

1) Одредићи Лапласову трансформацију ф-је $f(t) = \sin 2t \cdot \cos 5t$.

Решење: $f(t) = \frac{1}{2}(\sin(2t+5t) + \sin(2t-5t)) = \frac{1}{2}\sin 7t - \frac{1}{2}\sin 3t \xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{1}{2}\left(\frac{7}{s^2+7^2} - \frac{3}{s^2+3^2}\right)$.

2) Одредићи Лапласову трансформацију ф-је $f(t) = \begin{cases} 2, & 0 \leq t < 1 \\ 3t, & 1 \leq t < 2 \\ 4e^t, & 2 \leq t \end{cases}$.

Решење: $f(t) = 2 \cdot [u(t) - u(t-1)] + 3t[u(t-1) - u(t-2)] + 4e^t[u(t-2)] =$

$= 2 \cdot u(t) + (3t-2) \cdot u(t-1) + (4e^t - 3t) \cdot u(t-2)$

$= 2 \cdot u(t) + [3(t-1)+1] \cdot u(t-1) + [4e^2 \cdot e^{t-2} - 3(t-2) - 6] \cdot u(t-2)$

Како је $\mathcal{L}[2] = \frac{2}{s}$, $\mathcal{L}[3t+1] = \frac{3}{s^2} + \frac{1}{s}$, $\mathcal{L}[4e^2 e^t - 3t - 6] = 4e^2 \frac{1}{s-1} - \frac{3}{s^2} - \frac{6}{s}$, дакле:

$\mathcal{L}[f(t)] = e^{-0s} \cdot \frac{2}{s} + e^{-1s} \cdot \left(\frac{3}{s^2} + \frac{1}{s}\right) + e^{-2s} \cdot \left(\frac{4e^2}{s-1} - \frac{3}{s^2} - \frac{6}{s}\right) = \frac{2}{s} + \frac{s+3}{s^2} e^{-s} + \left(\frac{4e^2}{s-1} - 3 \cdot \frac{2s+1}{s^2}\right) e^{-2s}$.

3) Одредићи Лапласову трансформацију ф-је $f(t) = \int_0^t (e^{-3x} \cos 2x + e^{4x} \sin 2x) dx$

Решење: $\cos 2t \xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{s}{s^2+2^2} \Rightarrow e^{-3t} \cos 2t \xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{s+3}{(s+3)^2+2^2} = \frac{s+3}{s^2+6s+5}$

$\sin 2t \xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{2}{s^2+2^2} \Rightarrow e^{4t} \sin 2t \xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{2}{(s-4)^2+2^2} = \frac{2}{s^2-8s+20}$

$\Rightarrow e^{-3t} \cos 2t + e^{4t} \sin 2t \xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{s+3}{s^2+6s+5} + \frac{2}{s^2-8s+20} \Rightarrow \int_0^t (e^{-3x} \cos 2x + e^{4x} \sin 2x) dx \xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{\frac{s+3}{s^2+6s+5} + \frac{2}{s^2-8s+20}}{s} = \dots$

4) Решити диференцијалну једначину: $y''=2$, ако је $y(0)=y'(0)=0$.

Решење: $\mathcal{L}[y''] = \mathcal{L}[2] \Rightarrow (s^2 Y(s) - s \cdot 0 - 0) = \frac{2}{s} \Rightarrow Y(s) = \frac{2}{s^3} \Rightarrow y(t) = t^2$ (јер је $y(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} Y(s)$)

ИНВЕРЗНА ЛАПЛАСОВА ТРАНСФОРМАЦИЈА

5) Наћи инверзну Лапласову трансформацију ф-је $F(s) = \frac{1}{s^2+6s+13}$.

Решење: $F(s) = \frac{1}{(s+3)^2+2^2} \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} \frac{e^{-3t} \sin 2t}{2}$, јер је $\frac{1}{s^2+2^2} = \frac{1}{2} \frac{2}{s^2+2^2} \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} \frac{1}{2} \sin 2t$.

6) Наћи инверзну Лапласову трансформацију ф-је $F(s) = \frac{1}{s^2(s^2+4)}$.

