Zadaci iz relacijskih struktura

1. Neka je ρ binarna relacija definisana kao

$$x \, \rho \, y \Leftrightarrow (x + 3y) / 2y \in A,$$

gde je A skup svih realnih brojeva ne vecih od 2.

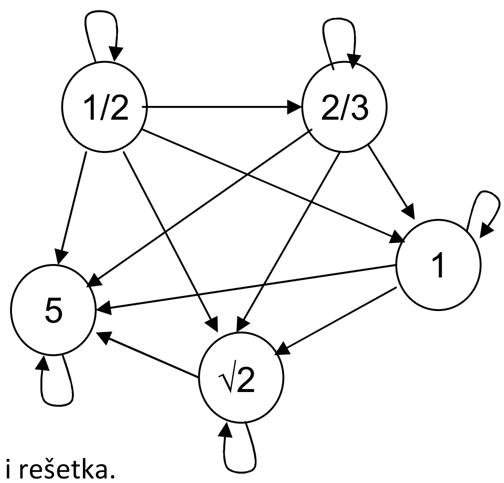
a) Dokazati da je (S, ρ) parcijalno uređeni skup ako je S = $\{ 1/2, 2/3, 1, \sqrt{2}, 5 \}$. Naći <u>sup</u> i <u>inf</u> podskupa $\{ 1, \sqrt{2}, 5 \}$. Da li je (S, ρ) rešetka?

b) Utvrditi da je (R^+, ρ) parcijalno uređen skup, gde je R^+ skup svih pozitivnih realnih brojeva.

c) Naći <u>inf</u> podskupa iz R^+ koji se sastoji od svih zajedničkih sadržalaca brojeva 2, 3 i 4.

Rad:

a) $\rho = \{ (1/2,1/2), (2/3,2/3), (1,1), (\sqrt{2},\sqrt{2}), (5,5), (1/2,2/3), (1/2,1),$
$(1/2, \sqrt{2}), (1/2,5), (2/3,1), (2/3,\sqrt{2}), (2/3,5), (1,\sqrt{2}), (1,5),$
$(\sqrt{2},5) \}$



(S, ρ) je lanac, pa je i rešetka.
sup $\{ 1, \sqrt{2}, 5 \} = 5$ (gornja međa 5).
inf $\{ 1, \sqrt{2}, 5 \} = 1$ (donje međe: 1/2, 2/3, 1).

b) Za $y > 0$, $(x + 3y) / 2y \leq 2 \Leftrightarrow x \leq y$
Za $y < 0$, $(x + 3y) / 2y \leq 2 \Leftrightarrow x \geq y$
Za $x, y \in R^+$, $x \, \rho \, y \Leftrightarrow x \leq y$.
Pošto je relacija "$\leq$" poznata kao relacija poretka, (R^+, ρ) je parcijalno uređen skup.

c) Skup svih zajedničkih sadržalaca 2,3 i 4 ima oblik $S` = \{ 12k \mid k \in N \}$.
Pošto se relacija ρ svodi na skupu S` na relaciju "$\leq$" , tada inf S` = 12.

2. Neka je ρ binarna relacija definisana kao

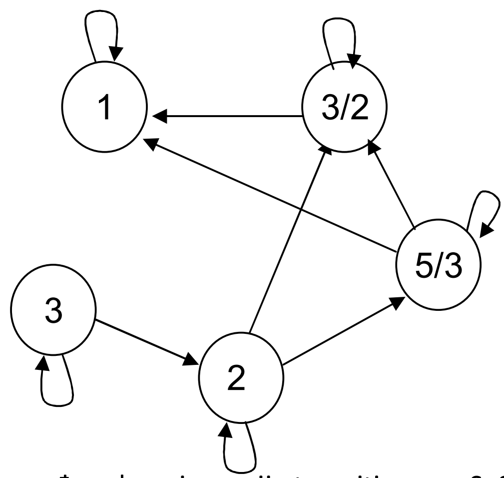
$x \, \rho \, y \Leftrightarrow (4x + 2y) / 3y \in [2, 3]$.

a) Da li je (S, ρ) parcijalno uređen skup za S = $\{ 1, 3/2, 5/3, 2, 3 \}$.

b) Ispitati da li je ρ antisimetrična relacija na $R \setminus \{0\}$.

