
презиме и име студента

број индекса

1. У зависности од реалног параметра a решити систем

$$\begin{array}{rcccccl} (a-1)x & + & y & + & z & = & a^2 - 2a + 2 \\ x & + & (a-1)y & + & z & = & 2a - 2 \\ x & + & y & + & (a-1)z & = & a^2 - a. \end{array}$$

2. Дате су права a и раван β у простору:

$$a: \frac{x-1}{4} = \frac{y+2}{-3} = \frac{z-3}{1} \quad \text{и} \quad \beta: x + 3y - 2z - 3 = 0.$$

а) Одредити вектор правца \vec{v}_a праве a и вектор нормале \vec{n}_β равни β .

б) Одредити произвољне тачке $A \in a$ и $B \in \beta$.

в) Одредити међусобни положај праве a и равни β .

г) Одредити праву c која је симетрична правој a у односу на раван β .

3. Дата је функција
$$g(x) = \begin{cases} \frac{e^{3x} - \cos 2x - 3x - \frac{13}{2}x^2}{x^3}, & x \neq 0 \\ K, & x = 0 \end{cases}.$$

а) Одредити Маклоренове полиноме трећег степена функција e^{3x} и $\cos 2x$.

б) Израчунати $\lim_{x \rightarrow 0} g(x)$.

в) У зависности од параметра K испитати да ли је функција $g(x)$ непрекидна.

4. Испитати ток и скицирати график функције

$$f(x) = \frac{x+3}{\ln^2(x+3)}.$$

презиме и име студента

број индекса

1. У зависности од реалних параметара a и b решити систем

$$\begin{array}{rrrrrr} x & - & 2y & - & z & - & 2t & = & -3 \\ 2x & - & 3y & + & (a+2)z & - & t & = & b+4 \\ 3x & - & 7y & + & (2a+2)z & + & (b-3)t & = & 2b+2 \end{array}$$

2. Дате су права a и раван β у простору:

$$a: \frac{x+2}{3} = \frac{y-1}{5} = \frac{z-3}{1} \quad \text{и} \quad \beta: x - y + 2z - 9 = 0.$$

а) Одредити вектор правца \vec{v}_a праве a и вектор нормале \vec{n}_β равни β .

б) Одредити произвољне тачке $A \in a$ и $B \in \beta$.

в) Одредити међусобни положај праве a и равни β .

г) Одредити праву c која је симетрична правој a у односу на раван β .

3. Дата је функција
$$g(x) = \begin{cases} \frac{2 \ln(1+3x) - \sin 2x - 4x + 9x^2}{x^3}, & x \neq 0 \\ K, & x = 0 \end{cases}.$$

а) Одредити Маклоренове полиноме трећег степена функција $\ln(1+3x)$ и $\sin 2x$.

б) Израчунати $\lim_{x \rightarrow 0} g(x)$.

в) У зависности од параметра K испитати да ли је функција $g(x)$ непрекидна.

4. Испитати ток и скицирати график функције

$$f(x) = \frac{x^3}{x^2 + 3x + 3}.$$

презиме и име студента

број индекса

1. (25 поена) Испитати конвергенцију низа (a_n) чији је општи члан задат са

$$a_n = \frac{2 \cdot (-5)^n + 3^n}{(-5)^{n+2} + 4 \cdot 3^{n+1}}$$

и одредити граничну вредност $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ ако постоји.

2. (25 поена) Дата је функција $g(x) = \begin{cases} \frac{e^{3x} - \cos 2x - 3x - \frac{13}{2}x^2}{x^3}, & x \neq 0 \\ K, & x = 0 \end{cases}$.

а) Одредити Маклоренове полиноме трећег степена функција e^{3x} и $\cos 2x$.

б) Израчунати $\lim_{x \rightarrow 0} g(x)$.

в) У зависности од параметра K испитати да ли је функција $g(x)$ непрекидна.

