 100 води пут у све остале чворове), па је он и једини минимални елемент.

Елементи 39 и 221 су максимални, јер сваки од њих није у релацији са неким од осталих (у таблици у врстама које одговарају њима има 1 само на главној дијагонали; у графу из 39 и 221 не води ниједна грана сем петље; у Хасовом дијаграму из 39 и 221 не води ниједна грана), па како има више максималних елемента следи да не постоји највећи.

A **I колоквијум из ДМС-а** **A**

ФОН, 22.04.2014.

______________________________ ______________

Презиме и име студента **бр. индекса**

1. На једном острву живе само виле и вештице. Оне се по спољном изгледу не могу разликовати. Виле увек говоре истину, док вештице увек лажу. Три од њих, Ана, Бана и Цана, су рекле следеће реченице.

Ана: Ако сам ја вила, онда је Цана вештица.

Бана: Ако од друге две бар једна говори истину, онда ја и Цана припадамо различитим врстама.

Цана: Бана је вештица. Ако Ана не лаже, онда и ја не лажем.

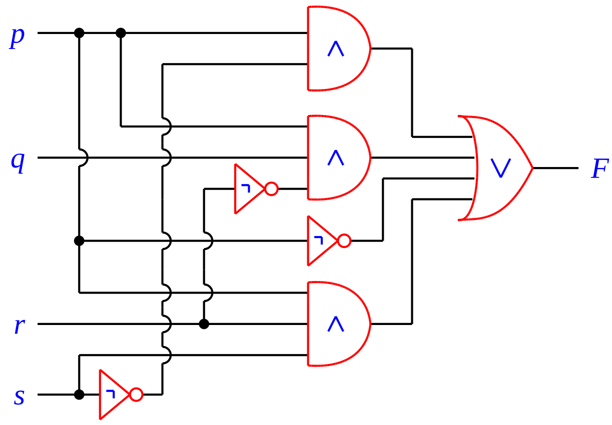
Да ли су ове реченице непротивречне?

За исказну формулу φ која одговара ономе што је рекла Цана одредити једну СКНФ и једну КНФ.

За исказну формулу F којом сте испитали (не)противречност одредити једну СДНФ и једну ДНФ.

За кога од њих са сигурношћу можемо рећи којој врсти припада?

2. Одредити исказну формулу F која одговара датом колу.



Испитати да ли је F таутологија или контрадикција.
Да ли F представља СКНФ, СДНФ, КНФ или ДНФ?
Представити F у једној КНФ и једној ДНФ.

3. Одредити истинитосну вредност формуле

$$(\exists y)\,(\forall x)\,\Big(\alpha(z,a) \Rightarrow \big((\neg\,\alpha(x,y) \wedge \alpha(y,z)) \Rightarrow (\exists z)\,\alpha(f(x,z),y)\big)\Big).$$

где је α бинарни релацијски симбол, при интерпретацији $\mathcal{D} = \mathcal{P}(A)$, $\alpha\colon\ =$, $f\colon\ \cup$, $a\colon\ \emptyset$, у зависности од валуације слободних променљивих.

4. Нека је дат скуп $X = \{dana, gana, grana, zana, mana, strana\}$ и на њему релација $\varrho \subseteq X^2$ дата са

$$\varrho:\ x\,\varrho\,y \quad \overset{\text{деф}}{\iff} \quad \text{речи } x \text{ и } y \text{ имају једнак број сугласника} \quad \text{и} \quad \text{имају исти трословни завршетак.}$$

а) Представити дату релацију таблично и преко графа.

б) Да ли је дата релација рефлексивна, симетрична, антисиметрична, транзитивна?

в) Испитати да ли је то релација еквиваленције и/или релација поретка.

г) Уколико је то релација еквиваленције одредити све класе еквиваленције, а уколико је то релација поретка представити је преко Хасеовог дијаграма, испитати да ли је то релација тоталног или парцијалног поретка и одредити минималне, максималне, најмање и највеће елементе скупа X.

Б **I колоквијум из ДМС-а** **Б**

ФОН, 22.04.2014.

Презиме и име студента **бр. индекса**

1. На једном острву живе патуљци и гноми. По спољном изгледу они се не разликују. Патуљци увек говоре истину, а гноми увек лажу. Три од њих, Ацко, Буцко и Цицко, су рекли следеће реченице.

Ацко: Ја и Цицко припадамо различитим врстама.
Буцко: Ацко је патуљак. Ако Цицко не лаже, онда и ја не лажем.
Цицко: Ако од друге двојице не лажу обојица, онда сам ја гном.

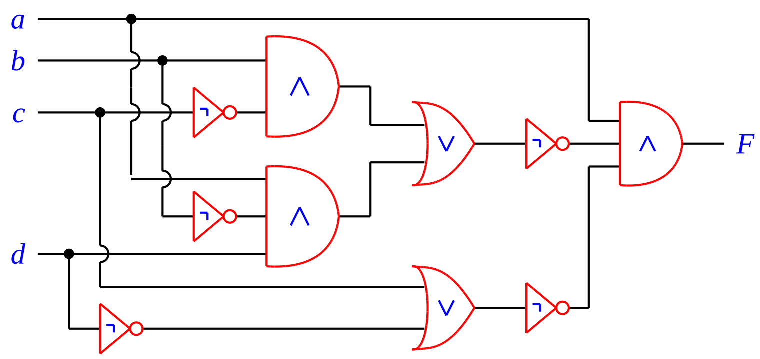
Да ли су ове реченице непротивречне?

За исказну формулу φ која одговара Буцковој реченици одредити једну СКНФ и једну КНФ.

За исказну формулу F којом сте испитали (не)противречност одредити једну СДНФ и једну ДНФ.

За кога од њих са сигурношћу можемо рећи којој врсти припада?

2. Одредити исказну формулу F која одговара датом колу.



Испитати да ли је F таутологија или контрадикција.
Да ли F представља СКНФ, СДНФ, КНФ или ДНФ?
Представити F у једној КНФ и једној ДНФ.

3. Одредити истинитосну вредност формуле

$$(\forall x)\,(\exists y)\Big(\big((\alpha(x,a) \Rightarrow \alpha(x,y)) \Rightarrow \alpha(y,z)\big) \Rightarrow (\exists z)\,\alpha\big(f(y,z),x\big)\Big).$$

где је α бинарни релацијски симбол, a симбол константе, при интерпретацији $\mathcal{D} = \mathbb{N}$, $\alpha\colon\ =$, f је сабирање природних бројева, $a\colon\ 1$, у зависности од валуације слободних променљивих.

4. Нека је дат скуп $X = \{2, 3, 4, 9, 16, 42\}$ и на њему релација $\varrho \subseteq X^2$ дата са

$$\varrho:\ x\,\varrho\,y \quad \overset{\text{деф}}{\iff} \quad x = y^2 \qquad \text{или} \qquad \text{бројеви } x \text{ и } y \text{ имају исти збир цифара.}$$

а) Представити дату релацију таблично и преко графа.

б) Да ли је дата релација рефлексивна, симетрична, антисиметрична, транзитивна?

в) Испитати да ли је то релација еквиваленције и/или релација поретка.

г) Уколико је то релација еквиваленције одредити све класе еквиваленције, а уколико је то релација поретка представити је преко Хасеовог дијаграма, испитати да ли је то релација тоталног или парцијалног поретка и одредити минималне, максималне, најмање и највеће елементе скупа X.

Г **I колоквијум из ДМС-а** **Г**

ФОН, 22.04.2014.

Презиме и име студента **бр. индекса**

1. На једном острву живе патуљци и гноми. По спољном изгледу они се не разликују. Патуљци увек говоре истину, а гноми увек лажу. Три од њих, Ацко, Буцко и Цицко, су рекли следеће реченице.

Ацко: Цицко је гном. Ако Буцко говори истину, онда ја лажем.

Буцко: Ако сам ја патуљак, онда је и Ацко патуљак.

Цицко: Из чињенице да ако Ацко не лаже онда и Буцко не лаже, следи да ја и Ацко припадамо истој врсти.

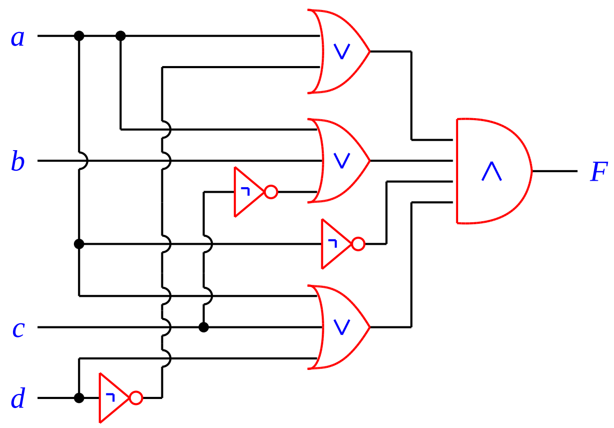
Да ли су ове реченице непротивречне?

За исказну формулу φ која одговара Буцковој реченици одредити једну СКНФ и једну КНФ.

За исказну формулу F којом сте испитали (не)противречност одредити једну СДНФ и једну ДНФ.

За кога од њих са сигурношћу можемо рећи којој врсти припада?

2. Одредити исказну формулу F која одговара датом колу.



Испитати да ли је F таутологија или контрадикција.
Да ли F представља СКНФ, СДНФ, КНФ или ДНФ?
Представити F у једној КНФ и једној ДНФ.

3. Одредити истинитосну вредност формуле

$$(\exists y)\,(\forall x)\left(\alpha(z,a) \Rightarrow \big((\neg\,\alpha(x,y) \wedge \alpha(y,z)) \Rightarrow (\exists z)\,\alpha(f(x,z),y)\big)\right).$$

где је α бинарни релацијски симбол, a симбол константе, при интерпретацији $\mathcal{D} = \mathbb{N}_0$, $\alpha\colon =$, f је одузимање целих бројева, $a\colon 5$, у зависности од валуације слободних променљивих.

4. Нека је дат скуп $X = \{aca, buba, buca, cvet, da, relacija\}$ и на њему релација $\varrho \subseteq X^2$ дата са

$$\varrho:\ x\,\varrho\,y \quad \overset{\text{деф}}{\Longleftrightarrow} \quad \text{речи } x \text{ и } y \text{ имају једнак број самогласника} \qquad \text{и} \qquad \text{реч } x \text{ није дужа од речи } y.$$

а) Представити дату релацију таблично и преко графа.

б) Да ли је дата релација рефлексивна, симетрична, антисиметрична, транзитивна?

в) Испитати да ли је то релација еквиваленције и/или релација поретка.

г) Уколико је то релација еквиваленције одредити све класе еквиваленције, а уколико је то релација поретка представити је преко Хасеовог дијаграма, испитати да ли је то релација тоталног или парцијалног поретка и одредити минималне, максималне, најмање и највеће елементе скупа X.

Д **I колоквијум из ДМС-а** **Д**

ФОН, 22.04.2014.

Презиме и име студента **бр. индекса**

1. На једном острву живе само виле и вештице. Оне се по спољном изгледу не могу разликовати. Виле увек говоре истину, док вештице увек лажу. Три од њих, Ана, Бана и Цана, су рекле следеће реченице.

Ана: Ако од друге две не лажу обе, онда сам ја вила.
Бана: Ја и Ана припадамо истој врсти.
Цана: Бана је вила. Ако Ана лаже, онда ја не лажем.

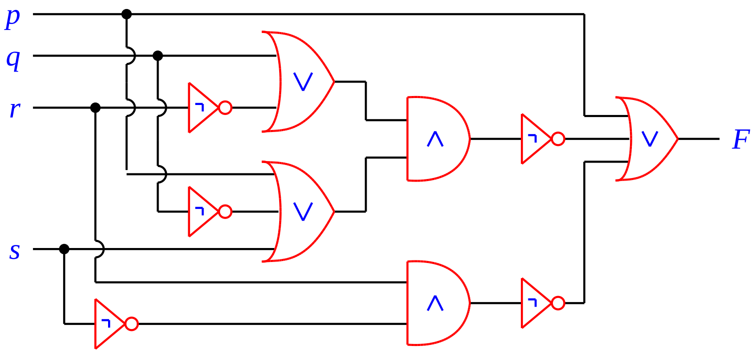
Да ли су ове реченице непротивречне?

За исказну формулу φ која одговара ономе што је рекла Цана одредити једну СКНФ и једну КНФ.

За исказну формулу F којом сте испитали (не)противречност одредити једну СДНФ и једну ДНФ.

За кога од њих са сигурношћу можемо рећи којој врсти припада?

2. Одредити исказну формулу F која одговара датом колу.



Испитати да ли је F таутологија или контрадикција.
Да ли F представља СКНФ, СДНФ, КНФ или ДНФ?
Представити F у једној КНФ и једној ДНФ.

3. Одредити истинитосну вредност формуле

$$(\forall x)\,(\exists y)\,\Big(\big((\alpha(x,a) \Rightarrow \alpha(x,y)) \Rightarrow \alpha(y,z)\big) \Rightarrow (\exists z)\,\alpha\big(f(y,z),x\big) \wedge \neg\,\alpha(x,y)\Big).$$

где је α бинарни релацијски симбол, при интерпретацији $\mathcal{D} = \mathcal{P}(A)$, $\alpha\colon\ =$, $f\colon\ \cup$, $a\colon\ \emptyset$, у зависности од валуације слободних променљивих.