Решење: Иначин: $\frac{1}{s^2+4} \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} \frac{\sin 2t}{2} \Rightarrow \frac{1}{s^2(s^2+4)} \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} \frac{1}{s^2} \cdot \frac{\sin 2t}{2} \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} \int_0^t \frac{\sin 2x}{2} dx = \dots = \frac{1-\cos 2t}{4} \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{1}{s^2(s^2+4)} = \frac{1}{s^2} \cdot \frac{1}{(s^2+4)} \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} \int_0^t \frac{1-\cos 2x}{4} dx = \dots = \frac{2t - \sin 2t}{8}$

II начин: $\frac{1}{s^2(s^2+4)} = \left(\frac{1}{s^2}\right) \cdot \left(\frac{1}{s^2+4}\right) \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} t * \frac{\sin 2t}{2} = \int_0^t (t-x) \frac{\sin 2x}{2} dx = \dots = \frac{2t - \sin 2t}{8}$

III начин: $\frac{1}{s^2(s^2+4)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s^2} + \frac{Cs+D}{s^2+4} = \dots = \frac{1}{4s^2} - \frac{1}{4(s^2+4)} \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} \frac{1}{4}t - \frac{1}{4} \frac{\sin 2t}{2} = \frac{2t - \sin 2t}{8}$

7) Наћи инверзну Лапласову трансформацију ф-је $F(s) = \frac{2s^2+s-1}{s(s^3+4s^2+6s+4)}$.

Решење: Међу делцима броја 4 (слободан члан у) налазимо један корен $s_1 = -2$. Делимо са $s-s_1 = s+2$ добијемо да је $s^3+4s^2+6s+4 = (s+2)(s^2+2s+2)$. Методом неодређених коэф. добијемо:

$F(s) = \frac{2s^2+s-1}{s(s+2)(s^2+2s+2)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+2} + \frac{Cs+D}{s^2+2s+2} = \dots = \frac{-1/4}{s} + \frac{-5/4}{s+2} + \frac{3s+5}{s^2+2s+2} \Rightarrow$

$\Rightarrow F(s) = -\frac{1}{4} \frac{1}{s} - \frac{5}{4} \frac{1}{s+2} + \frac{3}{2} \frac{s+1}{(s+1)^2+1} + 1 \cdot \frac{1}{(s+1)^2+1} \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} -\frac{1}{4} - \frac{5}{4} e^{-2t} + \frac{3}{2} e^{-t} \cos t + e^{-t} \sin t$

1) Наћи инверзну Лапласову вр. ф-је $F(s) = \frac{s}{(s+2)^2(s-1)^3}$.

Решење: Понови ф-је $e^{st}F(s)$ ду $s_1 = -2$ (врн 2. реда) и $s_2 = 1$ (врн 3. реда) ва је:

$$\text{Res}[e^{st}F(s), s_1] = \text{Res}\left[\frac{e^{st}s}{(s+2)^2(s-1)^3}, -2\right] = \frac{1}{1!} \lim_{s \rightarrow -2} \left[(s+2)^2 \frac{e^{st}s}{(s+2)^2(s-1)^3} \right]' = \dots = \lim_{s \rightarrow -2} \frac{e^{st}(ts^2 - (t+2)s - 1)}{(s-1)^4} = \dots = \frac{e^{-2t}(2t+1)}{27}$$

$$\text{Res}[e^{st}F(s), s_2] = \text{Res}\left[\frac{e^{st}s}{(s+2)^2(s-1)^3}, 1\right] = \frac{1}{2!} \lim_{s \rightarrow 1} \left[(s-1)^3 \frac{e^{st}s}{(s+2)^2(s-1)^3} \right]'' = \dots = \frac{1}{2} \lim_{s \rightarrow 1} \frac{e^{st}(t^2s^3 + (4t^2-2t)s^2 + (4t^2-2t)s + (8t-8))}{(s+2)^4} = \dots = \frac{e^t(3t^2+2t-2)}{54}$$

$$\Rightarrow \mathcal{L}^{-1}[F(s)] = \text{Res}[e^{st}F(s), s_1] + \text{Res}[e^{st}F(s), s_2] = \frac{2t+1}{27}e^{-2t} + \frac{3t^2+2t-2}{54}e^t$$

2) Наћи инверзну Лапласову вр. ф-је $F(s) = \frac{s^3}{(s^2+1)^2}$.