3. (50 поена) Испитати ток и скицирати график функције

$$f(x) = \frac{x+3}{\ln^2(x+3)}.$$

II Поправни 2. део испита из математике 1 II
19. јануар 2011.
II група

презиме и име студента

број индекса

- 1.** (25 поена) Испитати конвергенцију низа (a_n) чији је општи члан задат са

$$a_n = \frac{1}{3 \cdot 7} + \frac{1}{7 \cdot 11} + \frac{1}{11 \cdot 15} + \dots + \frac{1}{(4n-1) \cdot (4n+3)}$$

и одредити граничну вредност $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ ако постоји.

- 2.** (25 поена) Дата је функција
$$g(x) = \begin{cases} \frac{2 \ln(1+3x) - \sin 2x - 4x + 9x^2}{x^3}, & x \neq 0 \\ K, & x = 0 \end{cases}.$$

а) Одредити Маклоренове полиноме трећег степена функција $\ln(1+3x)$ и $\sin 2x$.

б) Израчунати $\lim_{x \rightarrow 0} g(x)$.

в) У зависности од параметра K испитати да ли је функција $g(x)$ непрекидна.

- 3.** (50 поена) Испитати ток и скицирати график функције

$$f(x) = \frac{x^3}{x^2 + 3x + 3}.$$

Резултати и упутства

I група писмени

1. Детерминанта система је $\Delta = a^3 - 3a^2 + 4 = (a+1)(a-2)^2$ и одатле већ видимо да ћемо имати 3 случаја: 1° $a \neq 2, -1$ (и тад систем има јединствено решење); 2° $a = 2$ и 3° $a = -1$.
Остале детерминанте су:

$$\Delta_x = a^4 - 5a^3 + 7a^2 - 4 = (a^2 - a - 1)(a - 2)^2, \quad \Delta_y = a^2 - 4a + 4 = (a - 2)^2, \quad \Delta_z = a^4 - 4a^3 + 4a^2 = a^2(a - 2)^2.$$

Одавде се добија да:

1° за $a \neq 2, -1$ систем има јединствено решење: $(x, y, z) = \left(\frac{a^2 - a - 1}{a + 1}, \frac{1}{a + 1}, \frac{a^2}{a + 1} \right)$;

2° за $a = 2$ систем се своди на једначину $x + y + z = 2$, па систем има бесконачно много решења, која зависе од 2 параметра: $(x, y, z) = (2 - \alpha - \beta, \alpha, \beta)$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$;

3° за $a = -1$ је $\Delta = 0$, а $\Delta_x = 9 \neq 0$, па систем нема решења.

Задатак је сличан са задатком 2.69 в) из „Методичке збирке решених задатака из Математике I“!
Проучити оба решења!!!

2. $a: \frac{x-1}{4} = \frac{y+2}{-3} = \frac{z-3}{1}$ и $\beta: x + 3y - 2z - 3 = 0$.

а) Вектор правца $\vec{v}_a = (4, -3, 1)$ и вектор нормале $\vec{n}_\beta = (1, 3, -2)$.

б) Произвољне тачке су: $A(1, -2, 3) \in a$ и $B(0, 1, 0) \in \beta$.

в) Како је $\vec{v}_a \cdot \vec{n}_\beta = -7 \neq 0$ права a и раван β се секу.

г) Да би одредили праву s која је симетрична правој a у односу на равни β , потребно је да одредимо 2 њене тачке. Једна од њих може бити продор $P(-7, 4, 1)$, а друга тачка $C(3, 4, -1)$ која је симетрична тачки $A(1, -2, 3)$ у односу на раван β . Тажена права је $c: \frac{x-3}{5} = \frac{y-4}{0} = \frac{z+1}{-1}$.

Задатак је сличан са задатком 4.33 из „Методичке збирке решених задатака из Математике I“!

$$3. g(x) = \begin{cases} \frac{e^{3x} - \cos 2x - 3x - \frac{13}{2}x^2}{x^3}, & x \neq 0 \\ K, & x = 0 \end{cases}.$$

а) Функцији e^{3x} одговара Маклоренов полином $T_3(x) = 1 + 3x + \frac{9}{2}x^2 + \frac{9}{2}x^3$, а функцији $\cos 2x$ одговара $T_3(x) = 1 - 2x^2$.

$$б) \lim_{x \rightarrow 0} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + 3x + \frac{9}{2}x^2 + \frac{9}{2}x^3 + o(x^3) - (1 - 2x^2 + o(x^3)) - 3x - \frac{13}{2}x^2}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{9}{2} + o(1) = \frac{9}{2}.$$

в) За $K = \frac{9}{2}$ функција $g(x)$ је непрекидна, а за $K \neq \frac{9}{2}$ има прекид у тачки $x = 0$.