4. Нека је дат скуп $X = \{3, 5, 9, 25, 44, 100\}$ и на њему релација $\varrho \subseteq X^2$ дата са

$$\varrho:\ x\,\varrho\,y \quad \overset{\text{деф}}{\iff} \quad x = y^2 \qquad \text{или} \qquad \text{бројеви } x \text{ и } y \text{ имају исти збир цифара.}$$

а) Представити дату релацију таблично и преко графа.

б) Да ли је дата релација рефлексивна, симетрична, антисиметрична, транзитивна?

в) Испитати да ли је то релација еквиваленције и/или релација поретка.

г) Уколико је то релација еквиваленције одредити све класе еквиваленције, а уколико је то релација поретка представити је преко Хасеовог дијаграма, испитати да ли је то релација тоталног или парцијалног поретка и одредити минималне, максималне, најмање и највеће елементе скупа X.

1. Основни искази су:

$a =$

$b =$

$c =$

Исказне формуле које одговарају датим реченицама су:

А:

Б:

Ц:

Да ли су ове реченице непротивречне (и поступак)?

Једна СКНФ и једна КНФ за φ:

Једна СДНФ и једна ДНФ за F:

За кога од њих са сигурношћу можемо рећи којој врсти припада (и зашто)?

група **Презиме и име студента** **бр. индекса**

2. Исказна формула F која одговара датом колу:

Да ли је F таутологија и/или контрадикција (и поступак)?

Да ли F представља СКНФ, СДНФ, КНФ или ДНФ (и образложења)?

Представити F у једној КНФ и једној ДНФ:

3. Шта су слободне, а шта везане променљиве?

па је формула облика $F(\qquad)$.

Преведена формула:

Истинитосна вредност формуле F (и поступак):

4. а) ϱ таблично и преко графа:

ϱ						

б) Да ли је ϱ рефлексивна, симетрична, антисиметрична, транзитивна (уписати **јесте**/**није** и објаснити)?

Р

С

АС

Т

в) **рел. поретка**

рел. еквиваленције

г) Уколико је ϱ релација еквиваленције одредити све класе еквиваленције, а уколико је то релација поретка представити је преко Хасеовог дијаграма, испитати да ли је то релација тоталног или парцијалног поретка и одредити минималне, максималне, најмање и највеће елементе скупа X.

A **1.** Основни искази су:

$a =$ „Ана је вила“ $=$ „Ана увек говори истину“ $\neg a =$ „Ана је вештица“ $=$ „Ана увек лаже“

$b =$ „Бана је вила“

$c =$ „Цана је вила“

Исказне формуле које одговарају датим реченицама су:

А: $a \Rightarrow \neg c$

Б: $(a \vee c) \Rightarrow (b \veebar c)$

Ц: $\neg b \wedge (a \Rightarrow c)$

Да ли су ове реченице непротивречне (и поступак)?

a	b	c	A	B	φ C	F $A \wedge B \wedge C$	A' $a \Leftrightarrow A$	B' $b \Leftrightarrow B$	C' $c \Leftrightarrow C$	$A' \wedge B' \wedge C'$
0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0
0	0	1	1	1	1	1	0	0	1	0
0	1	0	1	1	0	0	0	1	1	0
0	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	1	0	0	0	1	1	1	1
1	0	1	0	1	1	0	0	0	1	0
1	1	0	1	1	0	0	1	1	1	1
1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0

Како у колони F има 1, дате изјаве су непротивречне.

Једна СКНФ и једна КНФ за φ:

СКНФ (а то је и КНФ): $\varphi = (a \vee \neg b \vee c) \wedge (a \vee \neg b \vee \neg c) \wedge (\neg a \vee b \vee c) \wedge (\neg a \vee \neg b \vee c) \wedge (\neg a \vee \neg b \vee \neg c)$

КНФ: $\varphi = \neg b \wedge (\neg a \vee c)$

Једна СДНФ и једна ДНФ за F:

СДНФ (а то је и ДНФ): $F = (\neg a \wedge \neg b \wedge \neg c) \vee (\neg a \wedge \neg b \wedge c)$

ДНФ: $F = \neg a \wedge \neg b$

За кога од њих са сигурношћу можемо рећи којој врсти припада (и зашто)?

У 3 колоне таблице A', B', C' смо одредили да ли се истинитосна вредност исказа a (тј. b, c) поклапа са A (тј. B, C). Рецимо када је Ана вештица, тј. лаже $a = 0$, онда и њен исказ мора бити лажан $A = 0$, а када је вила, тј. говори истину онда је и $a = 1$ и $A = 1$, па мора бити $a \Leftrightarrow A$. У последњој колони $A' \wedge B' \wedge C'$ када имамо 1 онда се сва три a, b, c поклапају са одговарајућим A, B, C (то смо могли да видимо и без последње 4 колоне у таблици, само посматрајући вредности a, b, c и A, B, C — тако смо радили у Д групи). То се дешава само у два случаја, а за њих имамо да је заједничко $a = 1$ и $c = 0$, па је Ана вила, а Цана вештица, док за Бану ништа не можемо рећи (јер имамо и $b = 0$ и $c = 1$).

Напомена. Велики број студената је тражио шта се поклапа када је $F = 1$, али то је погрешно!

група	**Презиме и име студента**	**бр. индекса**

A **2.** Исказна формула F која одговара датом колу:

$F = (p \wedge \neg s) \vee (p \wedge q \wedge \neg r) \vee \neg p \vee (p \wedge r \wedge s)$

Да ли је F таутологија и/или контрадикција (и поступак)?

				a	b	c	d	F
p	q	r	s	$p \wedge \neg s$	$p \wedge q \wedge \neg r$	$\neg p$	$p \wedge r \wedge s$	$a \vee b \vee c \vee d$
0	0	0	0	0	0	1	0	1
0	0	0	1	0	0	1	0	1
0	0	1	0	0	0	1	0	1
0	0	1	1	0	0	1	0	1
0	1	0	0	0	0	1	0	1
0	1	0	1	0	0	1	0	1
0	1	1	0	0	0	1	0	1
0	1	1	1	0	0	1	0	1
1	0	0	0	1	0	0	0	1
1	0	0	1	0	0	0	0	0
1	0	1	0	1	0	0	0	1
1	0	1	1	0	0	0	1	1
1	1	0	0	1	1	0	0	1
1	1	0	1	0	1	0	0	1
1	1	1	0	1	0	0	0	1
1	1	1	1	0	0	0	1	1

Како се у колони F јавља 0 није таутологија, а како се у колони F јављају 1 није контрадикција.

Да ли F представља СКНФ, СДНФ, КНФ или ДНФ (и образложења)?

Како су чланови у заградама спојени са $\vee$ то дата формула не може бити ни СКНФ ни КНФ.

Како чланови спојени са $\vee$ имају од 1 до 3 променљиве, не могу бити ни СДНФ ни СКНФ (у њима се у сваком том члану јављају све 4 променљиве: p, q, r, s).

Дата формула јесте ДНФ, јер чланови спојени са $\vee$ представљају конјункте (променљиве и њихове негације су спојене са $\wedge$).

Представити F у једној КНФ и једној ДНФ:

СКНФ (а то је и КНФ): $F = \neg p \vee q \vee r \vee \neg s$

горња формула представља и ДНФ, јер литерали $(\neg p, q, r, \neg s)$ представљају и конјункте!

могла је за ДНФ да се узме и СДНФ (али онда треба исписати све чланове):

$$F = (\neg p \wedge \neg q \wedge \neg r \wedge \neg s) \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge \neg r \wedge s) \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge r \wedge \neg s) \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge r \wedge s) \vee (\neg p \wedge q \wedge \neg r \wedge \neg s) \vee \\ (\neg p \wedge q \wedge \neg r \wedge s) \vee (\neg p \wedge q \wedge r \wedge \neg s) \vee (\neg p \wedge q \wedge r \wedge s) \vee (p \wedge \neg q \wedge \neg r \wedge \neg s) \vee (p \wedge \neg q \wedge r \wedge \neg s) \vee (p \wedge \neg q \wedge r \wedge s) \vee \\ (p \wedge q \wedge \neg r \wedge \neg s) \vee (p \wedge q \wedge \neg r \wedge s) \vee (p \wedge q \wedge r \wedge \neg s) \vee (p \wedge q \wedge r \wedge \neg s)$$

A **3.** Шта су слободне, а шта везане промењиве?

Сва појављивања промењивих x и y су везана, док је само последње z везано, а остала су слободна,

па је формула облика $\quad F(\quad z \quad)$.

Преведена формула:

$$F(z) \quad = \quad (\exists y \subseteq A)\,(\forall x \subseteq A)\,\Big(z = \emptyset \Rightarrow \big((x \neq y \wedge y = z) \Rightarrow (\exists z \subseteq A)\,x \cup z = y\big)\Big)$$

Истинитосна вредност формуле F (и поступак):

Формула $(\exists z \subseteq A)\,x \cup z = y$ је еквивалентна са $x \subseteq y$:

– ако је $x \subseteq y$ онда важи $x \cup y = y$, па за z можемо узети $z = y$, па $(\exists z \subseteq A)\,x \cup z = y$

– ако $x \not\subseteq y$ онда постоји $m \in x$ такав да $m \notin y$, али онда и за било које z важи $m \in x \cup z$, па не може бити $x \twoheadrightarrow \cup z = y$

(или: ако $(\exists z \subseteq A)\,x \cup z = y$, онда је $y = x \cup z$, па је $y \supseteq x$, тј. $x \subseteq y$).

Тиме се дата формула свела на:

$$F \quad = \quad (\exists y \subseteq A)\,(\forall x \subseteq A)\,\Big(z = \emptyset \Rightarrow \big((x \neq y \wedge y = z) \Rightarrow x \subseteq y\big)\Big) \qquad (*)$$

$1^\circ\ A = \emptyset$

Све промењиве могу бити само $x, y, z \subseteq \emptyset$, тј. $x = y = z = \emptyset$, па дата формула (без квантификатора, φ) постаје

$$\varphi \quad = \quad \Big(\emptyset = \emptyset \Rightarrow \big((\emptyset \neq \emptyset \wedge \emptyset = \emptyset) \Rightarrow \emptyset \subseteq \emptyset\big)\Big)$$

тј. $1 \ \Rightarrow\ \big((0 \wedge 1)\ \Rightarrow\ 1\big) = 1\ \Rightarrow\ 1 = 1$, па је $v(\varphi) = 1$, што повлачи да је и у овом случају $v(F) = 1$.

$2^\circ\ A \neq \emptyset$

$v(F) = 1$, јер можемо десну страну последње импликације учинити тачном (тако што постоји $y = A$ за које ће за свако $x \subseteq A$ важити $x \subseteq y$), па како је $p\ \Rightarrow\ 1 = 1$, онда ће и цела формула бити тачна.

Задатак можемо завршити и поједностављивањем израза $(*)$:

Сада ћемо 2 пута искористити формулу за ослобађање од импликације $p\ \Rightarrow\ q = \neg p \vee q$:

$$F \quad = \quad (\exists y \subseteq A)\,(\forall x \subseteq A)\,\Big(z = \emptyset \Rightarrow \big((x \neq y \wedge y = z) \Rightarrow x \subseteq y\big)\Big)$$

$$F \quad = \quad (\exists y \subseteq A)\,(\forall x \subseteq A)\,\Big(z = \emptyset \Rightarrow \big((x = y \vee y \neq z) \vee x \subseteq y\big)\Big)$$

$$F \quad = \quad (\exists y \subseteq A)\,(\forall x \subseteq A)\,\Big(z \neq \emptyset \vee x = y \vee y \neq z \vee x \subseteq y\Big)$$

Када је $x = y$ тачно, онда је и $x \subseteq y$, па се дата формула може поједноставити:

$$F \quad = \quad (\exists y \subseteq A)\,(\forall x \subseteq A)\,\Big(z \neq \emptyset \vee y \neq z \vee x \subseteq y\Big)$$

Како у формули без квантификатора $\varphi = z \neq \emptyset \ \vee\ y \neq z\ \vee\ x \subseteq y$ на део $z \neq \emptyset$ не делује ниједан квантификатор, а на део $y \neq z$ делује само $(\exists y \subseteq A)$, онда квантификаторима можемо проћи кроз F:

$$F \quad = \quad z \neq \emptyset \quad \vee \quad (\exists y \subseteq A)\,y \neq z \quad \vee \quad (\exists y \subseteq A)\,(\forall x \subseteq A)\,x \subseteq y$$

Други део $(\exists y \subseteq A)\,y \neq z$ је тачан (можемо за y узети $y = A \setminus z$ и онда је $A \setminus z = y \neq z$), а и трећи део $(\exists y \subseteq A)\,(\forall x \subseteq A)\,x \subseteq y$ је тачан (можемо за y узети $y = A$ и онда је $x \subseteq y = A$), па формула F постаје:

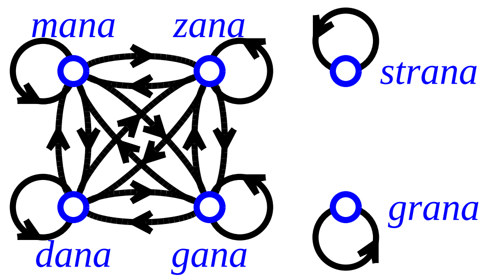
$$F \quad = \quad z \neq \emptyset\ \vee\ 1\ \vee\ 1 \quad = \quad 1.$$

Све речи из X имају исти трословни завршетак, *ana*, па је довољно гледати само први услов да имају једнак број сугласника. Речи *dana*, *gana*, *zana*, *mana* имају 2, реч *grana* има 3, док *strana* има 4 сугласника.