Rad:

a) $\rho = \{ (1,1), (3/2,3/2), (5/3,5/3), (2,2), (3,3), (3/2,1), (5/3,1), (5/3,3/2), (2,3/2), (2,5/3), (3,2) \}$



(S, ρ) nije parcijalno uređen skup, jer ρ nije tranzitivno na S. Stvarno $(3, 2) \in \rho$ i $(2, 3/2) \in \rho$, ali $(3, 3/2) \notin \rho$.

b) Za $y > 0$, $(4x + 2y) / 3y \in [2, 3] \Leftrightarrow y \le x \le 7/4y$ (1)

Za $y < 0$, $(4x + 2y) / 3y \in [2, 3] \Leftrightarrow y \ge x \ge 7/4y$ (2)

$\Downarrow$

$(y > 0 \wedge x\rho y \Rightarrow x > 0) \wedge (y < 0 \wedge x\rho y \Rightarrow x < 0)$, t.j. ako je $x\rho y$, tada su x i y istog znaka.

$\Downarrow$

Ako su $x > 0$ i $y > 0$, tada, na osnovu (1),

$x\rho y \wedge y\rho x \Leftrightarrow y\le x \wedge x\le y \Rightarrow x = y$.

Ako su $x < 0$ i $y < 0$, tada, na osnovu (2),

$x\rho y \wedge y\rho x \Leftrightarrow y\ge x \wedge x\ge y \Rightarrow x = y$.

Zato je relacija ρ antisimetrična po definiciji.

3. Neka je ρ binarna relacija definisana kao

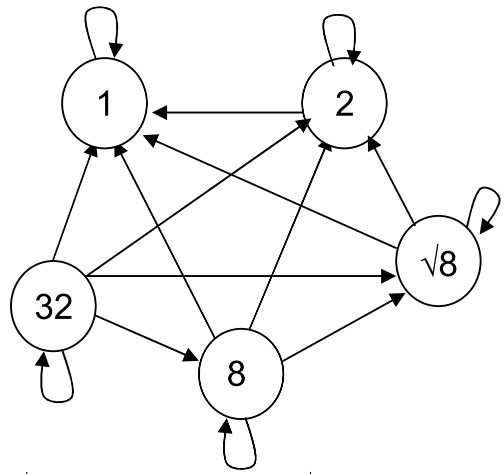
$x \, \rho \, y \Leftrightarrow (\exists \, k \in [-3/2, 0]) \, y^3 x^{2k} = 1$.

a) Dokazati da je (S, ρ) parcijalno uređen skup ako je S = $\{ 1, 2, \sqrt{8}, 8, 32 \}$. Naći <u>sup</u> i <u>inf</u> podskupa $\{ \sqrt{8}, 8, 32 \}$.

b) Utvrditi da je ρ relacija poretka na R^+, gde je R^+ skup pozitivnih realnih brojeva. Dokazati da je 1 najveći element parcijalno uređenog skupa (R^+, ρ).

Rad:

a) $\rho = \{ (1,1), (2,2), (\sqrt{8},\sqrt{8}), (8,8), (32,32), (2,1), (\sqrt{8},1), (8,1), (32,1), (\sqrt{8},2), (8,2), (32,2), (8,\sqrt{8}), (32, \sqrt{8}) (32,8) \}$



$\sup\{\sqrt{8}, 8, 32\} = \sqrt{8}$ (gornje međe: 1, 2, $\sqrt{8}$)
$\inf\{\sqrt{8}, 8, 32\} = 32$ (donja međa: 32)