Сличан са задацима 8.33 и 8.34 из „Методичке збирке решених задатака из Математике I“!
Проучити оба решења!!!

4. Функција

$$y(x) = \frac{x+3}{\ln^2(x+3)}.$$

1° Домен је $D_y = (-3, -2) \cup (-2, +\infty)$.

2° Нема нула. Знак: за све вредности $x \in D_y$ је $y > 0$. Пресек са y -осом је $Y(0, \frac{3}{\ln^2 3})$.

3° Није ни парна ни непарна (јер домен D_y није симетричан у односу на $x = 0$), ни периодична (следи на основу 5° јер се монотони делови не понављају периодично).

4° $\lim_{x \rightarrow -3^+} y(x) = 0 \Rightarrow$ права $x = -3$ није вертикална асимптота.

$\lim_{x \rightarrow -2^-} y(x) = +\infty, \lim_{x \rightarrow -2^+} y(x) = +\infty \Rightarrow$ има вертикалну асимптоту (са обе стране) $x = -2$.

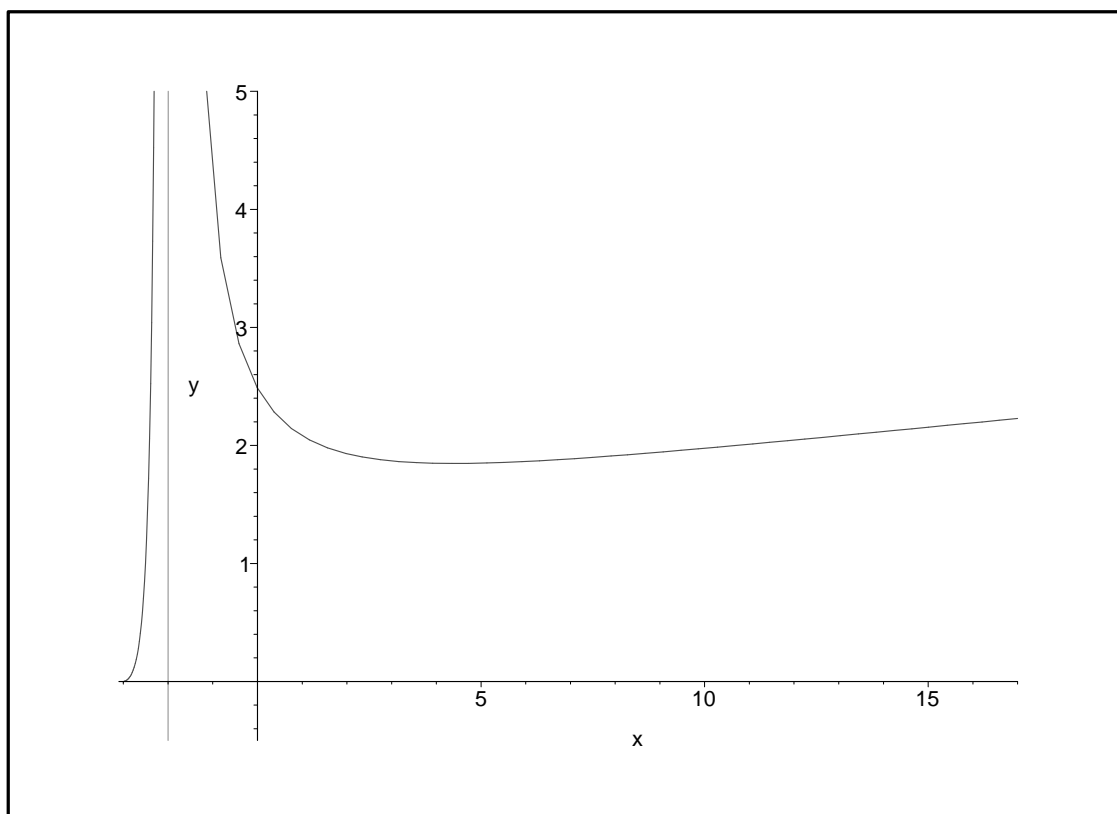
$\lim_{x \rightarrow +\infty} y(x) = +\infty \Rightarrow$ нема десну хоризонталну асимптоту.