A

4. а) ϱ таблично и преко графа:

ϱ	*dana*	*gana*	*grana*	*zana*	*mana*	*strana*
dana	1	1	0	1	1	0
gana	1	1	0	1	1	0
grana	0	0	1	0	0	0
zana	1	1	0	1	1	0
mana	1	1	0	1	1	0
strana	0	0	0	0	0	1



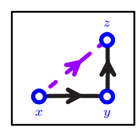
б) Да ли је ϱ рефлексивна, симетрична, антисиметрична, транзитивна (уписати **јесте**/**није** и објаснити)?

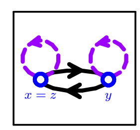
Р ЈЕСТЕ, јер су сви ел. на главној дијагонали једнаки 1 или што око сваког чвора има петља.

С ЈЕСТЕ, јер су сви ел. симетрични у односу на главну дијагоналу једнаки или што између 2 различита чвора има 0 или 2 гране.

АС НИЈЕ, јер $dana\,\varrho\,gana,\ gana\,\varrho\,dana \Rightarrow dana = gana$ ↯

Т ЈЕСТЕ, јер на графу нема ниједне од следеће 2 ситуације које кваре Т:





в) **рел. поретка** НИЈЕ, јер није АС.

рел. еквиваленције ЈЕСТЕ, јер је Р, С и Т.

г) Уколико је ϱ релација еквиваленције одредити све класе еквиваленције, а уколико је то релација поретка представити је преко Хасеовог дијаграма, испитати да ли је то релација тоталног или парцијалног поретка и одредити минималне, максималне, најмање и највеће елементе скупа X.

Класе еквиваленције су:

$[dana] = [gana] = [zana] = [mana] = \{dana, gana, zana, mana\}$

$[grana] = \{grana\}$

$[strana] = \{strana\}$

Б **1.** Основни искази су:

$a =$ „Ацко је патуљак“ $=$ „Ацко увек говори истину“ $\neg a =$ „Ацко је гном“ $=$ „Ацко увек лаже“

$b =$ „Буцко је патуљак“

$c =$ „Цицко је патуљак“

Исказне формуле које одговарају датим реченицама су:

А: $a \veebar c$

Б: $a \ \wedge \ (c \Rightarrow b)$

Ц: $(a \vee b) \ \Rightarrow \ \neg c$

Да ли су ове реченице непротивречне (и поступак)?

				φ		F	A'	B'	C'	
a	b	c	A	B	C	$A \wedge B \wedge C$	$a \Leftrightarrow A$	$b \Leftrightarrow B$	$c \Leftrightarrow C$	$A' \wedge B' \wedge C'$
0	0	0	0	0	1	0	1	1	0	0
0	0	1	1	0	1	0	0	1	1	0
0	1	0	0	0	1	0	1	0	0	0
0	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	1	1	1	1	1	0	0	0
1	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0
1	1	0	1	1	1	1	1	1	0	0
1	1	1	0	1	0	0	0	1	0	0

Како у колони F има 1, дате изјаве су непротивречне.

Једна СКНФ и једна КНФ за φ:

СКНФ (а то је и КНФ): $\varphi = (a \vee b \vee c) \wedge (a \vee b \vee \neg c) \wedge (a \vee \neg b \vee c) \wedge (a \vee \neg b \vee \neg c) \wedge (\neg a \vee b \vee \neg c)$

КНФ: $\varphi = a \wedge (b \vee \neg c)$

Једна СДНФ и једна ДНФ за F:

СДНФ (а то је и ДНФ): $F = (a \wedge \neg b \wedge \neg c) \vee (a \wedge b \wedge \neg c)$

ДНФ: $F = a \wedge \neg c$

За кога од њих са сигурношћу можемо рећи којој врсти припада (и зашто)?

У 3 колоне таблице A', B', C' смо одредили да ли се истинитосна вредност исказа a (тј. b, c) поклапа са A (тј. B, C). Рецимо када је Ацко гном, тј. лаже $a = 0$, онда и његов исказ мора бити лажан $A = 0$, а када је патуљак, тј. говори истину онда је и $a = 1$ и $A = 1$, па мора бити $a \Leftrightarrow A$. У последњој колони $A' \wedge B' \wedge C'$ када имамо 1 онда се сва три a, b, c поклапају са одговарајућим A, B, C (то смо могли да видимо и без последње 4 колоне у таблици, само посматрајући вредности a, b, c и A, B, C — тако смо радили у Г групи). То се не дешава ни у једном случају, па се о њима не може ништа закључити!

Напомена. Велики број студената је тражио шта се поклапа када је $F = 1$, али то је погрешно!

групa	Презиме и име студента	бр. индекса

Б

2. Исказна формула F која одговара датом колу:

$F = a \wedge \neg\big((b \wedge \neg c) \vee (a \wedge \neg b \wedge d)\big) \wedge \neg(c \vee \neg d)$

(Овде је потребно било ставити овакву формулу, а не неку сређивану – то је битно због питања да ли F представља СКНФ, СДНФ, КНФ или ДНФ! Такође, у $(a \wedge \neg b \wedge d)$ често је изостављан члан d.)

Да ли је F таутологија и/или контрадикција (и поступак)?

				p	q		r		s	F
a	b	c	d	$b \wedge \neg c$	$a \wedge \neg b \wedge d$	$p \vee q$	$\neg(p \vee q)$	$c \vee \neg d$	$\neg(c \vee \neg d)$	$a \wedge r \wedge s$
0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0
0	0	0	1	0	0	0	1	0	1	0
0	0	1	0	0	0	0	1	1	0	0
0	0	1	1	0	0	0	1	1	0	0
0	1	0	0	1	0	1	0	1	0	0
0	1	0	1	1	0	1	0	0	1	0
0	1	1	0	0	0	0	1	1	0	0
0	1	1	1	0	0	0	1	1	0	0
1	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0
1	0	0	1	0	1	1	0	0	1	0
1	0	1	0	0	0	0	1	1	0	0
1	0	1	1	0	1	1	0	1	0	0
1	1	0	0	1	0	1	0	1	0	0
1	1	0	1	1	0	1	0	0	1	0
1	1	1	0	0	0	0	1	1	0	0
1	1	1	1	0	0	0	1	1	0	0

Како су у колони F све 0 то је контрадикција. Како се у колони F јављају 0 није таутологија.

Да ли F представља СКНФ, СДНФ, КНФ или ДНФ (и образложења)?

Како су чланови у заградама спојени са $\wedge$ то дата формула не може бити ни СДНФ ни ДНФ.

Како чланови спојени са $\wedge$ имају од 1 до 3 променљиве, не могу бити ни СДНФ ни СКНФ (у њима се у сваком том члану јављају све 4 променљиве: a, b, c, d).

Дата формула није ни КНФ, јер сви чланови спојени са $\wedge$ не представљају дисјункте (негација дисјункта, нпр. $\neg(c \vee \neg d)$, није дисјункт!).

Представити F у једној КНФ и једној ДНФ:

СДНФ не постоји јер су све 0, али ДНФ постоји: $F = \neg a \wedge a$

горња формула представља и КНФ, јер литерали ($\neg a$ и a) представљају и дисјункте!

могла је за КНФ да се узме и СКНФ (али онда треба исписати све чланове):

$$F = (a \vee b \vee c \vee d) \wedge (a \vee b \vee c \vee \neg d) \wedge (a \vee b \vee \neg c \vee d) \wedge (a \vee b \vee \neg c \vee \neg d) \wedge (a \vee \neg b \vee c \vee d) \wedge (a \vee \neg b \vee c \vee \neg d) \wedge$$
$$(a \vee \neg b \vee \neg c \vee d) \wedge (a \vee \neg b \vee \neg c \vee \neg d) \wedge (\neg a \vee b \vee c \vee d) \wedge (\neg a \vee b \vee c \vee \neg d) \wedge (\neg a \vee b \vee \neg c \vee d) \wedge$$
$$(\neg a \vee b \vee \neg c \vee \neg d) \wedge (\neg a \vee \neg b \vee c \vee d) \wedge (\neg a \vee \neg b \vee c \vee \neg d) \wedge (\neg a \vee \neg b \vee \neg c \vee d) \wedge (\neg a \vee \neg b \vee \neg c \vee \neg d)$$

ДНФ смо могли да добијемо и тако што би прошли негацијом кроз формулу F:

$F = a \wedge (\neg b \vee c) \wedge (\neg a \vee b \vee \neg d) \wedge \neg c \wedge d$

Б **3.** Шта су слободне, а шта везане промењљиве?

Сва појављивања промењљивих x и y су везана, док је друго z везано, а прво z је слободно,

па је формула облика $\quad F(\quad z \quad)$.

Преведена формула:

$$F(z) \quad = \quad (\forall x \in \mathbb{N})\,(\exists y \in \mathbb{N})\,\Big(\big((x=1 \Rightarrow x=y) \Rightarrow y=z\big) \Rightarrow (\exists z \in \mathbb{N})\, y+z=x\Big)$$

Истинитосна вредност формуле F (и поступак):

Формула $(\exists z \in \mathbb{N})\, y+z=x$ је еквивалентна са $x>y$:

– ако је $x>y$ и $x,y \in \mathbb{N}$, онда важи $x-y \in \mathbb{N}$, па за z можемо узети $z=x-y$, па $(\exists z \in \mathbb{N})\, y+z=x$

– ако није $x>y$ онда је $x \leqslant y$, али онда и за било које $z \in \mathbb{N}$ важи $x \leqslant y < y+z$, па не може бити $y+z=x$ (или: ако $(\exists z \in \mathbb{N})\, y+z=x$, онда је $z=x-y$ и то $z \in \mathbb{N}$ само ако је $x>y$).

Тиме се дата формула свела на:

$F \quad = \quad (\forall x \in \mathbb{N})\,(\exists y \in \mathbb{N})\,\Big(\big((x=1 \Rightarrow x=y) \Rightarrow y=z\big) \Rightarrow x>y\Big)$

Сада ћемо 3 пута искористити формулу за ослобађање од импликације $p \;\Rightarrow\; q = \neg p \vee q$:

$F \quad = \quad (\forall x \in \mathbb{N})\,(\exists y \in \mathbb{N})\,\Big(\big((x \neq 1 \vee x=y) \Rightarrow y=z\big) \Rightarrow x>y\Big)$

$F \quad = \quad (\forall x \in \mathbb{N})\,(\exists y \in \mathbb{N})\,\Big(\big((x=1 \wedge x \neq y) \vee y=z\big) \Rightarrow x>y\Big)$

$F \quad = \quad (\forall x \in \mathbb{N})\,(\exists y \in \mathbb{N})\,\Big(\big((x \neq 1 \vee x=y) \wedge y \neq z\big) \vee x>y\Big)$

Сада искористимо формулу за дистрибутивност конјункције и дисјункције $(p \vee q) \wedge r = (p \wedge r) \vee (q \wedge r)$:

$F \quad = \quad (\forall x \in \mathbb{N})\,(\exists y \in \mathbb{N})\,\Big((x \neq 1 \wedge y \neq z) \vee (x=y \wedge y \neq z) \vee x>y\Big)$

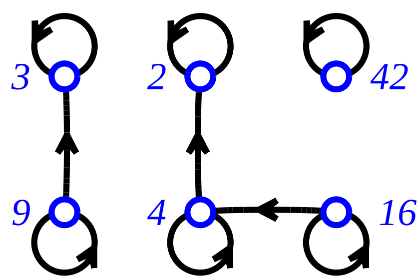
За свако $x \neq 1$ дата формула без квантификатора $\varphi = (x \neq 1 \wedge y \neq z) \vee (x=y \wedge y \neq z) \vee x>y)$ може бити тачна ако узмемо да је $y=1$ (тј. тада постоји тражено y, $y=1$). Ако је $x=1$ онда ни $(x \neq 1 \wedge y \neq z)$ ни $x>y$ не могу бити тачни, док је $(x=y \wedge y \neq z)$ тачно само уколико је $y=1 \neq z$. Стога је $v(F) = \begin{cases} 1, & z \neq 1 \\ 0, & z=1. \end{cases}$

Сви бројеви из X имају различит збир цифара: $zc(2) = 2$, $zc(3) = 3$, $zc(4) = 4$, $zc(9) = 9$, $zc(16) = 7$, $zc(42) = 6$, па је за различите бројеве довољно гледати само први услов, а ту је само $4 = 2^2$, $9 = 3^2$ и $16 = 4^2$. Сваки број има једнак збир цифара са самим собом!

Б

4. а) ϱ таблично и преко графа:

ϱ	2	3	4	9	16	42
2	1	0	0	0	0	0
3	0	1	0	0	0	0
4	1	0	1	0	0	0
9	0	1	0	1	0	0
16	0	0	1	0	1	0
42	0	0	0	0	0	1



б) Да ли је ϱ рефлексивна, симетрична, антисиметрична, транзитивна (уписати **јесте**/**није** и објаснити)?

