

ФУНКЦИЈЕ КОМПЛЕКСНЕ ПРОМЕНЛИВЕ

① ИСПИТАТИ ДА ЛИ ПОСТОЈИ $\lim_{z \rightarrow 0} f(z)$ АКО ЈЕ $f(z) = \frac{xy}{x^2+y^2} + ixy$

РЕШЕЊЕ: $\lim_{x \rightarrow 0, y \rightarrow 0} \frac{xy}{x^2+y^2} = 0$, $\lim_{x=y \rightarrow 0} \frac{xy}{x^2+y^2} = \frac{1}{2} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0, y \rightarrow 0} \frac{xy}{x^2+y^2}$ НЕ ПОСТОЈИ $\Rightarrow \lim_{z \rightarrow 0} f(z)$ НЕ ПОСТОЈИ

② ИСПИТАТИ ДИФЕРЕНЦИЈАБИЛНОСТ Ф-ЈЕ $f(z) = \begin{cases} \frac{x^{5/3}y^{5/3}}{x^2+y^2} + i \frac{x^{5/3}y^{4/3}}{x^2+y^2}, & z \neq 0 \\ 0, & z = 0 \end{cases}$ У ТАЧ. $z=0$.

РЕШЕЊЕ: $f'(0) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(\Delta z) - f(0)}{\Delta z}$, $\Delta z = x+iy$

$$= \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{\left(\frac{x^{5/3}y^{5/3}}{x^2+y^2} + i \frac{x^{5/3}y^{4/3}}{x^2+y^2} \right) - 0}{x+iy} \cdot \frac{x-iy}{x-iy} = \dots = \lim_{x \rightarrow 0, y \rightarrow 0} \frac{(xy)^{5/3} (x^{2/3} + y^{2/3}) + i (xy)^{4/3} (x^{1/3} - y^{1/3})}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{(xy)^{5/3} (x^{2/3} + y^{2/3})}{(x^2+y^2)^2} = 0, \lim_{x=y \rightarrow 0} \frac{(xy)^{5/3} (x^{2/3} + y^{2/3})}{(x^2+y^2)^2} = \frac{1}{2} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0, y \rightarrow 0} \frac{(xy)^{5/3} (x^{2/3} + y^{2/3})}{(x^2+y^2)^2} \text{ НЕ ПОСТОЈИ } \Rightarrow f'(0) \text{ НЕ ПОСТОЈИ,}$$

ТЈ. $f(z)$ НИЈЕ ДИФЕР. У $z=0$.

③ ОДРЕДИТИ АНАЛИТИЧКУ Ф-ЈУ $f(z) = u+iv$ АКО ЈЕ $u = \frac{x(1+x)+y^2}{(1+x)^2+y^2}$, А $f(0)=1$.

РЕШЕЊЕ: ЗА АНАЛИТ. Ф-ЈУ $f(z) = u+iv$ СУ ИСПУЊЕНИ К-Р УСЛОВИ:

$$\Rightarrow v'_y = u'_x = \dots = \frac{(1+x)^2 - y^2}{[(1+x)^2 + y^2]^2} \quad (1), \quad v'_x = -u'_y = \dots = -\frac{2(1+x)y}{[(1+x)^2 + y^2]^2} \quad (2)$$

$$(2) \Rightarrow v = \int v'_x dx + \varphi(y) = -y \int \frac{2(1+x) \cdot dx}{[(1+x)^2 + y^2]^2} + \varphi(y) \xrightarrow{(1+x)^2 + y^2 = t} -y \int \frac{dt}{t^2} + \varphi(y) = \frac{y}{t} + \varphi(y) = \frac{y}{(1+x)^2 + y^2} + \varphi(y)$$

$$\Rightarrow v'_y = \dots = \frac{(1+x)^2 - y^2}{[(1+x)^2 + y^2]^2} + \varphi'(y) \stackrel{(1)}{=} \frac{(1+x)^2 - y^2}{[(1+x)^2 + y^2]^2} \Rightarrow \varphi'(y) = 0 \Rightarrow \varphi(y) = C \Rightarrow v = \frac{y}{(1+x)^2 + y^2} + C \quad (3)$$

$$\Rightarrow f(z) = u+iv = \frac{x(1+x)+y^2}{(1+x)^2+y^2} + i \frac{y}{(1+x)^2+y^2} + C = \frac{(x+iy)(x+1-iy)}{(x+iy)(x+1+iy)} + iC = \frac{z}{z+1} + iC. \text{ Из } f(0) = 1+iC = 1 \Rightarrow C=0, \text{ ТЈ. } f(z) = \frac{z}{z+1}$$

④ ИЗРАЧУНАТИ $\int_C \frac{z}{z^2-1} dz$ АКО ЈЕ C ПРАНИЦА ОБЛАСТИ $D = \{z \mid 1 < |z| < 2, \operatorname{Re}(z) > 0\}$.