Решење: Понови ф-је $e^{st}F(s)$ ду $s_{1,2} = \pm i$ (врн 2. реда, јер је $(s^2+1)^2 = (s-i)^2(s+i)^2$) ва је:

$$\text{Res}[e^{st}F(s), s_1] = \text{Res}\left[\frac{e^{st}s}{(s^2+1)^2}, i\right] = \frac{1}{1!} \lim_{s \rightarrow i} \left[(s-i)^2 \frac{e^{st}s}{(s-i)^2(s+i)^2} \right]' = \dots = \lim_{s \rightarrow i} \frac{e^{st}s^2(1s^2 + (1+ti)s + 3i)}{(s+i)^3} = \dots = \frac{e^{it}(2+ti)}{4}$$

$$\text{Res}[e^{st}F(s), s_2] = \text{Res}\left[\frac{e^{st}s}{(s^2+1)^2}, -i\right] = \frac{1}{1!} \lim_{s \rightarrow -i} \left[(s+i)^2 \frac{e^{st}s}{(s-i)^2(s+i)^2} \right]' = \dots = \lim_{s \rightarrow -i} \frac{e^{st}s^2(1s^2 + (1-ti)s - 3i)}{(s-i)^3} = \dots = \frac{e^{-it}(2-ti)}{4}$$

$$\Rightarrow \mathcal{L}^{-1}[F(s)] = \text{Res}[e^{st}F(s), s_1] + \text{Res}[e^{st}F(s), s_2] = \frac{1}{2}(e^{it} + e^{-it}) + \frac{i}{4}t(e^{it} - e^{-it}) = \cos t - \frac{1}{2}t \sin t$$

3) Наћи инверзну Лапласову вр. ф-је $F(s) = \frac{s+1}{s(s-1)(s-2)(s-3)}$.

Решење: Понови је $F(s) = \frac{P(s)}{Q(s)}$ ($P(s) = s+1$, $Q(s) = s(s-1)(s-2)(s-3)$ - полином), а корени полинома $Q(s)$, $s_1 = 0$, $s_2 = 1$, $s_3 = 2$, $s_4 = 3$, једносирку, уместо резидуа, инв. Лапл. вр. једносавнице израчунавамо

формулу: $\mathcal{L}^{-1}[F(s)] = \sum_{k=1}^4 \frac{P(s_k)}{Q'(s_k)} e^{s_k t} = \frac{P(0)}{Q'(0)} e^{0t} + \frac{P(1)}{Q'(1)} e^{1t} + \frac{P(2)}{Q'(2)} e^{2t} + \frac{P(3)}{Q'(3)} e^{3t} = \dots = -\frac{1}{6} + e^t - \frac{3}{2}e^{2t} + \frac{2}{3}e^{3t}$

ПРИМЕНА ЛАПЛАСОВЕ ТРАНСФОРМАЦИЈЕ

4) КАЛ'99: Решити диф. јед. $y'''(t) + 4y(t) = f(t)$, ако је $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$, а $f(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t < 1 \\ 0, & 1 \leq t \end{cases}$.

Решење: Како је $f(t) = u(t) - u(t-1)$ следи да је $\mathcal{L}[f(t)] = \frac{1}{s} - \frac{e^{-s}}{s}$. Ако одбележимо $Y(s) = \mathcal{L}[y(t)]$, из

Лапл. вр. даће једначине годичамо: $(s^3 Y - s^2 y(0) - s y'(0) - 1) + 4Y = \frac{1-e^{-s}}{s}$, odakle је $Y = \frac{1}{s^2+4} + \frac{1}{s(s^2+4)} - \frac{1}{s(s^2+4)}e^{-s}$.

Како је $\frac{1}{s^2+4} \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} \frac{\sin 2t}{2}$, $\frac{1}{s(s^2+4)} = \frac{1}{4} - \frac{1}{4} \frac{s}{s^2+4} \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} \frac{1}{4}(1 - \cos 2t) = \frac{\sin^2 t}{2}$, ва је $\frac{1}{s(s^2+4)}e^{-s} \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} u(t-1) \frac{\sin^2(t-1)}{2}$.