b) Refleksivnost
$(\forall x \in R^+)\ x\rho x \Leftrightarrow x^3x^{2k} = 1 \Rightarrow 3 + 2k = 0 \Rightarrow k = -3/2 \in [-3/2, 0]$
Antisimetričnost
$(\forall x, y \in R^+)\ x\rho y \wedge y\rho x \Rightarrow x = y$
$x\rho y \wedge y\rho x \Leftrightarrow (\exists\, k_1 \in [-3/2, 0])\ y^3x^{2k1} = 1 \wedge (\exists\, k_2 \in [-3/2, 0])$
$x^3y^{2k2} = 1 \Rightarrow x = y^{-(2k2)/3} \Rightarrow y^3y^{-(4k1k2)/3} = 1 \Rightarrow 3 - (4k_1k_2)/3 = 0$
$\Rightarrow k_1k_2 = 9/4 \Rightarrow k_1 = k_2 = -3/2 \Rightarrow x^3y^{2*(-3/2)} = 1 \Rightarrow x^3 = y^3 \Rightarrow x = y.$
Tranzitivnost
$(\forall x, y, z \in R^+)\ x\rho y \wedge y\rho z \Rightarrow x\rho z$
$x\rho y \wedge y\rho z \Leftrightarrow (\exists k_1 \in [-3/2, 0])\ y^3x^{2k1} = 1 \wedge (\exists\, k_2 \in [-3/2, 0])$
$z^3y^{2k2} = 1 \Rightarrow y = x^{-(2k1)/3} \Rightarrow z^3x^{-(4k1k2)/3} = 1 \Rightarrow z^3x^{2(-(2k1k2)/3)} = 1$
$\Rightarrow k = -(2k_1k_2)/3$
Pošto $k_1 \leq 0$ i $k_2 \leq 0$, tada je $k \leq 0$.
Pošto $k_1 \geq -3/2$, $k_2 \geq -3/2$, tada je $k_1k_2 \leq 9/4$, pa je $k \geq -3/2$.
Sledi da je $z^3x^{2k} = 1$ za $k \in [-3/2, 0]$, t.j. $x\rho z$. Zato je ρ tranzitivna relacija na R^+.

$(\forall x \in R^+)\ x\rho 1 \Leftrightarrow x^{2k} = 1 \Rightarrow k = 0 \in [-3/2, 0]$
Element 1 je najveći element skupa (R^+, ρ).

4. Neka je relacija ρ definisana kao

$x \rho y \Leftrightarrow (5x + 4y) / 3y \in NP$,

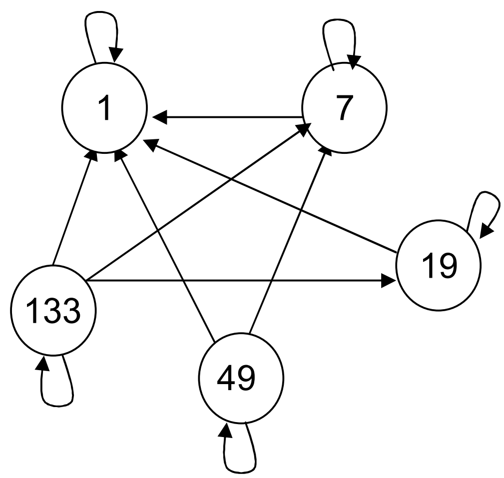
gde je NP skup svih neparnih prirodnih brojeva.

a) Pokazati da je ($\{$ 1, 7, 19, 49, 133 $\}$, ρ) parcijalno uređen skup. Da li je ovaj skup rešetka?

b) Da li je relacija ρ tranzitivna na skupu N ?

Rad:

a) $\rho = \{$ (1,1), (7,7), (19,19), (49,49), (133,133), (7,1), (19,1), (49,1), (133,1), (49,7) (133,7), (133,19) $\}$



Ovaj skup nije rešetka, jer podskup { 49, 133 } nema donje međe, pa ni infimum.

b) $x\rho y \wedge y\rho z \Leftrightarrow (\exists\, k_1 \in NP)\ 5x + 4y = 3k_1y \wedge (\exists\, k_2 \in NP)\ 5y + 4z = 3k_2z$

$\Rightarrow y = [\,(3k_2 - 4\,) / 5]\ z \Rightarrow 5x + 4[(3k_2 - 4\,) / 5]\ z = 3k_1[(3k_2 - 4\,)/5]z \Rightarrow 5x + 4z = [(9k_1k_2 - 12k_1 - 12k_2 + 36) / 5]\ z \Rightarrow$

$5x + 4z = 3[(3k_1k_2 - 4k_1 - 4k_2 + 12) / 5]\ z$

$k = (3k_1k_2 - 4k_1 - 4k_2 + 12) / 5 \notin N$ za $k_1, k_2 \in NP$, pa $k \notin NP$. Zato ρ nije tranzitivna.