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{y(x)}{x} = 0 \Rightarrow$ нема десну косу асимптоту.

Леву хоризонталну и леву косу асимптоту нема због домена D_y .

5° $y' = \frac{\ln(x+3) - 2}{\ln^3(x+3)}$. Монотоност: $x \in (-3, -2) \nearrow (-2, \boxed{e^2 - 3}) \searrow \nearrow$. Локални минимум је $M(e^2 - 3, \frac{e^2}{4})$.

6° $y'' = \frac{6 - 2\ln(x+3)}{(x+3)\ln^4(x+3)}$. Конвексност: $x \in (-3, -2) \cup (\boxed{e^2 - 3}, \infty) \cap$. Превојна тачка је $P(e^3 - 3, \frac{e^3}{9})$.



Сличан са Примером 9.2 (стр. 126–130) из „Методичке збирке решених задатака из Математике I“!

II група писмени

1. Степенаст облик је

$$\begin{array}{rclclcl} x & - & 2y & - & z & - & 2t & = & -3 \\ & & y & + & (a+4)z & + & 3t & = & b+10 \\ & & & & (3a+9)z & + & (b+6)t & = & 3b+21 \end{array}$$

Одавде се добија да:

1° за $a = -3$, $b = -6$ трећа једначина је $0 = 3$, па систем нема решења;

2° за $a \neq -3$ систем има бесконачно много решења, која зависе од 1 параметра:

$$(x, y, z) = \left(\frac{9a+6+2ab\alpha-3b+6\alpha+7b\alpha}{3(a+3)}, \frac{-3a\alpha+9a+ab\alpha-3b-3\alpha+6+4b\alpha}{3(a+3)}, \frac{3b-6\alpha+21-b\alpha}{3(a+3)}, \alpha \right), \alpha \in \mathbb{R};$$

3° за $a = -3$, $b \neq -6$ систем има бесконачно много решења, која зависе од 1 параметра:

$$(x, y, z) = \left(\frac{17b+18-b\beta-6\beta+2b^2}{b+6}, \frac{7b-3-b\beta-6\beta+b^2}{b+6}, \beta, \frac{3(b+7)}{b+6} \right), \beta \in \mathbb{R}.$$

Задатак је сличан са задатком 2.84 (решење је под бројем 2.86) из „Методичке збирке решених задатака из Математике I“!

2. $a: \frac{x+2}{3} = \frac{y-1}{5} = \frac{z-3}{1}$ и $\beta: x - y + 2z - 9 = 0$.

а) Вектор правца $\vec{v}_a = (3, 5, 1)$ и вектор нормале $\vec{n}_\beta = (1, -1, 2)$.

б) Произвољне тачке су: $A(-2, 1, 3) \in a$ и $B(9, 0, 0) \in \beta$.

в) Како је $\vec{v}_a \cdot \vec{n}_\beta = 0$ и $A \notin \beta$ (јер је $(-2) - 1 + 2 \cdot 3 - 9 = -6 \neq 0$) права a и раван β су паралелне.

г) Да би одредили праву c која је симетрична правој a у односу на равни β , потребно је да одредимо 2 њене тачке. Једна од њих може бити тачка $C(0, -1, 7)$ која је симетрична тачки $A(-2, 1, 3)$ у односу на раван β , а друга је тачка $N(3, 4, 8)$ која је симетрична тачки $M(1, 6, 4)$ у односу на раван β . Једноставнији начин је да одредимо само једну тачку – то исто као у претходном може бити $C(0, -1, 7)$, а како је $a \parallel \beta$ то ће бити и $a \parallel c$, тј. $\vec{v}_a = \vec{v}_c$.

Тажена права је $c: \frac{x}{3} = \frac{y+1}{5} = \frac{z-7}{1}$.