На крају $y(t) = \mathcal{L}^{-1}[Y(s)] = \frac{\sin 2t}{2} + \frac{\sin^2 t}{2} - u(t-1) \frac{\sin^2(t-1)}{2}$

5) КАЛ'01: Решити диф. јед. $x^{(n)}(t) = t \cdot f(t)$, ако је $x(0) = x'(0) = \dots = x^{(n-1)}(0) = 0$, а $f(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t < 1 \text{ и } 2 \leq t \\ 0, & 1 \leq t < 2 \end{cases}$.

Решење: Како је $f(t) = u(t) - u(t-1) + u(t-2)$ следи да је $\mathcal{L}[f(t)] = \frac{1}{s} - \frac{e^{-s}}{s} + \frac{e^{-2s}}{s}$, односно $\mathcal{L}[t f(t)] =$

$-\left(\frac{1-e^{-s}+e^{-2s}}{s}\right)' = \dots = \frac{1}{s^2} - \left(\frac{1}{s} + \frac{1}{s^2}\right)e^{-s} + \left(\frac{2}{s} + \frac{1}{s^2}\right)e^{-2s}$. Ако одбележимо $X(s) = \mathcal{L}[x(t)]$, из Лапласове вр.

даће једначине годичамо: $(s^n X - s^{n-1}x(0) - \dots - 0) = \frac{1}{s^2} - \left(\frac{1}{s} + \frac{1}{s^2}\right)e^{-s} + \left(\frac{2}{s} + \frac{1}{s^2}\right)e^{-2s}$, ој. $X = \frac{1}{s^{n+2}} - \left(\frac{1}{s^{n+1}} + \frac{1}{s^{n+2}}\right)e^{-s} +$

$+\left(\frac{2}{s^{n+1}} + \frac{1}{s^{n+2}}\right)e^{-2s}$. На крају, користењем табличних инверзних Лапласових вр. $\frac{1}{s^{n+1}} \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} \frac{t^n}{n!}$ и $\frac{e^{-as}}{s^{n+1}} \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}}$

$\xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} u(t-a) \frac{(t-a)^n}{n!}$, годичамо: $x(t) = \mathcal{L}^{-1}[X(s)] = \frac{t^{n+1}}{(n+1)!} - u(t-1) \left[\frac{(t-1)^n}{n!} + \frac{(t-1)^{n+1}}{(n+1)!} \right] + u(t-2) \left[2 \frac{(t-2)^n}{n!} + \frac{(t-2)^{n+1}}{(n+1)!} \right] = \dots$

6) СЕП'04: Решити систем диф. једн. $\begin{cases} x' = y + e^t \\ y' = -x - \sin 2t \end{cases}$; ако је $x(0) = \frac{1}{2}$, $y(0) = 1$.

Решење: Нека је $\mathcal{L}[x(t)] = X(s)$ и $\mathcal{L}[y(t)] = Y(s)$. Из Лапласове трансф. даћеј системат годичамо:

$$\left. \begin{aligned} sX - \frac{1}{2} &= Y + \frac{1}{s-1} \\ sY - 1 &= -X - \frac{2}{s^2+2^2} \end{aligned} \right\} \Leftrightarrow \left. \begin{aligned} sX - Y &= \frac{1}{2} + \frac{1}{s-1} \\ X + sY &= 1 - \frac{2}{s^2+4} \end{aligned} \right\} \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow \begin{aligned} X &= \frac{\frac{1}{2}s}{s^2+1} + \frac{2}{s^2+1} + \frac{1}{(s-1)(s^2+1)} - \frac{2}{(s^2+1)(s^2+4)} \\ Y &= \frac{s}{s^2+1} - \frac{1/2}{s^2+1} - \frac{1}{(s-1)(s^2+1)} - \frac{2s}{(s^2+1)(s^2+4)} \end{aligned}$$