5. Relacija ρ definisana je kao

$x \rho y \Leftrightarrow (\exists\, k \in N)\ x + y = kx$.

a) Dokazati da je (Z, ρ) parcijalno uređen skup.

b) Dokazati da su 1 i –1 minimalni elementi ovog skupa, a 0 naveći element ovog skupa.

c) Da li je (Z, ρ) rešetka?

Rad:

a) <u>Refleksivnost</u>

$(\forall x \in Z)\ x\rho x \Leftrightarrow x + x = kx \Rightarrow k = 2 \in N$

<u>Antisimetričnost</u>

$(\forall x, y \in Z)\ x\rho y \wedge y\rho x \Rightarrow x = y$

$x\rho y \wedge y\rho x \Leftrightarrow (\exists\, k_1 \in N)\ x + y = k_1x \wedge (\exists\, k_2 \in N)\ y + x = k_2y$

$\Rightarrow y = (k_1 - 1)x \Rightarrow (k_1 - 1)x + x = k_2(k_1 - 1)x \Rightarrow k_1k_2 - k_1 - k_2 = 0$

$\Rightarrow k_1 = k_2 = 2 \Rightarrow x + y = 2x \Rightarrow x = y$.

<u>Tranzitivnost</u>

$(\forall x, y, z \in Z)\ x\rho y \wedge y\rho z \Rightarrow x\rho z$
$x\rho y \wedge y\rho z \Leftrightarrow (\exists k_1 \in N)\ x + y = k_1x \wedge (\exists k_2 \in N)\ y + z = k_2y$
$\Rightarrow y = (k_1 - 1)x \Rightarrow (k_1 - 1)x + z = k_2(k_1 - 1)x$
$\Rightarrow x + z = [(k_1 - 1)(k_2 - 1) + 1]x$
$k = (k_1 - 1)(k_2 - 1) + 1 \in N$ za $k_1, k_2 \in N$, pa je ρ tranzitivna.

b) $1\rho x \Leftrightarrow (\exists k \in N)\ 1 + x = k \Rightarrow 1 + x \geq 1 \Rightarrow x \geq 0$
$x\rho 1 \Leftrightarrow (\exists k \in N)\ x + 1 = kx \Rightarrow x = 1/(k - 1) \notin Z$
Pošto je $(1, x) \in \rho$ za svaki nenegativni celi broj x, a $(x, 1) \notin \rho$ za sve cele brojeve različite od 1, sledi da je 1 minimalni element.

$-1\rho x \Leftrightarrow (\exists k \in N)\ -1 + x = -k \Rightarrow 1 - x \geq 1 \Rightarrow x \leq 0$
$x\rho -1 \Leftrightarrow (\exists k \in N)\ x - 1 = kx \Rightarrow x = (-1)/(k - 1) \notin Z$
Pošto je $(-1, x) \in \rho$ za svaki nenegativni celi broj x, a $(x, -1) \notin \rho$ za sve cele brojeve različite od -1, sledi da je -1 minimalni element.

$(\forall x \in Z)\ x\rho 0 \Leftrightarrow x + 0 = kx \Rightarrow k = 1 \in N$, pa je 0 najveći element.

c) (Z, ρ) nije rešetka.
Može se pokazati da skup $\{x, y\}$, gde su $x, y \in Z$ i $x * y < 0$, nema donjih međa, pa ni infimum. Stvarno, ako bi $a \in Z$ bila donja međa $\{x, y\}$, tada $a\rho x \wedge a\rho y \Leftrightarrow a + x = k_1a$ $\wedge\ a + y = k_2a$
$\Rightarrow x = (k_1 - 1)a \wedge y = (k_2 - 1)a \Rightarrow xy = (k_1 - 1)(k_2 - 1)a^2 \geq 0$, a to je suprotno od pretpostavke da je $x*y < 0$.