Р ЈЕСТЕ, јер су сви ел. на главној дијагонали једнаки 1 или што око сваког чвора има петља.

С НИЈЕ, јер $9\,\varrho\,3 \Rightarrow 3\,\varrho\,9$ $\lightning$ јер $3 \neq 9^2$ и $zc(3) \neq zc(9)$

АС ЈЕСТЕ, јер се у паровима ел. симетричних у односу на главну дијагоналу не јављају две 1 или што између 2 различита чвора има 0 или 1 грана.

Т НИЈЕ, јер $16\,\varrho\,4,\ 4\,\varrho\,2 \Rightarrow 16\,\varrho\,2$ $\lightning$ јер $16 \neq 2^2$ и $zc(16) \neq zc(2)$

в) **рел. поретка** НИЈЕ, јер није Т.

рел. еквиваленције НИЈЕ, јер није С и није Т.

г) Уколико је ϱ релација еквиваленције одредити све класе еквиваленције, а уколико је то релација поретка представити је преко Хасеовог дијаграма, испитати да ли је то релација тоталног или парцијалног поретка и одредити минималне, максималне, најмање и највеће елементе скупа X.

Г **1.** Основни искази су:

$a =$ „Ацко је патуљак“ = „Ацко увек говори истину“ $\neg a =$ „Ацко је гном“ = „Ацко увек лаже“

$b =$ „Буцко је патуљак“

$c =$ „Цицко је патуљак“

Исказне формуле које одговарају датим реченицама су:

А: $\neg c \ \wedge \ (b \Rightarrow \neg a)$

Б: $b \ \Rightarrow \ a$

Ц: $(a \Rightarrow b) \ \Rightarrow \ (c \Leftrightarrow a)$

Да ли су ове реченице непротивречне (и поступак)?

				φ		F
a	b	c	A	B	C	$A \wedge B \wedge C$
0	0	0	1	1	1	1
0	0	1	0	1	0	0
0	1	0	1	0	1	0
0	1	1	0	0	0	0
1	0	0	1	1	1	1
1	0	1	0	1	1	0
1	1	0	0	1	0	0
1	1	1	0	1	1	0

Како у колони F има 1, дате изјаве су непротивречне.

Једна СКНФ и једна КНФ за φ:

СКНФ (а то је и КНФ): $\varphi = (a \vee \neg b \vee c) \wedge (a \vee \neg b \vee \neg c)$

КНФ: $\varphi = a \vee \neg b$

Једна СДНФ и једна ДНФ за F:

СДНФ (а то је и ДНФ): $F = (\neg a \wedge \neg b \wedge \neg c) \vee (a \wedge \neg b \wedge \neg c)$

ДНФ: $F = \neg b \wedge \neg c$

За кога од њих са сигурношћу можемо рећи којој врсти припада (и зашто)?

Тражимо врсте таблице у којој се сва три прва елемента a, b, c поклапају са одговарајућим од наредна три A, B, C, тј. када је $a \Leftrightarrow A$ и $b \Leftrightarrow B$ и $c \Leftrightarrow C$ (формалније ово смо могли да урадимо као у Б групи!). То се не дешава ни у једном случају, па се о њима не може ништа закључити!

Напомена. Велики број студената је тражио шта се поклапа када је $F = 1$, али то је погрешно!

група	Презиме и име студента	бр. индекса

Г

2. Исказна формула F која одговара датом колу:

$F = (a \vee \neg d) \wedge (a \vee b \vee \neg c) \wedge \neg a \wedge (a \vee c \vee d)$

Да ли је F таутологија и/или контрадикција (и поступак)?

				p	q	r	s	F
a	b	c	d	$a \vee \neg d$	$a \vee b \vee \neg c$	$\neg a$	$a \vee c \vee d$	$p \wedge q \wedge r \wedge s$
0	0	0	0	1	1	1	0	0
0	0	0	1	0	1	1	1	0
0	0	1	0	1	0	1	1	0
0	0	1	1	0	0	1	1	0
0	1	0	0	1	1	1	0	0
0	1	0	1	0	1	1	1	0
0	1	1	0	1	1	1	1	1
0	1	1	1	0	1	1	1	0
1	0	0	0	1	1	0	1	0
1	0	0	1	1	1	0	1	0
1	0	1	0	1	1	0	1	0
1	0	1	1	1	1	0	1	0
1	1	0	0	1	1	0	1	0
1	1	0	1	1	1	0	1	0
1	1	1	0	1	1	0	1	0
1	1	1	1	1	1	0	1	0

Како се у колони F јавља 0 није таутологија, а како се у колони F јављају 1 није контрадикција.

Да ли F представља СКНФ, СДНФ, КНФ или ДНФ (и образложења)?

Како су чланови у заградама спојени са $\wedge$ то дата формула не може бити ни СДНФ ни ДНФ.

Како чланови спојени са $\wedge$ имају од 1 до 3 променљиве, не могу бити ни СДНФ ни СКНФ (у њима се у сваком том члану јављају све 4 променљиве: a, b, c, d).

Дата формула јесте КНФ, јер чланови спојени са $\wedge$ представљају дисјункте (променљиве и њихове негације су спојене са $\vee$).

Представити F у једној КНФ и једној ДНФ:

СДНФ (а то је и ДНФ): $F = \neg a \wedge b \wedge c \wedge \neg d$

горња формула представља и КНФ, јер литерали $(\neg a, b, c, \neg d)$ представљају и дисјункте!

могла је за КНФ да се узме и СКНФ (али онда треба исписати све чланове):

$$F = (a \vee b \vee c \vee d) \wedge (a \vee b \vee c \vee \neg d) \wedge (a \vee b \vee \neg c \vee d) \wedge (a \vee b \vee \neg c \vee \neg d) \wedge (a \vee \neg b \vee c \vee d) \wedge$$
$$(a \vee \neg b \vee c \vee \neg d) \wedge (a \vee \neg b \vee \neg c \vee \neg d) \wedge (\neg a \vee b \vee c \vee d) \wedge (\neg a \vee b \vee c \vee \neg d) \wedge (\neg a \vee b \vee \neg c \vee d) \wedge$$
$$(\neg a \vee b \vee \neg c \vee \neg d) \wedge (\neg a \vee \neg b \vee c \vee d) \wedge (\neg a \vee \neg b \vee c \vee \neg d) \wedge (\neg a \vee \neg b \vee \neg c \vee d) \wedge (\neg a \vee \neg b \vee \neg c \vee \neg d)$$

Г **3.** Шта су слободне, а шта везане променљиве?

Сва појављивања променљивих x и y су везана, док је само последње z везано, а остала су слободна,

па је формула облика $F(\quad z \quad)$.

Преведена формула:

$$F(z) \quad = \quad (\exists y \in \mathbb{N}_0)\,(\forall x \in \mathbb{N}_0)\,\Big(z = 5 \Rightarrow \big((x \neq y \wedge y = z) \Rightarrow (\exists z \in \mathbb{N}_0)\, x - z = y\big)\Big)$$

Истинитосна вредност формуле F (и поступак):

Формула $(\exists z \in \mathbb{N}_0)\, x - z = y$ је еквивалентна са $x \geqslant y$:

– ако је $x \geqslant y$ и $x, y \in \mathbb{N}_0$, онда важи $x - y \in \mathbb{N}_0$, па за z можемо узети $z = x - y$, па $(\exists z \in \mathbb{N}_0)\, y + z = x$

– ако није $x \geqslant y$ онда је $x < y$, али онда и за било које $z \in \mathbb{N}_0$ важи $x - z \leqslant x < y$, па не може бити $x - z = y$ (или: ако $(\exists z \in \mathbb{N}_0)\, x - z = y$, онда је $z = x - y$ и то $z \in \mathbb{N}_0$ само ако је $x \geqslant y$).

Тиме се дата формула свела на:

$$F \quad = \quad (\exists y \in \mathbb{N}_0)\,(\forall x \in \mathbb{N}_0)\,\Big(z = 5 \Rightarrow \big((x \neq y \wedge y = z) \Rightarrow x \geqslant y\big)\Big) \qquad (*)$$

$v(F) = 1$, јер можемо десну страну последње импликације учинити тачном (тако што постоји $y = 0$ за које ће за свако $x \in \mathbb{N}_0$ важити $x \geqslant y$), па како је $p \;\Rightarrow\; 1 = 1$, онда ће и цела формула бити тачна.

Задатак можемо завршити и поједностављивањем израза $(*)$:

Сада ћемо 2 пута искористити формулу за ослобађање од импликације $p \;\Rightarrow\; q = \neg p \vee q$:

$$F \quad = \quad (\exists y \in \mathbb{N}_0)\,(\forall x \in \mathbb{N}_0)\,\Big(z = 5 \Rightarrow \big((x \neq y \wedge y = z) \Rightarrow x \geqslant y\big)\Big)$$

$$F \quad = \quad (\exists y \in \mathbb{N}_0)\,(\forall x \in \mathbb{N}_0)\,\Big(z = 5 \Rightarrow \big((x = y \vee y \neq z) \vee x \geqslant y\big)\Big)$$

$$F \quad = \quad (\exists y \in \mathbb{N}_0)\,(\forall x \in \mathbb{N}_0)\,\Big(z \neq 5 \vee x = y \vee y \neq z \vee x \geqslant y\Big)$$

Када је $x = y$ тачно, онда је и $x \subseteq y$, па се дата формула може поједноставити:

$$F \quad = \quad (\exists y \in \mathbb{N}_0)\,(\forall x \in \mathbb{N}_0)\,\Big(z \neq 5 \vee y \neq z \vee x \geqslant y\Big)$$

Како у формули без квантификатора $\varphi = z \neq \emptyset \;\vee\; y \neq z \;\vee\; x \subseteq y$ на део $z \neq \emptyset$ не делује ниједан квантификатор, а на део $y \neq z$ делује само $(\exists y \subseteq A)$, онда квантификаторима можемо проћи кроз F:

$$F \quad = \quad z \neq 5 \quad \vee \quad (\exists y \in \mathbb{N}_0)\, y \neq z \quad \vee \quad (\exists y \in \mathbb{N}_0)\,(\forall x \in \mathbb{N}_0)\, x \geqslant y$$

Други део $(\exists y \subseteq A)\, y \neq z$ је тачан (можемо за y узети $y = z + 1$ и онда је $z + 1 = y \neq z$), а и трећи део $(\exists y \subseteq A)\,(\forall x \subseteq A)\, x \geqslant y$ је тачан (можемо за y узети $y = 0$ и онда је $x \geqslant y = 0$), па формула F постаје:

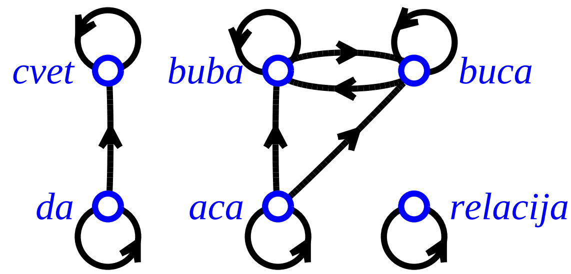
$$F \quad = \quad z \neq 5 \;\vee\; 1 \;\vee\; 1 \quad = \quad 1.$$

За речи из X важи да *cvet* и *da* имају 1 самогласник, *aca*, *buba*, *buca* имају по 2 самогласника, док *relacija* има 4 самогласника. Стога је довољно гледати само први услов, међу речима које имају једнак број самогласника. Реч *da* није дужа од *cvet*, реч *aca* није дужа од *buba* и *buca*, реч *buba* није дужа од *buca* и реч *buca* није дужа од *buba* (и кад су исте дужине прва реч није дужа од друге – то важи и кад су у питању исте речи!).

Г

4. а) ϱ таблично и преко графа:

ϱ	*aca*	*buba*	*buca*	*cvet*	*da*	*relacija*
aca	1	1	1	0	0	0
buba	0	1	1	0	0	0
buca	0	1	1	0	0	0
cvet	0	0	0	1	0	0
da	0	0	0	1	1	0
relacija	0	0	0	0	0	1



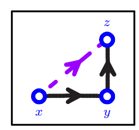
б) Да ли је ϱ рефлексивна, симетрична, антисиметрична, транзитивна (уписати **јесте**/**није** и објаснити)?

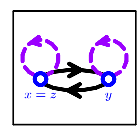
Р ЈЕСТЕ, јер су сви ел. на главној дијагонали једнаки 1 или што око сваког чвора има петља.

С НИЈЕ, јер $da \,\varrho\, cvet \;\Rightarrow\; cvet \,\varrho\, da$ ↯

АС НИЈЕ, јер $buba \,\varrho\, buca,\; buca \,\varrho\, buba \;\Rightarrow\; buba = buca$ ↯

Т ЈЕСТЕ, јер на графу нема ниједне од следеће 2 ситуације које кваре Т:





в) **рел. поретка** НИЈЕ, јер није АС.

рел. еквиваленције НИЈЕ, јер није С.

г) Уколико је ϱ релација еквиваленције одредити све класе еквиваленције, а уколико је то релација поретка представити је преко Хасеовог дијаграма, испитати да ли је то релација тоталног или парцијалног поретка и одредити минималне, максималне, најмање и највеће елементе скупа X.