Задатак је сличан са задатком 4.33 из „Методичке збирке решених задатака из Математике I“, само овде треба применити 1–2 пута задатак 4.31!

3. $g(x) = \begin{cases} \frac{2 \ln(1+3x) - \sin 2x - 4x + 9x^2}{x^3}, & x \neq 0 \\ K, & x = 0 \end{cases}$.

а) Функцији $\ln(1+3x)$ одговара Маклоренов полином $T_3(x) = 3x - \frac{9}{2}x^2 + 9x^3$, а функцији $\sin 2x$ одговара $T_3(x) = 2x - \frac{4}{3}x^3$.

б) $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2(3x - \frac{9}{2}x^2 + 9x^3 + o(x^3)) - (2x - \frac{4}{3}x^3 + o(x^3)) - 4x + 9x^2}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{58}{3} + o(1) = \frac{58}{3}$.

в) За $K = \frac{58}{3}$ функција $g(x)$ је непрекидна, а за $K \neq \frac{58}{3}$ има прекид у тачки $x = 0$.

Сличан са задацима 8.33 и 8.34 из „Методичке збирке решених задатака из Математике I“! Проучити оба решења!!!

4. Функција

$$y(x) = \frac{x^3}{x^2 + 3x + 3}.$$

1° Домен је $D_y = (-\infty, +\infty)$.

2° Нула је $x = 0$. Знак: за $x > 0$ је $y > 0$, а за $x < 0$ је $y < 0$. Пресек са y -осом је $Y(0, 0)$.

3° Није ни парна (јер је $f(1) = \frac{1}{7} \neq f(-1) = -1$), ни непарна (јер је $f(1) = \frac{1}{7} \neq -f(-1) = 1$), ни периодична (следи на основу 5° јер је функција монотono растућа на целом D_y).

4° Вертикалних асимптота нема јер нема прекида у домену.

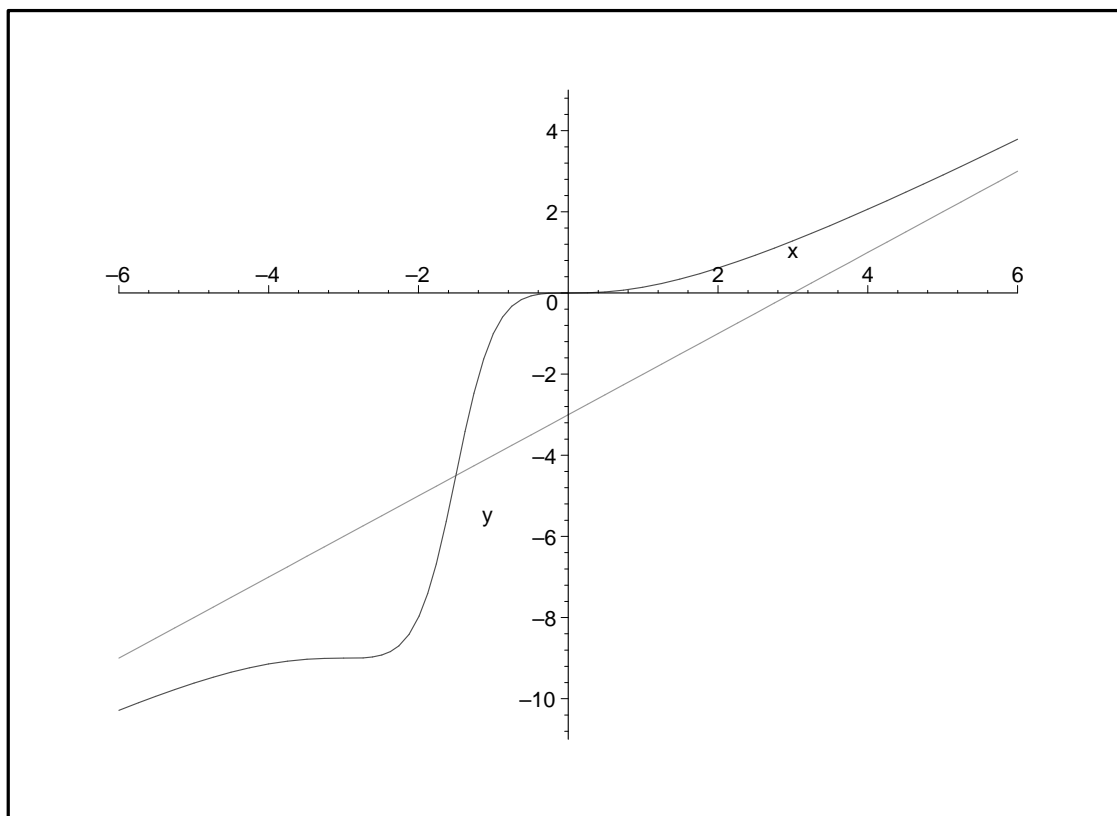
$\lim_{x \rightarrow -\infty} y(x) = -\infty \Rightarrow$ нема леву хоризонталну асимптоту.