6. $x\ \rho\ y \Leftrightarrow (\exists k \in N \mid k \geq a + 2)\ x^{k-a}y^{-2} = 1$, gde je <u>a</u> fiksirani prirodni broj. Da li je (N, ρ) parcijalno uređen skup?
<u>Rešenje</u>: Da

7. $x\ \rho\ y \Leftrightarrow (\exists k \in N)\ x + y = 2ky$. Da li je (N, ρ) parcijalno uređen skup?
<u>Rešenje</u>: Da

8. $x\ \rho\ y \Leftrightarrow (\exists k \in N \wedge k > a)\ y = x^{k-a}$, gde je <u>a</u> fiksirani prirodni broj. Da li je (N, ρ) parcijalno uređen skup? Ako jeste, da li ima najveći element?
<u>Rešenje</u>: (N, ρ) je parcijalno uređen skup koji nema najveći element.

9. $x\ \rho\ y \Leftrightarrow$ ($\exists$ nepozitivan ceo broj k) $x - y = kx$. Da li je (Z, ρ) parcijalno uređen skup, gde je Z skup svih celih brojeva?
<u>Rešenje</u>: Da

10. Neka je ρ binarna relacija definisana kao
$x\ \rho\ y \Leftrightarrow (4x - y) / 3y \in N$
a) Dokazati da je $(\{1, 4, 7, 10, 25\}, \rho)$ parcijalno uređen skup.
b) Da li je (N, ρ) parcijalno uređen skup?
<u>Rešenje</u>: b) Da

11. $x \rho y \Leftrightarrow (\exists k \in P)\ x^4y^{2k} = 1$, gde je P skup svih celih nenegativnih parnih brojeva.

a) Da li je (R, ρ) parcijalno uređen skup ?
b) Dokazati da je ($\{\sqrt{2}, 2, 8, 32\}$, ρ) parcijalno uređen skup. Da li je on rešetka?

Rešenje: a) Ne, ρ nije antisimetrično u R;
b) Nije rešetka, jer ne postoji inf { 8, 32 }.

12. $x \rho y \Leftrightarrow (\exists k \in Z \text{ i } k \leq 0)\ x^k y^2 = 1$

a) Da li je (R, ρ) parcijalno uređen skup ?
b) Dokazati da je ($\{1, \sqrt{2}, 2, 8, 32\}$, ρ) parcijalno uređen skup i da je 1 najveći element tog skupa.

Rešenje: a) Ne, ρ nije antisimetrično u R.

13. $x \rho y \Leftrightarrow (3x + 5y) / 4y \in [2, 3]$

a) Da li je (S, ρ) parcijalno uređen skup na S = { 1, 3/2, 5/3, 2, 3 } ?
b) Ispitati da li je ρ antisimetrična relacija na R \ {0}.

Rešenje: a) Nije, jer nije tranzitivna; b) Jeste.

14. $x \rho y \Leftrightarrow (5x - y) / 2y \in A$, gde je A skup svih realnih brojeva ne manjih od 2.

a) Dokazati da je (S, ρ) parcijalno uređen skup ako je S skup svih delilaca broja 12. Odrediti najmanji i najveći element tog skupa. Da li je (S, ρ) rešetka?
b) Utvrditi da li je relacija ρ tranzitivna na skupu N.

Rešenje: a) Najmanji element je 12, a najveći 1. (S, ρ) je rešetka;
b) Jeste.

15. $x \rho y \Leftrightarrow (x + 5y) / 2y \in NP$, gde je NP skup svih celih pozitivnih neparnih brojeva ne manjih od 3.

a) Utvrditi da li je (R \ {0}, ρ) parcijalno uređen skup.
b) Da li je ({ 1, 9, 45, 81, 225 }, ρ) rešetka?

Rešenje: a) Jeste;
b) Nije, jer ne postoji inf { 45, 81 }.

16. $x \rho y \Leftrightarrow (2x + 4y) / 3y \in [0, 2]$

a) Dokazati da je (S, ρ) parcijalno uređen skup, ako je S = { 1/2, 1, 3/2, 2, 7 }. Naći sup i inf poskupa S_1 = { 1/2, 1, 3/2 }.
b) Ispitati da li je ρ tranzutuvna relacija na R.