Д **1.** Основни искази су:

$a =$ „Ана је вила“ $=$ „Ана увек говори истину“ $\quad \neg a =$ „Ана је вештица“ $=$ „Ана увек лаже“

$b =$ „Бана је вила“

$c =$ „Цана је вила“

Исказне формуле које одговарају датим реченицама су:

А: $b \vee c \ \Rightarrow \ a$

Б: $b \ \Leftrightarrow \ a$

Ц: $b \ \wedge \ (\neg a \Rightarrow c)$

Да ли су ове реченице непротивречне (и поступак)?

					φ	F
a	b	c	A	B	C	$A \wedge B \wedge C$
0	0	0	1	1	0	0
0	0	1	0	1	0	0
0	1	0	0	0	0	0
0	1	1	0	0	1	0
1	0	0	1	0	0	0
1	0	1	1	0	0	0
1	1	0	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1

Како у колони F има 1, дате изјаве су непротивречне.

Једна СКНФ и једна КНФ за φ:

СКНФ (а то је и КНФ): $\varphi = (a \vee b \vee c) \wedge (a \vee b \vee \neg c) \wedge (a \vee \neg b \vee c) \wedge (\neg a \vee b \vee c) \wedge (\neg a \vee b \vee \neg c)$

КНФ: $\varphi = b \wedge (a \vee c)$

Једна СДНФ и једна ДНФ за F:

СДНФ (а то је и ДНФ): $F = (a \wedge b \wedge \neg c) \vee (a \wedge b \wedge c)$

ДНФ: $F = a \wedge b$

За кога од њих са сигурношћу можемо рећи којој врсти припада (и зашто)?

Тражимо врсте таблице у којој се сва три прва елемента a, b, c поклапају са одговарајућим од наредна три A, B, C, тј. када је $a \Leftrightarrow A$ и $b \Leftrightarrow B$ и $c \Leftrightarrow C$ (формалније ово смо могли да урадимо као у А групи!). То се дешава само у два случаја, а за њих имамо да је заједничко $a = 1$, па је Ана вила, док за Бану и Цану ништа не можемо рећи (јер имамо и $b = 0$ и $b = 1$, односно $c = 0$ и $c = 1$).

Напомена. Велики број студената је тражио шта се поклапа када је $F = 1$, али то је погрешно!

група	**Презиме и име студента**	**бр. индекса**

Д **2.** Исказна формула F која одговара датом колу:

$F = p \vee \neg\big((q \vee \neg r) \wedge (p \vee \neg q \vee s)\big) \vee \neg(r \wedge \neg s)$

(Овде је потребно било ставити овакву формулу, а не неку сређивану – то је битно због питања да ли F представља СКНФ, СДНФ, КНФ или ДНФ! Такође, у $(p \vee \neg q \vee s)$ често је изостављан члан s.)

Да ли је F таутологија и/или контрадикција (и поступак)?

				a	b		c		d	F
p	q	r	s	$q \vee \neg r$	$p \vee \neg q \vee s$	$a \wedge b$	$\neg(a \wedge b)$	$r \wedge \neg s$	$\neg(r \wedge \neg s)$	$p \vee c \vee d$
0	0	0	0	1	1	1	0	0	1	1
0	0	0	1	1	1	1	0	0	1	1
0	0	1	0	0	1	0	1	1	0	1
0	0	1	1	0	1	0	1	0	1	1
0	1	0	0	1	0	0	1	0	1	1
0	1	0	1	1	1	1	0	0	1	1
0	1	1	0	1	0	0	1	1	0	1
0	1	1	1	1	1	1	0	0	1	1
1	0	0	0	1	1	1	0	0	1	1
1	0	0	1	1	1	1	0	0	1	1
1	0	1	0	0	1	0	1	1	0	1
1	0	1	1	0	1	0	1	0	1	1
1	1	0	0	1	1	1	0	0	1	1
1	1	0	1	1	1	1	0	0	1	1
1	1	1	0	1	1	1	0	1	0	1
1	1	1	1	1	1	1	0	0	1	1

Како су у колони F све 1 то је таутологија. Како се у колони F јављају 1 није контрадикција.

Да ли F представља СКНФ, СДНФ, КНФ или ДНФ (и образложења)?

Како су чланови у заградама спојени са $\vee$ то дата формула не може бити ни СКНФ ни КНФ.

Како чланови спојени са $\vee$ имају од 1 до 3 променљиве, не могу бити ни СДНФ ни СКНФ (у њима се у сваком том члану јављају све 4 променљиве: p, q, r, s).

Дата формула није ни ДНФ, јер сви чланови спојени са $\vee$ не представљају конјункте (негација конјункта, нпр. $\neg(r \wedge \neg s)$, није конјункт!).

Представити F у једној КНФ и једној ДНФ:

СКНФ не постоји јер су све 1, али КНФ постоји: $F = \neg p \vee p$

горња формула представља и ДНФ, јер литерали ($\neg p$ и p) представљају и конјункте!

могла је за ДНФ да се узме и СДНФ (али онда треба исписати све чланове):

$$
\begin{aligned}
F = {} & (\neg p \wedge \neg q \wedge \neg r \wedge \neg s) \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge \neg r \wedge s) \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge r \wedge \neg s) \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge r \wedge s) \vee (\neg p \wedge q \wedge \neg r \wedge \neg s) \vee \\
& (\neg p \wedge q \wedge \neg r \wedge s) \vee (\neg p \wedge q \wedge r \wedge \neg s) \vee (\neg p \wedge q \wedge r \wedge s) \vee (p \wedge \neg q \wedge \neg r \wedge \neg s) \vee (p \wedge \neg q \wedge \neg r \wedge s) \vee \\
& (p \wedge \neg q \wedge r \wedge \neg s) \vee (p \wedge \neg q \wedge r \wedge s) \vee (p \wedge q \wedge \neg r \wedge \neg s) \vee (p \wedge q \wedge \neg r \wedge s) \vee (p \wedge q \wedge r \wedge \neg s) \vee (p \wedge q \wedge r \wedge \neg s)
\end{aligned}
$$

ДНФ смо могли да добијемо и тако што би прошли негацијом кроз формулу F:

$F = p \vee (\neg q \wedge r) \vee (\neg p \wedge q \wedge \neg s) \vee \neg r \vee s$

Д **3.** Шта су слободне, а шта везане променљиве?

Сва појављивања променљивих x и y су везана, док је друго z везано, а прво z је слободно,

па је формула облика $F(\quad z \quad)$.

Преведена формула:

$$F(z) \quad = \quad (\forall x \subseteq A)\,(\exists y \subseteq A)\Big(\big((x=\emptyset \Rightarrow x=y) \Rightarrow y=z\big) \Rightarrow (\exists z \subseteq A)\, y \cup z = x \wedge x \neq y\Big)$$

Истинитосна вредност формуле F (и поступак):

Формула $(\exists z \subseteq A)\, y \cup z = x$ је еквивалентна са $y \subseteq x$:

– ако је $y \subseteq x$ онда важи $y \cup x = x$, па за z можемо узети $z = x$, па $(\exists z \subseteq A)\, y \cup z = x$

– ако $y \nsubseteq x$ онда постоји $m \in y$ такав да $m \notin x$, али онда и за било које z важи $m \in y \cup z$, па не може бити $y \cup z = x$

(или: ако $(\exists z \subseteq A)\, y \cup z = x$, онда је $x = y \cup z$, па је $x \supseteq y$, тј. $y \subseteq x$).

Тиме се дата формула свела на:

$F \quad = \quad (\forall x \subseteq A)\,(\exists y \subseteq A)\Big(\big((x=\emptyset \Rightarrow x=y) \Rightarrow y=z\big) \Rightarrow y \subseteq x \wedge x \neq y\Big)$

Како је $y \subseteq x \wedge x \neq y$ еквивалентно са $y \subset x$ ($\subset$ је ознака за прави подскуп), формула постаје

$F \quad = \quad (\forall x \subseteq A)\,(\exists y \subseteq A)\Big(\big((x=\emptyset \Rightarrow x=y) \Rightarrow y=z\big) \Rightarrow y \subset x\Big)$

Сада ћемо 3 пута искористити формулу за ослобађање од импликације $p \;\Rightarrow\; q = \neg p \vee q$:

$F \quad = \quad (\forall x \subseteq A)\,(\exists y \subseteq A)\Big(\big((x \neq \emptyset \vee x=y) \Rightarrow y=z\big) \Rightarrow y \subset x\Big)$

$F \quad = \quad (\forall x \subseteq A)\,(\exists y \subseteq A)\Big(\big((x = \emptyset \wedge x \neq y) \vee y=z\big) \Rightarrow y \subset x\Big)$

$F \quad = \quad (\forall x \subseteq A)\,(\exists y \subseteq A)\Big(\big((x \neq \emptyset \vee x=y) \wedge y \neq z\big) \vee y \subset x\Big)$

Сада искористимо формулу за дистрибутивност конјункције и дисјункције $(p \vee q) \wedge r = (p \wedge r) \vee (q \wedge r)$:

$F \quad = \quad (\forall x \subseteq A)\,(\exists y \subseteq A)\Big((x \neq \emptyset \wedge y \neq z) \vee (x = y \wedge y \neq z) \vee y \subset x\Big)$

1° $A \neq \emptyset$

За свако $x \neq \emptyset$ дата формула без квантификатора $\varphi = (x \neq \emptyset \wedge y \neq z) \vee (x = y \wedge y \neq z) \vee y \subset x)$ може бити тачна ако узмемо да је $y = \emptyset$ (тј. тада постоји тражено y, $y = \emptyset$). Ако је $x = \emptyset$ онда ни $(x \neq \emptyset \wedge y \neq z)$ ни $y \subset x$ не могу бити тачни, док је $(x = y \wedge y \neq z)$ тачно само уколико је $y = \emptyset \neq z$. Стога је $v(F) = \begin{cases} 1, & z \neq \emptyset \\ 0, & z = \emptyset. \end{cases}$

2° $A = \emptyset$

Све променљиве могу бити само $x, y, z \subseteq \emptyset$, тј. $x = y = z = \emptyset$, па φ постаје

$$\varphi \quad = \quad \Big((\emptyset \neq \emptyset \wedge \emptyset \neq \emptyset) \vee (\emptyset = \emptyset \wedge \emptyset \neq \emptyset) \vee \emptyset \subset \emptyset\Big)$$

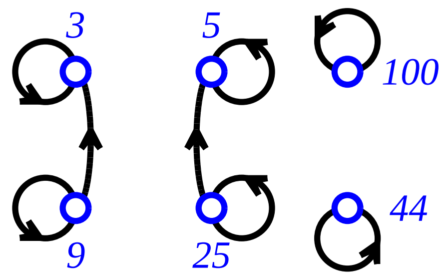
тј. $(0 \wedge 0) \vee (1 \wedge 0) \vee 0 = 0 \vee 0 \vee 0 = 0$, па је $v(\varphi) = 0$, што повлачи да је у овом случају $v(F) = 0$.

Сви бројеви из X имају различит збир цифара: $zc(3)=3$, $zc(5)=5$, $zc(9)=9$, $zc(25)=7$, $zc(44)=8$, $zc(100)=1$, па је за различите бројеве довољно гледати само први услов, а ту је само $9=3^2$ и $25=5^2$. Сваки број има једнак збир цифара са самим собом!

Д

4. а) ϱ таблично и преко графа:

ϱ	3	5	9	25	44	100
3	1	0	0	0	0	0
5	0	1	0	0	0	0
9	1	0	1	0	0	0
25	0	1	0	1	0	0
44	0	0	0	0	1	0
100	0	0	0	0	0	1

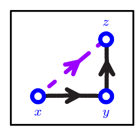
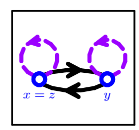


б) Да ли је ϱ рефлексивна, симетрична, антисиметрична, транзитивна (уписати **јесте**/**није** и објаснити)?

Р ЈЕСТЕ, јер су сви ел. на главној дијагонали једнаки 1 или што око сваког чвора има петља.

С НИЈЕ, јер $9\,\varrho\,3 \Rightarrow 3\,\varrho\,9$ ↯ јер $3 \neq 9^2$ и $zc(3) \neq zc(9)$

АС ЈЕСТЕ, јер се у паровима ел. симетричних у односу на главну дијагоналу не јављају две 1 или што између 2 различита чвора има 0 или 1 грана.

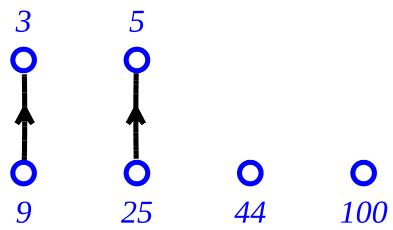
Т ЈЕСТЕ, јер на графу нема ниједне од следеће 2 ситуације које кваре Т:  

в) **рел. поретка** ЈЕСТЕ, јер је Р, АС и Т.

рел. еквиваленције НИЈЕ, јер није С.

г) Уколико је ϱ релација еквиваленције одредити све класе еквиваленције, а уколико је то релација поретка представити је преко Хасеовог дијаграма, испитати да ли је то релација тоталног или парцијалног поретка и одредити минималне, максималне, најмање и највеће елементе скупа X.