РЕШЕЊЕ: $C_1: z = 2e^{it}, t \in [0, \pi/2] \Rightarrow \int_{C_1} \frac{z}{z^2-1} dz = \int_0^{\pi/2} \frac{2e^{it}}{4e^{2it}-1} 2ie^{it} dt = 2 \int_0^{\pi/2} \frac{e^{-it}}{4e^{2it}-1} dt = -2e^{-it} \Big|_0^{\pi/2} = -2(e^{-i\pi/2} - e^{-i0}) = -2(i-1) = -4i$

$C_2: z = iy, y \in [1, 2] \Rightarrow \int_{C_2} \frac{z}{z^2-1} dz = \int_1^2 \frac{iy}{-y^2-1} idy = -i \int_1^2 \frac{dy}{y^2+1} = -i \left[\arctan y \right]_1^2 = -i(1+2) = -3i$

$C_3: z = e^{it}, t \in [\pi/2, \pi] \Rightarrow \int_{C_3} \frac{z}{z^2-1} dz = \int_{\pi/2}^{\pi} \frac{e^{it}}{e^{2it}-1} ie^{it} dt = \int_{\pi/2}^{\pi} \frac{e^{-it}}{e^{2it}-1} dt = -e^{-it} \Big|_{\pi/2}^{\pi} = -e^{-i\pi} + e^{-i\pi/2} = -(-1) + i = 2i$

$C_4: z = iy, y \in [2, 1] \Rightarrow \int_{C_4} \frac{z}{z^2-1} dz = \int_2^1 \frac{iy}{-y^2-1} idy = -i \int_2^1 \frac{dy}{y^2+1} = -i(1-2) = i$

$$\Rightarrow \int_C \frac{z}{z^2-1} dz = \int_{C_1} \frac{z}{z^2-1} dz + \int_{C_2} \frac{z}{z^2-1} dz + \int_{C_3} \frac{z}{z^2-1} dz + \int_{C_4} \frac{z}{z^2-1} dz = -4i - 3i + 2i - i = -4i$$

⑤ ИЗРАЧУНАТИ $\int_C \frac{z^2 dz}{(z^2-1)(z-1)^2}$ ГДЕ ЈЕ C КРИВА (ЗАТВОРЕНА) КОЈА НЕ САДРЖИ ТАЧКЕ 1 И -1.

РЕШЕЊЕ: $f(z) = \frac{z^2}{(z-1)(z+1)(z-1)^2} = \frac{z^2}{(z+1)(z-1)^3}$. Како је $\lim_{z \rightarrow -1} f(z) = \infty, \lim_{z \rightarrow 1} f(z) = \infty$ И $\lim_{z \rightarrow 1} (z+1)f(z) =$

$$= \lim_{z \rightarrow 1} \frac{z^2}{(z-1)^2} = \infty \neq 0, \lim_{z \rightarrow 1} (z-1)^3 f(z) = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{z^2}{z+1} = \frac{1}{2} \neq 0, \text{ СЛЕДЊИ } z=-1 \text{ ЈЕ ПОЛ } \pi\text{-ПОР } \text{ А } z=1 \text{ ПОЛ}$$

$$\text{ТРЕЋИ РЕД: } \Rightarrow \operatorname{Res}[f(z), -1] = \lim_{z \rightarrow -1} (z+1)f(z) = -\frac{1}{8}, \operatorname{Res}[f(z), 1] = \frac{1}{2!} \lim_{z \rightarrow 1} ((z-1)^3 f(z))' =$$