Rešenje: a) inf S_1 = 1/2 (donja međa: 1/2); sup S_1 = 3/2 (gornje međe: 3/2, 2, 7)
b) Nije tranzitivna na R.

17. $x \rho y \Leftrightarrow (5x + 3y) / 4y \in [0, 3]$

a) Dokazati da je (S, ρ) parcijalno uređen skup ako je
$S = \{2/9, 1/2, 1, 2, 4\}$. Naći sup i inf podskupa $S_1 = \{2/9, 1/2, 1\}$.

b) Ispitati da li je ρ tranzitivna relacija na R.

Rešenje: a) $\inf S_1 = 2/9$ (donja međa: 2/9), $\sup S_1 = 1$ (gornje međe: 1, 2, 4)

b) Nije tranzitivna na R.

18. $x \rho y \Leftrightarrow (\exists k \in NP)\ x^3 y^k = 1$, gde je NP skup svih celih negativnih neparnih brojeva ne većih od –3.

a) Da li je (N, ρ) parcijalno uređen skup ?

b) Da li je (S, ρ) parcijalno uređen skup, ako je $S = \{\sqrt[5]{8}, 2, 8, 32\}$?

Rešenje: a) Da; b) Da.

19. $x \rho y \Leftrightarrow (\exists k \in NP)\ 7x + 3y = 2xk$, gde je NP skup svih neparnih prirodnih brojeva.

a) Da li je (S, ρ) relacija poretka, gde je $S = \{3, 7, 11, 35, 55\}$?

b) Da li je (N, ρ) parcijalno uređen skup?

Rešenje: a) Da; b) Nije, ne važi tranzitivnost.

20. $x \rho y \Leftrightarrow (4x + 2) / (2y + 1) \in P$, gde je P skup svih parnih prirodnih brojeva.

a) Da li je $(N \cup \{0\}, \rho)$ parcijalno uređen skup?

b) Ako jeste, odrediti njegov najveći element.

Rešenje: a) Da; b) Nejveći element je 0.

21. $x \rho y \Leftrightarrow (\exists k \in N)\ 3x + y = ky$

a) Dokazati da je $(\{2, 3, 4, 5, 8\}, \rho)$ parcijalno uređen skup.

c) Da li je (N, ρ) parcijalno uređen skup?

Rešenje: b) Nije, jer ρ nije tranzitivna.

22. $x \rho y \Leftrightarrow (\exists k \in N)\ x + 4y = 5ky$

a) Nacrtati graf koji odgovara (S, ρ), gde je $S = \{1, 6, 11, 36, 66\}$.
Na osnovu grafa utvrditi da je (S, ρ) parcijalno uređen skup.

b) Dokazati da je (N, ρ) parcijalno uređen skup i da je 7 njegov maksimalni element.

23. $x \rho y \Leftrightarrow (\exists k \in N \cup \{0\})\ y = x^{k+1}$

a) Da li je (N, ρ) parcijalno uređen skup?

b) Ako je $S = \{2, 4, 8, 64\}$ naći najveći i najmanji element (S, ρ). Da li je (S, ρ) rešetka?

Rešenje: a) Da;

b) Najveći element: 64, najmanji element: 2; (S, ρ) je rešetka.

24. $x \rho y \Leftrightarrow (\exists k \in [0, 1))\ y = x^{2k}$

a) Dokazati da je (S, ρ) parcijalno uređen skup, gde je $S = \{1/8, 1/2, 1, 3/2, 27/8\}$. Naći inf i sup skupa $S_1 = \{1/8, 27/8\}$, ako postoje.

b) Da li je (R^+, ρ) parcijalno uređen skup, gde je R^+ skup svih pozitivnih realnih brojeva?

Rešenje: a) sup $S_1 = 1$, inf S_1 ne postoji;

b) Nije, jer ρ nije tranzitivna.

25. $x \rho y \Leftrightarrow (\exists k \in Z \text{ i } k < 0)\ y - 3x = ky$

b) Dokazati da je $(\{1, 2, 3, 4, 7\}, \rho)$ parcijalno uređen skup.

d) Da li je ρ tranzitivna na čitavom skupu N?

Rešenje: b) Nije.