Хасеов дијаграм је:



Како он није ланац, релација ϱ је релација парцијалног поретка. То следи и из $3 \not\varrho\ 5$, $5 \not\varrho\ 3$.

Минимални елементи су $9, 25, 44, 100$ и како их има више не постоји најмањи елемент.

Максимални елементи су $3, 5, 44, 100$ и како их има више не постоји највећи елемент.

A I колоквијум из ДМС-а A
ФОН, 20.04.2013.

______________________________________ ______________

Презиме и име студента **бр. индекса**

1. Дате су следеће реченице

I Ако Душан добије на кладионици, отићи ће на летовање или ће купити аутомобил.

II Душан ће купити аутомобил ако добије на кладионици или оде на летовање.

III Није тачно: Душан неће отићи на летовање али ће купити аутомобил ако не добије на кладионици.

IV Душан ће купити аутомобил ако добије на кладионици и не оде на летовање.

Да ли су ове реченице непротивречне?
За исказну формулу φ која одговара II реченици одредити једну СКНФ и једну КНФ.
За исказну формулу F којом сте испитали (не)противречност одредити једну СДНФ и једну ДНФ.
Да ли међу датим реченицама има логички еквивалентних реченица?

2. Дата је скуповна формула F:

$$A \triangle B = C \;\Rightarrow\; A \cap B \setminus D \subseteq A \setminus C,$$

где $A \triangle B$ представља симетричну разлику скупова A и B.
а) Представити леву и десну страну формуле F преко Венових дијаграма.
б) Представити F преко исказних формула.
в) Испитати да ли је исказна формула таутологија (тј. да ли је F увек тачна).
г) Представити и леву и десну страну исказне формуле у једној ДНФ или КНФ.

3. Одредити истинитосну вредност формуле

$$(\exists x)\Big((\exists y)\,\alpha\big(x, f(y,z)\big) \;\Leftrightarrow\; (\forall z)\,\alpha\big(y, f(x,z)\big)\Big) \vee \beta(x,a),$$

где је a симбол константе, α и β бинарни релацијски знаци, f бинарни функцијски (операцијски) знак, при интерпретацији $\mathcal{D} = \mathbb{N}_0$, $a\colon 8$, $\alpha\colon =$, $\beta\colon >$, $f\colon +$, у зависности од валуације слободних променљивих.

4. На скупу $X = \{A,B,C,D,E,F\}$ дата је релација

$$\varrho:\; x\,\varrho\,y \;\overset{\text{деф}}{\Longleftrightarrow}\; x \subset y \quad \text{или} \quad \text{скупови } x \text{ и } y \text{ имају исти број непарних бројева},$$

где су $A = \{1,3\}$, $B = \{1,2,3,5,7,9\}$, $C = \{2,5\}$, $D = \{2,3,4,5,6,7,23\}$, $E = \mathbb{N} \setminus \{23\}$, $F = \emptyset$.
а) Набројати све елементе који су у релацији ϱ и који нису у релацији ϱ.
б) Представити дату релацију таблично и преко графа.
в) Да ли је дата релација рефлексивна, симетрична, антисиметрична, транзитивна?
г) Испитати да ли је то релација еквиваленције и/или релација поретка.
д) Уколико је то релација еквиваленције одредити све класе еквиваленције, а уколико је то релација поретка представити је преко Хасеовог дијаграма, испитати да ли је то релација тоталног или парцијалног поретка и одредити минималне, максималне, најмање и највеће елементе скупа X.

Б **I колоквијум из ДМС-а** **Б**

ФОН, 20.04.2013.

______________________________ ______________

Презиме и име студента **бр. индекса**

1. Дате су следеће реченице

I Драгана ће купити ташну ако добије повишицу и не оде на скијање.

II Драгана ће купити ташну или неће добити повишицу нити ће отићи на скијање.

III Ако Драгана добије повишицу или оде на скијање, онда ће купити ташну.

IV Није тачно: Драгана неће купити ташну и неће отићи на скијање ако не добије повишицу.

Да ли су ове реченице непротивречне?
Да ли је исказна формула φ која одговара II реченици једна КНФ? Ако није одредити КНФ за φ.
За исказну формулу F којом сте испитали (не)противречност одредити једну СДНФ и једну ДНФ.
Да ли међу датим реченицама има логички еквивалентних реченица?

2. Дата је скуповна формула F:

$$B \cup C = D \ \Rightarrow\ (A \vartriangle C) \cap B \subseteq D,$$

где $A \vartriangle C$ представља симетричну разлику скупова A и C.
а) Представити леву и десну страну формуле F преко Венових дијаграма.
б) Представити F преко исказних формула.
в) Испитати да ли је исказна формула таутологија (тј. да ли је F увек тачна).
г) Представити и леву и десну страну исказне формуле у једној ДНФ или КНФ.

3. Одредити истинитосну вредност формуле

$$(\forall x)\Big((\exists z)\,\alpha\big(f(y,z),x\big) \ \Leftrightarrow\ (\exists y)\,\alpha\big(y,f(x,z)\big)\Big) \vee \neg\,\beta(x,a),$$

где је a симбол константе, α и β бинарни релацијски знаци, f бинарни функцијски (операцијски) знак, при интерпретацији $\mathcal{D}=\mathcal{P}(A)$, $a\colon \emptyset$, $\alpha\colon\ =$, $\beta\colon\ \supseteq$, $f\colon \cap$, у зависности од валуације слободних промењљивих.

4. Нека је дат скуп $X=\{aca, buba, lug, leptir, mig, maca\}$ и на њему релација $\varrho \subseteq X^2$ дата са

$$\varrho:\ x\,\varrho\,y \quad \overset{\text{деф}}{\Longleftrightarrow} \quad \text{речи } x \text{ и } y \text{ почињу истим словом} \quad \text{или} \quad \text{је реч } x \text{ дужа од речи } y.$$

а) Набројати све елементе који су у релацији ϱ и који нису у релацији ϱ.
б) Представити дату релацију таблично и преко графа.
в) Да ли је дата релација рефлексивна, симетрична, антисиметрична, транзитивна?
г) Испитати да ли је то релација еквиваленције и/или релација поретка.
д) Уколико је то релација еквиваленције одредити све класе еквиваленције, а уколико је то релација поретка представити је преко Хасеовог дијаграма, испитати да ли је то релација тоталног или парцијалног поретка и одредити минималне, максималне, најмање и највеће елементе скупа X.

Г **I колоквијум из ДМС-а** **Г**

ФОН, 20.04.2013.

Презиме и име студента **бр. индекса**

1. Дате су следеће реченице

I Ако Драгана добије повишицу, отићи ће на скијање или ће купити ташну.

II Драгана ће купити ташну ако добије повишицу или оде на скијање.

III Није тачно: Драгана неће отићи на скијање али ће купити ташну ако не добије повишицу.

IV Драгана ће купити ташну ако добије повишицу и не оде на скијање.

Да ли су ове реченице непротивречне?
За исказну формулу φ која одговара II реченици одредити једну СКНФ и једну КНФ.
За исказну формулу F којом сте испитали (не)противречност одредити једну СДНФ и једну ДНФ.
Да ли међу датим реченицама има логички еквивалентних реченица?

2. Дата је скуповна формула F:

$$C \cap D \setminus A \subseteq D \setminus B \;\Rightarrow\; B = C \vartriangle D,$$

где $C \vartriangle D$ представља симетричну разлику скупова C и D.
а) Представити леву и десну страну формуле F преко Венових дијаграма.
б) Представити F преко исказних формула.
в) Испитати да ли је исказна формула таутологија (тј. да ли је F увек тачна).
г) Представити и леву и десну страну исказне формуле у једној ДНФ или КНФ.

3. Одредити истинитосну вредност формуле

$$(\forall x)\Big((\exists z)\,\alpha\big(f(y,z),x\big) \;\Leftrightarrow\; (\exists y)\,\alpha\big(y,f(x,z)\big)\Big) \vee \neg\,\beta(x,a),$$

где је a симбол константе, α и β бинарни релацијски знаци, f бинарни функцијски (операцијски) знак, при интерпретацији $\mathcal{D} = \mathbb{N}_0$, $a\colon 5$, $\alpha\colon =$, $\beta\colon \geqslant$, $f\colon +$, у зависности од валуације слободних променљивих.

4. Нека је дат скуп $X = \{ana, beba, cica, maca, top, uf\}$ и на њему релација $\varrho \subseteq X^2$ дата са

$$\varrho:\; x\,\varrho\,y \;\overset{\text{деф}}{\Longleftrightarrow}\; \text{речи } x \text{ и } y \text{ почињу истим словом} \quad \text{или} \quad \text{је реч } x \text{ дужа од речи } y.$$

а) Набројати све елементе који су у релацији ϱ и који нису у релацији ϱ.
б) Представити дату релацију таблично и преко графа.
в) Да ли је дата релација рефлексивна, симетрична, антисиметрична, транзитивна?
г) Испитати да ли је то релација еквиваленције и/или релација поретка.
д) Уколико је то релација еквиваленције одредити све класе еквиваленције, а уколико је то релација поретка представити је преко Хасеовог дијаграма, испитати да ли је то релација тоталног или парцијалног поретка и одредити минималне, максималне, најмање и највеће елементе скупа X.

Д **I колоквијум из ДМС-а** **Д**

ФОН, 20.04.2013.

______________________________ ______________

Презиме и име студента **бр. индекса**

1. Дате су следеће реченице

I Душан ће купити аутомобил ако добије на кладионици и не оде на летовање.

II Душан ће купити аутомобил или неће добити на кладионици нити ће отићи на летовање.

III Ако Душан добије на кладионици или оде на летовање, онда ће купити аутомобил.

IV Није тачно: Душан неће купити аутомобил и неће отићи на летовање ако не добије на кладионици.

Да ли су ове реченице непротивречне?
Да ли је исказна формула φ која одговара II реченици једна КНФ? Ако није одредити КНФ за φ.
За исказну формулу F којом сте испитали (не)противречност одредити једну СДНФ и једну ДНФ.
Да ли међу датим реченицама има логички еквивалентних реченица?

2. Дата је скуповна формула F:

$$C \cap (B \triangle D) \subseteq A \;\Leftrightarrow\; A = B \cup C,$$

где $B \triangle D$ представља симетричну разлику скупова B и D.
а) Представити леву и десну страну формуле F преко Венових дијаграма.
б) Представити F преко исказних формула.
в) Испитати да ли је исказна формула таутологија (тј. да ли је F увек тачна).
г) Представити и леву и десну страну исказне формуле у једној ДНФ или КНФ.

3. Одредити истинитосну вредност формуле

$$(\exists x)\Big((\exists y)\,\alpha\big(x, f(y,z)\big) \;\Leftrightarrow\; (\forall z)\,\alpha\big(y, f(x,z)\big)\Big) \vee \beta(x,a),$$

где је a симбол константе, α и β бинарни релацијски знаци, f бинарни функцијски (операцијски) знак, при интерпретацији $\mathcal{D} = \mathcal{P}(A)$, $a\colon \emptyset$, $\alpha\colon =$, $\beta\colon \subseteq$, $f\colon \cup$, у зависности од валуације слободних променљивих.

4. Нека је дат скуп $X = \{beba, buca, cica, gica, grad, graf\}$ и на њему релација $\varrho \subseteq X^2$ дата са

$$\varrho:\; x\,\varrho\,y \quad \overset{\text{деф}}{\Longleftrightarrow} \quad \text{речи } x \text{ и } y \text{ почињу истим словом} \quad \text{или} \quad \text{је реч } x \text{ дужа од речи } y.$$

а) Набројати све елементе који су у релацији ϱ и који нису у релацији ϱ.
б) Представити дату релацију таблично и преко графа.
в) Да ли је дата релација рефлексивна, симетрична, антисиметрична, транзитивна?
г) Испитати да ли је то релација еквиваленције и/или релација поретка.
д) Уколико је то релација еквиваленције одредити све класе еквиваленције, а уколико је то релација поретка представити је преко Хасеовог дијаграма, испитати да ли је то релација тоталног или парцијалног поретка и одредити минималне, максималне, најмање и највеће елементе скупа X.

Решења групе А

1. $k =$ „Душан ће добити на кладионици.“ $\qquad \ell =$ „Душан ће отићи на летовање.“
$a =$ „Душан ће купити аутомобил.“

$\mathrm{I} = k \Rightarrow \ell \vee a, \quad \varphi = \mathrm{II} = k \vee \ell \Rightarrow a, \quad \mathrm{III} = \neg(\neg k \Rightarrow \neg \ell \wedge a), \quad \mathrm{IV} = k \wedge \neg \ell \Rightarrow a, \quad F = \mathrm{I} \wedge \mathrm{II} \wedge \mathrm{III} \wedge \mathrm{IV}.$

конјункт	k	ℓ	a	$\neg k$	$\neg \ell$	$\neg a$	$\ell \wedge a$	I	$k \vee \ell$	II (φ)	$\neg \ell \wedge a$ (p)	$\neg k \Rightarrow p$	III	$k \wedge \neg \ell$	IV	F	дисјункт
	0	0	0	1	1	1	0	1	0	1	0	0	1	0	1	1	$\neg k \wedge \neg \ell \wedge \neg a$
	0	0	1	1	1	0	1	1	0	1	1	1	0	0	1	0	
$k \vee \neg \ell \vee a$	0	1	0	1	0	1	1	1	1	0	0	0	1	0	1	0	
	0	1	1	1	0	0	1	1	1	1	0	0	1	0	1	1	$\neg k \wedge \ell \wedge a$
$\neg k \vee \ell \vee a$	1	0	0	0	1	1	0	0	1	0	0	1	0	1	0	0	
	1	0	1	0	1	0	1	1	1	1	1	1	0	1	1	0	
$\neg k \vee \neg \ell \vee a$	1	1	0	0	0	1	1	1	1	0	0	1	0	0	1	0	
	1	1	1	0	0	0	1	1	1	1	0	1	0	0	1	0	

Изјаве су непротивречне (има бар једна 1 у последњој колони, тј. има две 1 у F).