$$= \frac{1}{2} \lim_{z \rightarrow 1} \left(\frac{z^2}{(z-1)^2} \right)' = \dots = \frac{1}{2} \lim_{z \rightarrow 1} \frac{2z}{(z-1)^3} = \frac{1}{8}. \text{ НАЈЗНАД, АКО ЈЕ } D \text{ ОБЛАСТ КОЈУ ОГРАНИЧАВА КРИВА } C:$$

$$\Rightarrow \oint_C f(z) dz = 2\pi i \cdot \sum \operatorname{Res}(f(z), z_i) = 2\pi i \cdot \begin{cases} -\frac{1}{8}, -1 \in D, 1 \notin D \\ \frac{1}{8}, 1 \in D, -1 \notin D \\ -\frac{1}{8} + \frac{1}{8}, \{1, -1\} \in D \vee \{1, -1\} \notin D \end{cases} = \begin{cases} -\pi i/4, -1 \in D, 1 \notin D \\ \pi i/4, 1 \in D, -1 \notin D \\ 0, \{1, -1\} \subset D \text{ или } \{1, -1\} \not\subset D \end{cases}$$

6) ИЗРАЧУНАТИ $\int_{C^+} \frac{\operatorname{tg} z}{z+1} dz$, АКО ЈЕ $C = \{z \mid |z| = \pi\}$.

РЕШЕЊЕ: $f(z) = \frac{\sin z}{(z+1)\cos z}$ ИМА СИНГУЛАРНОСТЕ У ТАКАМА: $z+1=0$ И $\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow z_1 = -1$ И $e^{iz} = -e^{-iz} \Leftrightarrow z = -1$ И $e^{2iz} = -1 \Leftrightarrow z = -1$ И $\operatorname{Ln} e^{2iz} = \operatorname{Ln}(-1) \Leftrightarrow z = -1$ И $2iz = i(\pi + 2k\pi) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow z_1 = -1$ И $z = \frac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow z_1 = -1, z_2 = \frac{\pi}{2}, z_3 = -\frac{\pi}{2}$ СИНГ. ТАЧКЕ КОЈЕ ПРИПАДАЈУ ДАТОЈ ОБЛАСТИ.

ПОЈСТО СУ ОБИ СИНГУЛАРНОСТИ ПОЈОБЛИ ПРВОГ РЕДА, ИМАМО:

$$\operatorname{Res}[f(z), -1] = \lim_{z \rightarrow -1} (z+1)f(z) = \lim_{z \rightarrow -1} \frac{\sin z}{\cos z} = \frac{\sin(-1)}{\cos(-1)} = \operatorname{tg}(-1) = -\operatorname{tg} 1$$

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}[f(z), \frac{\pi}{2}] &= \lim_{z \rightarrow \frac{\pi}{2}} (z - \frac{\pi}{2})f(z) = \lim_{z \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{(z - \frac{\pi}{2})}{\cos z} \cdot \sin z = \lim_{z \rightarrow \frac{\pi}{2}} \sin z \cdot \lim_{z \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{z - \frac{\pi}{2}}{\cos z} \stackrel{\text{ЛОП.Т.}}{=} \sin \frac{\pi}{2} \cdot \lim_{z \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1}{- \sin z} = \\ &= \frac{\sin \pi/2}{- \sin \pi/2} = \frac{1}{-1} = -1 \end{aligned}$$

$$\operatorname{Res}[f(z), -\frac{\pi}{2}] = \lim_{z \rightarrow -\pi/2} (z + \frac{\pi}{2})f(z) = \lim_{z \rightarrow -\pi/2} \sin z \cdot \lim_{z \rightarrow -\pi/2} \frac{z + \pi/2}{\cos z} \stackrel{\text{ЛОП.Т.}}{=} \sin(-\frac{\pi}{2}) \cdot \lim_{z \rightarrow -\pi/2} \frac{1}{- \sin z} = \frac{\sin(-\pi/2)}{- \sin(-\pi/2)} = \frac{-1}{1} = -1$$

$$\Rightarrow \int_{C^+} \frac{\operatorname{tg} z}{z+1} dz = 2\pi i (\operatorname{Res}[f(z), -1] + \operatorname{Res}[f(z), \frac{\pi}{2}] + \operatorname{Res}[f(z), -\frac{\pi}{2}]) = 2\pi i (-\operatorname{tg} 1 - 1 - 1) = \underline{\underline{-2\pi i (2 + \operatorname{tg} 1)}}$$