$\lim_{x \rightarrow +\infty} y(x) = +\infty \Rightarrow$ нема десну хоризонталну асимптоту.

$k = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{y(x)}{x} = 1$, $n = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} y(x) - k \cdot x = -3 \Rightarrow$ има обострану косу асимптоту $y = x - 3$.

5° $y' = \frac{x^2(x+3)^2}{(x^2+3x+3)^2}$. Монотоност: свуда расте, \nearrow . Локалних екстрема нема.

6° $y'' = \frac{6x(x+3)(2x+3)}{(x^2+3x+3)^3}$. Конвексност: $\cap [-3] \cup [-3/2] \cap [e^2 - 3] \cup$. Превојне тачке су: $P_1(-3, \frac{e^3}{9})$, $P_1(-\frac{3}{2}, -\frac{9}{2})$ и $P_3(0, 0)$.



Сличан са задатком 9.14 из „Методичке збирке решених задатака из Математике I“!

I група поправни 2. део

$$1. \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 \cdot (-5)^n + 3^n}{(-5)^{n+2} + 4 \cdot 3^{n+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-5)^n \cdot (2 + (-\frac{3}{5})^n)}{(-5)^{n+2} \cdot (1 - \frac{4}{5} \cdot (-\frac{3}{5})^{n+1})} = \frac{2 + 0}{(-5)^2 \cdot (1 - \frac{4}{5} \cdot 0)} = \frac{2}{25}.$$

Како овај низ има коначну граничну вредност он конвергира.

Задатак је сличан са задатком 5.2 и) из „Методичке збирке решених задатака из Математике 1“!

2. Видети 3. задатак са писменог – I група.

3. Видети 4. задатак са писменог – I група.

II група поправни 2. део

$$\begin{aligned} 1. \lim_{n \rightarrow \infty} a_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{3 \cdot 7} + \frac{1}{7 \cdot 11} + \frac{1}{11 \cdot 15} + \dots + \frac{1}{(4n-1) \cdot (4n+3)} = \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{4} \left(\frac{4}{3 \cdot 7} + \frac{4}{7 \cdot 11} + \frac{4}{11 \cdot 15} + \dots + \frac{4}{(4n-1) \cdot (4n+3)} \right) &= \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{4} \left(\frac{7-3}{3 \cdot 7} + \frac{11-7}{7 \cdot 11} + \frac{15-11}{11 \cdot 15} + \dots + \frac{(4n+3)-(4n-1)}{(4n-1) \cdot (4n+3)} \right) &= \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{4} \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{7} + \frac{1}{7} - \frac{1}{11} + \frac{1}{11} - \frac{1}{15} + \dots + \frac{1}{4n-1} - \frac{1}{4n+3} \right) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{4} \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4n+3} \right) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{12}. \end{aligned}$$

Како овај низ има коначну граничну вредност он конвергира.

Напомена. За овај низ се може показати да је монотонно растући и ограничен (као у задатку 5.6 в)), на основу чега следи да је он конвергентан, али како онда треба одредити и граничну вредност $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$, лакши је претходни начин!

Сличан са задацима 5.6 в) и 5.3 б) из „Методичке збирке решених задатака из Математике 1“!

2. Видети 3. задатак са писменог – II група.

3. Видети 4. задатак са писменог – II група.