СКНФ: $\quad \varphi = (k \vee \neg \ell \vee a) \wedge (\neg k \vee \ell \vee a) \wedge (\neg k \vee \neg \ell \vee a).$

За КНФ можемо узети горњу СКНФ, али и неки поједностављенији израз попут: $\quad \varphi = (\neg \ell \vee a) \wedge (\neg k \vee a).$

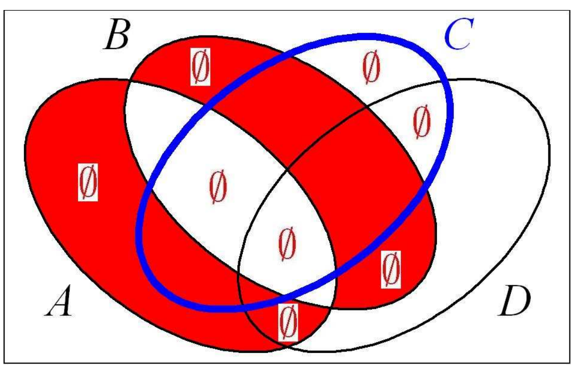
СДНФ: $\quad F = (\neg k \wedge \neg \ell \wedge \neg a) \vee (\neg k \wedge \ell \wedge a)$

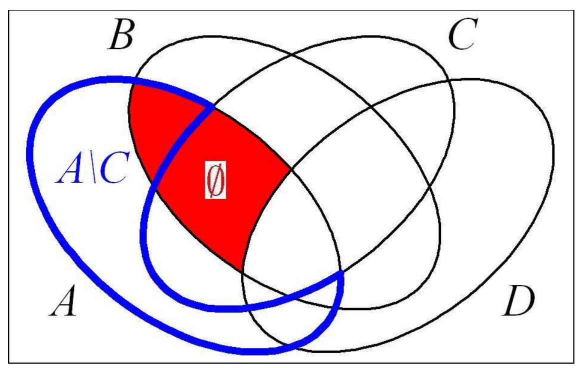
За ДНФ ћемо узети горњу СДНФ.

Како су колоне у таблици које одговарају I и IV реченици исте, то су I и IV реченица логички еквивалентне.

Напомена. Признавано је и ко је узео $\mathrm{III} = \neg(\neg \ell \wedge (\neg k \Rightarrow a)).$

2. а) Лево доле је приказана лева страна скуповне формуле$(A \triangle B;\, C)$, а десно је приказана десна страна $((A \cap B) \setminus D;\, A \setminus C)$. На обе слике су са $\emptyset$ означене области у којима не сме бити елемената!





б) $a = x \in A, \quad b = x \in B, \quad c = x \in C, \quad d = x \in D$:

$((a \vee b) \Leftrightarrow c) \Rightarrow (((a \wedge B) \wedge \neg d) \Rightarrow (a \wedge \neg c)).$

(црне заграде МОРАЈУ да се ставе, а црвене не, али оне означавају како се извршавају операције)

в) Јесте таутологија.

г) Леву страну можемо представити преко ДНФ (ту смо по 2 од 8 чланова из СДНФ спојили!):

$\text{Л} = (\neg a \wedge \neg b \wedge \neg c) \vee (\neg a \wedge b \wedge c) \vee (a \wedge \neg b \wedge c) \vee (a \wedge b \wedge \neg c).$

Десну страну представимо у СКНФ (јер има само једна 0), а то је и КНФ (а и ДНФ): $\text{Д} = \neg a \vee \neg b \vee \neg c \vee d.$

3. Формула је $\underline{(\exists x \in \mathbb{N}_0)}\Big(\underline{(\exists y \in \mathbb{N}_0)}\, x = y + z \;\Leftrightarrow\; \underline{(\forall z \in \mathbb{N}_0)}\, y = x + z\Big) \vee x > 8$.

Ту су црвено означене везане променљиве, а плаво слободне променљиве, па је формула облика $F(x, y, z)$.

Формула $(\exists y \in \mathbb{N}_0)\, x = y + z$ еквивалентна је са $x \geqslant z$, јер је $y = x - z \in \mathbb{N}_0$ (и тад постоји) само ако је $x \geqslant z$. Формула $(\forall z \in \mathbb{N}_0)\, y = x + z$ је увек нетачна (0), јер за сваки природан број z не може да важи да је једнак фиксираном броју $y - x$.

Дакле, формула у загради се своди на $x \geqslant z \;\Leftrightarrow\; 0$, што је исто што и $\neg(x \geqslant z)$, тј. $x < z$.

Даље, полазна формула F своди на $F = (\exists x \in \mathbb{N}_0)\, x < z \vee x > 8$.

Како је формула $(\exists x \in \mathbb{N}_0)\, x < z$ еквивалентна са $z \neq 0$ (ако је $z = 0$ онда не постоји мањи број x у скупу $\mathbb{N}_0$; ако је $z \neq 0$, тј. $z > 0$ онда постоји, нпр. $x = 0$, такво да је $0 = x < z$).

Коначно добијамо да је

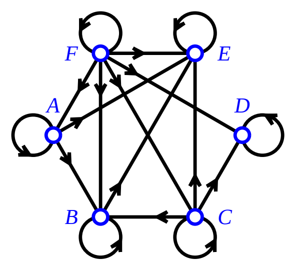
$$v(F) = \begin{cases} 1, & z \neq 0 \\ 1, & x > 8 \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

4. Скуп $A = \{1, 3\}$ има 2 непарна елемента, $B = \{1, 2, 3, 5, 7, 9\}$ има 5, $C = \{2, 5\}$ има 1, $D = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 23\}$ има 4, $E = \mathbb{N} \setminus \{23\}$ има ∞ много, $F = \emptyset$ нема непарних елемената, тј. има их 0. Како сви ови скупови имају међусобно различит број непарних елемената релација се своди на $x \varrho y \overset{\text{деф}}{\iff} x \subseteq y$.

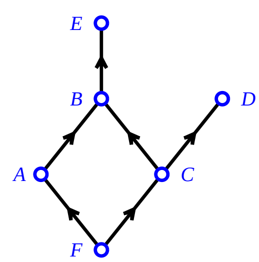
Напомена. Није $x \varrho y \overset{\text{деф}}{\iff} x \subset y$, јер кад је $y = x$ онда су то исти скупови и они имају исти број непарних елемената, па зато важи и $x \varrho x$!

б)

ϱ	A	B	C	D	E	F
A	1	1	0	0	1	0
B	0	1	0	0	1	0
C	0	1	1	1	1	0
D	0	0	0	1	0	0
E	0	0	0	0	1	0
F	1	1	1	1	1	1



г) Није релација еквиваленције, јер није **C** ($A \varrho B \;\Rightarrow\; B \varrho A$ ↯). Јесте релација поретка, јер је **P**, **AC** и **T**.
д) Ово је релација парцијалног поретка, јер њен Хасеов дијаграм приказан на наредној слици није ланац. Такође, исти закључак можемо добити и из $D \not\varrho E$ и $E \not\varrho D$.



Најмањи елемент је F, јер је он у релацији са свим осталим (у таблици у врсти која одговара F су све 1; у графу из F води грана у све чворове), па је он и једини минимални елемент.

Максималан елемент је D, јер не постоји ниједан $x \neq D$ који је у релацији са њим $D \varrho x$ (у таблици су у његовој врсти све 0 сем на главној дијагонали где је 1; у графу не улази ниједна грана у D сем петље). Аналогно се добија да је и E максималан елемент.
Дакле, максимални елементи су D и E. Како има више максималних елемената, не постоји највећи елемент.

Резултати групе Б

1. $p =$ „Драгана ће добити повишицу.“ $\quad s =$ „Драгана ће отићи на скијање.“
$t =$ „Драгана ће купити ташну.“

$\mathrm{I} = p \land \neg s \;\Rightarrow\; t, \quad \varphi = \mathrm{II} = t \lor (\neg p \land \neg s), \quad \mathrm{III} = p \lor s \;\Rightarrow\; t, \quad \mathrm{IV} = \neg(\neg p \;\Rightarrow\; \neg t \land \neg s, \quad F = \mathrm{I} \land \mathrm{II} \land \mathrm{III} \land \mathrm{IV}.$

Изјаве су непротивречне (има бар једна 1 у последњој колони, тј. има две 1 у F).

Исказна формула $\varphi = t \lor (\neg p \land \neg s)$ није КНФ, јер она није ни дисјункт (дисјункција литерала, јер $\neg p \land \neg s$ није литерал) ни коњункција дисјунката (између чланова је $\lor$ а не $\land$). Она би била једна ДНФ!

Како није КНФ, одредићемо њену СКНФ: $\quad \varphi = (p \lor \neg s \lor t) \land (\neg p \lor s \lor t) \land (\neg p \lor \neg s \lor t).$

За КНФ можемо узети горњу СКНФ, али и једноставнији израз: $\quad \varphi = (\neg s \lor t) \land (\neg p \lor t).$

СДНФ: $\quad F = (\neg p \land \neg s \land t) \lor (\neg p \land s \land t)$

За ДНФ можемо узети горњу СДНФ, али и једноставнији израз: $\quad F = \neg p \land t.$

Како су колоне у таблици које одговарају II и III реченици исте, то су II и III реченица логички еквивалентне.

2. б) $a = x \in A, \quad b = x \in B, \quad c = x \in C, \quad d = x \in D$:

$((b \lor c) \;\Leftrightarrow\; d) \;\Rightarrow\; (((a \veebar c) \land b) \;\Rightarrow\; d).$

(црне заграде МОРАЈУ да се ставе, а црвене не, али оне означавају како се извршавају операције)

в) Јесте таутологија.

г) Леву страну можемо представити преко ДНФ (ту смо неке од чланова из СДНФ спојили!):

$\text{Л} = (b \land d) \lor (c \land d) \lor (\neg b \land \neg c \land \neg d).$

Десну страну представимо у СКНФ (јер има само две 0), а то је и КНФ: $\text{Д} = (a \lor \neg b \lor \neg c \lor d) \land (\neg a \lor \neg b \lor c \lor d).$

3. Формула је $\underline{(\forall x \subseteq A)}\Big(\underline{(\exists z \subseteq A)}\, y \cap z = x \;\Leftrightarrow\; \underline{(\exists y \subseteq A)}\, y = x \cap z\Big) \lor \neg(x \supseteq \emptyset).$

Ту су црвено означене везане променљиве, а плаво слободне променљиве, па је формула облика $F(x, y, z)$.

Формула $(\exists z \subseteq A)\, y \cap z = x$ еквивалентна је са $x \subseteq y$ (ако је $x \subseteq y$ онда можемо узети $z = x$, а ако је $x \nsubseteq y$, онда постоји елемент $m \in x$, такав да $m \notin y$, али онда $m \notin y \cap z$, па не важи $x = y \cap z$ ни за једно z). Формула $(\exists y \subseteq A)\, y = x \cap z$ је увек тачна (1), јер за фиксиране x и z увек постоји и њихов пресек $x \cap z$.

Дакле, формула у загради се своди на $x \subseteq y \;\Leftrightarrow\; 1$, што је исто што и $x \subseteq y$.

Формула $\neg(x \supseteq \emptyset)$ се своди на $x \subset 0$, што је увек нетачно (0), јер $\emptyset$ нема правих подскупова.

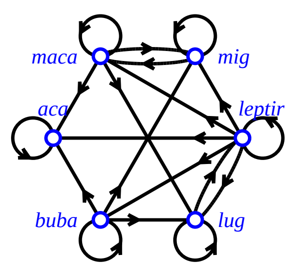
Даље, полазна формула F своди на $F = (\forall x \subseteq A)\, x \subseteq y \lor 0$, што је исто што $F = (\forall x \subseteq A)\, x \subseteq y$.

Ова формула ће бити тачна за свако x само ако је $y = A$ (ако је $y \neq A$ не важи за свако x, нпр. за $x = A$; ако је $y = A$ онда је за свако $x \subset A$ испуњено $x \subseteq y = A$), па добијамо да је $v(F) = \begin{cases} 1, & y = A \\ 0, & y \neq A. \end{cases}$

Када је $A = \emptyset$ формула F је увек тачна, тј. $v(F) = 1$.

4. б)

ϱ	*aca*	*buba*	*lug*	*leptir*	*mig*	*maca*
aca	1	0	0	0	0	0
buba	1	1	1	0	1	0
lug	0	0	1	1	0	0
leptir	1	1	1	1	1	1
mig	0	0	0	0	1	1
maca	1	0	1	0	1	1



в) Јесте **Р** јер свака реч почиње истим словом као и она сама.

Није **С**, јер $buba\, \varrho\, aca \;\Rightarrow\; aca\, \varrho\, buba$ ↯.

Није **АС**, јер $maca\, \varrho\, mig,\; mig\, \varrho\, maca \;\Rightarrow\; maca = mig$ ↯.

Није **Т**, јер $maca\, \varrho\, lug,\; lug\, \varrho\, leptir \;\Rightarrow\; maca\, \varrho\, leptir$ ↯.

г) Како релација није **Т**, она није ни релација еквиваленције, ни релација поретка.

д) С обзиром на резултате под г), овде не мора ништа да се ради!

Резултати групе Г

1. $p =$ „Драгана ће добити повишицу.“ $s =$ „Драгана ће отићи на скијање.“
$t =$ „Драгана ће купити ташну.“

$\mathrm{I} = p \Rightarrow s \vee t, \quad \varphi = \mathrm{II} = p \vee s \Rightarrow t, \quad \mathrm{III} = \neg(\neg p \Rightarrow \neg s \wedge t), \quad \mathrm{IV} = p \wedge \neg s \Rightarrow t, \quad F = \mathrm{I} \wedge \mathrm{II} \wedge \mathrm{III} \wedge \mathrm{IV}.$

Изјаве су непротивречне (има бар једна 1 у последњој колони, тј. има две 1 у F).

СКНФ: $\varphi = (p \vee \neg s \vee t) \wedge (\neg p \vee s \vee t) \wedge (\neg p \vee \neg s \vee t)$.

За КНФ можемо узети горњу СКНФ, али и неки поједностављенији израз попут: $\varphi = (\neg s \vee t) \wedge (\neg p \vee t)$.

СДНФ: $F = (\neg p \wedge \neg s \wedge \neg t) \vee (\neg p \wedge s \wedge t)$

За ДНФ ћемо узети горњу СДНФ.

Како су колоне у таблици које одговарају I и IV реченици исте, то су I и IV реченица логички еквивалентне.

Напомена. Признавано је и ко је узео $\mathrm{III} = \neg(\neg s \wedge (\neg p \Rightarrow t))$.

2. б) $a = x \in A, \quad b = x \in B, \quad c = x \in C, \quad d = x \in D$:

$(((c \wedge d) \wedge \neg a) \Rightarrow (d \wedge \neg b)) \Rightarrow (b \Leftrightarrow (c \vee d))$.

(црне заграде МОРАЈУ да се ставе, а црвене не, али оне означавају како се извршавају операције)

в) Није таутологија (у последњој колони има седам 0).

г) Леву страну можемо представити преко ДНФ (ту смо по 2 од 8 чланова из СДНФ спојили!):

$\text{Л} = (\neg b \wedge \neg c \wedge \neg d) \vee (\neg b \wedge c \wedge d) \vee (b \wedge \neg c \wedge d) \vee (b \wedge c \wedge \neg d)$.

Десну страну представимо у СКНФ (јер има само једна 0), а то је и КНФ (а и ДНФ): $\text{Д} = a \vee \neg b \vee \neg c \vee \neg d$.

3. Формула је $\underline{(\forall x \in \mathbb{N}_0)}\Big(\underline{(\exists z \in \mathbb{N}_0)}\, y + z = x \Leftrightarrow \underline{(\exists y \in \mathbb{N}_0)}\, y = x + z\Big) \vee \neg(x \geqslant 5)$.

Ту су црвено означене везане променљиве, а плаво слободне променљиве, па је формула облика $F(x, y, z)$.

Формула $(\exists z \in \mathbb{N}_0)\, y + z = x$ еквивалентна је са $x \geqslant y$, јер је $z = x - y \in \mathbb{N}_0$ (и тад постоји) само ако је $x \geqslant y$.
Формула $(\exists y \in \mathbb{N}_0)\, y = x + z$ је увек тачна (1), јер за фиксиране x и z увек постоји и њихов збир $x + z$.

Дакле, формула у загради се своди на $x \geqslant y \Leftrightarrow 1$, што је исто што и $x \geqslant y$.

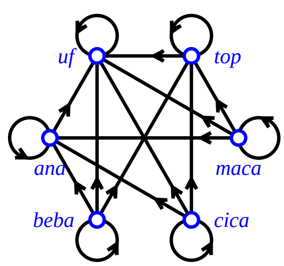
Формула $\neg(x \geqslant 5)$ је једнака $x < 5$.

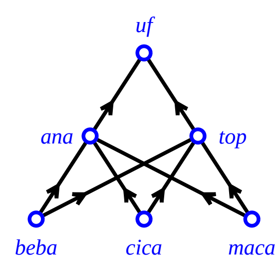
Даље, полазна формула F своди на $F = (\forall x \in \mathbb{N}_0)\, x \geqslant y \vee x < 5$, што је исто што $F = y = 0 \vee x < 5$, јер је формула $(\forall x \in \mathbb{N}_0)\, x \geqslant y$ тачна ако и само ако је $y = 0$ (ако је $y > 0$ не важи за свако x, нпр. за $x = 0$; ако је $y = 0$ онда је за свако $x \in \mathbb{N}_0$ испуњено $x \geqslant y = 0$).

Коначно добијамо да је $v(F) = \begin{cases} 1, & y = 0 \\ 1, & x < 5 \\ 0, & y \neq 0,\ x \geqslant 5. \end{cases}$

4. б)

ϱ	*ana*	*beba*	*cica*	*maca*	*top*	*uf*
ana	1	0	0	0	0	1
beba	1	1	0	0	1	1
cica	1	0	1	0	1	1
maca	1	0	0	1	1	1
top	0	0	0	0	1	1
uf	0	0	0	0	0	1





г) Није релација еквиваленције, јер није **С** ($top\, \varrho\, uf \Rightarrow uf\, \varrho\, top$ ↯).
Јесте релација поретка, јер је **Р**, **АС** и **Т**.

д) Ово је релација парцијалног поретка, јер њен Хасеов дијаграм приказан на слици десно није ланац. Такође, исти закључак можемо добити и из $beba \not\varrho\ cica$ и $cica \not\varrho\ beba$.

Највећи елемент је uf, јер су сви остали у релацији са њим (у таблици у колони која одговара uf су све 1; у графу у F води грана из свих чворова), па је он и једини максимални елемент.

Минималан елемент је реч *beba*, јер не постоји ниједна реч $x \neq beba$ са којим је она у релацији $x\, \varrho\, beba$ (у таблици су у његовој колони све 0 сем на главној дијагонали где је 1; у графу не улази ниједна грана у *beba* сем петље). Аналогно се добија да су и *cica* и *maca* максимални елементи.
Дакле, минимални елементи су *beba*, *cica* и *maca*. Како има више минималних елемената, не постоји најмањи елемент.

Резултати групе Д

1. $k =$ „Душан ће добити на кладионици.“ $\qquad \ell =$ „Душан ће отићи на летовање.“
$a =$ „Душан ће купити аутомобил.“

$\mathrm{I} = k \wedge \neg\ell \;\Rightarrow\; a, \quad \varphi = \mathrm{II} = a \vee (\neg k \wedge \neg\ell), \quad \mathrm{III} = k \vee \ell \;\Rightarrow\; a, \quad \mathrm{IV} = \neg(\neg k \;\Rightarrow\; \neg\ell \wedge \neg a, \quad F = \mathrm{I} \wedge \mathrm{II} \wedge \mathrm{III} \wedge \mathrm{IV}.$

Изјаве су непротивречне (има бар једна 1 у последњој колони, тј. има две 1 у F).

Исказна формула $\varphi = a \vee (\neg k \wedge \neg\ell)$ није КНФ, јер она није ни дисјункт (дисјункција литерала, јер $\neg k \wedge \neg\ell$ није литерал) ни коњункција дисјунката (између чланова је $\vee$ а не $\wedge$). Она би била једна ДНФ!

Како није КНФ, одредићемо њену СКНФ: $\qquad \varphi = (k \vee \neg\ell \vee a) \wedge (\neg k \vee \ell \vee a) \wedge (\neg k \vee \neg\ell \vee a).$

За КНФ можемо узети горњу СКНФ, али и једноставнији израз: $\qquad \varphi = (\neg\ell \vee a) \wedge (\neg k \vee a).$

СДНФ: $\qquad F = (\neg k \wedge \neg\ell \wedge a) \vee (\neg k \wedge \ell \wedge a)$

За ДНФ можемо узети горњу СДНФ, али и једноставнији израз: $\qquad F = \neg k \wedge a.$

Како су колоне у таблици које одговарају II и III реченици исте, то су II и III еквивалентне.

2. б) $a = x \in A, \quad b = x \in B, \quad c = x \in C, \quad d = x \in D$: $\qquad ((c \wedge (b \veebar d)) \;\Rightarrow\; a) \;\Leftrightarrow\; (a \;\Leftrightarrow\; (b \vee c)).$

(црне заграде МОРАЈУ да се ставе, а црвене не, али оне означавају како се извршавају операције)

в) Није таутологија (у последњој колони има шест 0).

г) Леву страну представимо у СКНФ (јер има само две 0), а то је и КНФ: $\text{Д} = (a \vee b \vee \neg c \vee \neg d) \wedge (a \vee \neg b \vee \neg c \vee d)$.

Десну страну можемо представити преко ДНФ (ту смо по неколико од 8 чланова из СДНФ спојили!):

$\text{Л} = (a \wedge b) \vee (a \wedge c) \vee (\neg a \wedge \neg b \wedge \neg c).$

3. Формула је $\underline{(\exists x \subseteq A)}\Big(\underline{(\exists y \subseteq A)}\, x = y \cup z \;\Leftrightarrow\; \underline{(\forall z \subseteq A)}\, y = x \cup z\Big) \vee x \subseteq \emptyset.$

Ту су црвено означене везане променљиве, а плаво слободне променљиве, па је формула облика $F(x, y, z)$.

Формула $(\exists y \subseteq A)\, x = y \cup z$ еквивалентна је са $z \subseteq x$ (ако је $z \subseteq x$ онда можемо узети $y = x$, а ако је $z \not\subseteq x$, онда постоји елемент $m \in z$, такав да $m \notin x$, али онда $m \in y \cup z$, па не важи $x = y \cup z$ ни за једно y).
Формула $(\forall z \subseteq A)\, y = x \cup z$ је тачна ако и само ако је $x = A$ и $y = A$.
а формула $x \subseteq \emptyset$ еквивалентна је са $x = \emptyset$.

За формулу у загради, $\varphi = (\exists y \subseteq A)\, x = y \cup z \;\Leftrightarrow\; (\forall z \subseteq A)\, y = x \cup z$, имамо да је еквивалентна са $z \subseteq x \;\Leftrightarrow\; x = A \wedge y = A$, што је тачно у 2 случаја: $0 \;\Leftrightarrow\; 0$ и $1 \;\Leftrightarrow\; 1$, па је

$$v(\varphi) = \begin{cases} 1, & x = A,\ y = A \\ 1, & z \not\subseteq x,\ x \neq A \\ 1, & z \not\subseteq x,\ y \neq A \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

(овде смо први случај са $z \subseteq x, x = A, y = A$ свели на само $x = A, y = A$, јер кад је $x = A$ онда је и $z \subseteq x$).

Сада остаје још да прођемо квантификатором $(\exists x)$ кроз формулу φ.

Када је $y = A$, за x у $(\exists x)$ бирамо $x = A$, па је формула $(\exists x \subseteq A)\, \varphi$ тачна.

Када је $z \neq \emptyset$, за x у $(\exists x)$ можемо изабрати $x = \emptyset$, па ће бити $z \not\subseteq x$ и $x \neq A$, те је формула $(\exists x \subseteq A)\, \varphi$ тачна.

Када је $y \neq A$ и $z = \emptyset$, формула $(\exists x \subseteq A)\, \varphi$ је нетачна.

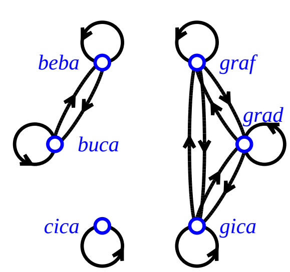
Коначно добијамо да је

$$v(F) = \begin{cases} 1, & x = \emptyset \\ 1, & y = A \\ 1, & z \neq \emptyset \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Када је $A = \emptyset$ формула F је увек тачна, тј. $v(F) = 1$
(важи десна страна дисјункције $x \subseteq \emptyset$, јер је $x = \emptyset$).

4. б)

ϱ	$beba$	$buca$	$cica$	$gica$	$grad$	$graf$
$beba$	1	1	0	0	0	0
$buca$	1	1	0	0	0	0
$cica$	0	0	1	0	0	0
$gica$	0	0	0	1	1	1
$grad$	0	0	0	1	1	1
$graf$	0	0	0	1	1	1



г) Није релација поретка, јер није **АС** ($beba\, \varrho\, buca,\ buca\, \varrho\, beba \;\Rightarrow\; beba = buca$ ↯).
Јесте релација еквиваленције, јер је **Р**, **С** и **Т**.

д) Класе еквиваленције су:

$[beba] = [buca] = \{beba, buca\},\ [cica] = \{cica\},\ [gica] = [grad] = [graf] = \{gica, grad, graf\}.$