Методом неогр. коэф. годијамо $\frac{1}{(s-1)(s^2+1)} = \frac{1/2}{s-1} - \frac{1/2(s+1)}{s^2+1} = \frac{2}{(s^2+1)(s^2+4)} = \frac{2/3}{s^2+1} - \frac{2/3}{s^2+4} + \frac{2s}{(s^2+1)(s^2+4)} = \dots$

$$\Rightarrow \dots \Rightarrow X = \frac{1/2}{s-1} + \frac{5/6}{s^2+1} + \frac{2/3}{s^2+4} \Rightarrow x(t) = \mathcal{L}^{-1}[X(s)] = \frac{1}{2}e^t + \frac{5}{6}\sin t + \frac{1}{3}\sin 2t$$

$$Y = \frac{-1/2}{s-1} + \frac{5/6 \cdot s}{s^2+1} + \frac{2/3 \cdot s}{s^2+4} \Rightarrow y(t) = \mathcal{L}^{-1}[Y(s)] = -\frac{1}{2}e^t + \frac{5}{6}\cos t + \frac{2}{3}\cos 2t$$

7 Решити систем диф. једн. $\begin{cases} x' + y = f(t) \\ y' + x = g(t) \end{cases}$; ако је $f(t) = \begin{cases} 1, 0 \leq t < 2 \\ 0, t \geq 2 \end{cases}$, $g(t) = \int_0^t u(x) \cdot \sin(t-x) \cdot dx$.

Решење: Пошто је $f(t) = u(t) - u(t-2)$ и $g(t) = u(t) * \sin t$, из Лапласове пр. граве системна годијамо:

$$\left. \begin{aligned} (sX - C_1) + Y &= \frac{1}{s} - \frac{e^{-2s}}{s} \\ (sY - C_2) + X &= \frac{1}{s} \cdot \frac{1}{s^2+1} \end{aligned} \right\} \Leftrightarrow \left. \begin{aligned} sX + Y &= \frac{1}{s} - e^{-2s} \frac{1}{s} + C_1 \\ X + sY &= \frac{s}{s^2+1} - \frac{1}{s} + C_2 \end{aligned} \right\}, \text{ где је } \mathcal{L}[x(t)] = X(s), \mathcal{L}[y(t)] = Y(s) \text{ и } x(0) = C_1, y(0) = C_2.$$

$$\Rightarrow \dots \Rightarrow \begin{aligned} X &= \frac{1-C_2}{s^2+1} + \frac{C_1 s}{s^2+1} + \frac{1}{s(s^2+1)} - e^{-2s} \frac{1}{s(s^2+1)} - \frac{s}{(s^2+1)^2} \\ Y &= \frac{-C_1}{s^2+1} + \frac{C_2 s}{s^2+1} - \frac{1}{s(s^2+1)} + e^{-2s} \frac{1}{s(s^2+1)} + \frac{1}{(s^2+1)^2} \end{aligned}$$

Методом неогр. коэф. годијамо $\frac{1}{s(s^2+1)} = \frac{s}{s^2+1} - \frac{1}{s} \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} \sin t - 1 \Rightarrow e^{-2s} \frac{1}{s(s^2+1)} \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} u(t-2)(\sin(t-2)-1)$. Дакле, $\mathcal{L}^{-1}[\frac{s}{(s^2+1)^2}]$ и $\mathcal{L}^{-1}[\frac{1}{(s^2+1)^2}]$ можемо

годићи коришћењем особина конволуције (мога, може и м.н.к. или Мелингов ф-кн):

$$\begin{aligned} \frac{s}{(s^2+1)^2} &= \frac{s}{s^2+1} \cdot \frac{1}{s^2+1} \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} \sin t * \sin t = \int_0^t \sin(t-x) \cdot \sin x \cdot dx = \int_0^t \frac{\sin t - \sin(t-2x)}{2} dx = \dots = \frac{t \cdot \sin t}{2} \\ \frac{1}{(s^2+1)^2} &= \frac{1}{s^2+1} \cdot \frac{1}{s^2+1} \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} \sin t * \sin t = \int_0^t \sin(t-x) \cdot \sin x \cdot dx = \int_0^t \frac{\sin t - \sin(t-2x)}{2} dx = \dots = \frac{t \cdot \cos t - \sin t}{2} \end{aligned}$$

На крају, из (*), годијамо:

$$\begin{aligned} x(t) &= (1-C_2)\sin t + C_1 \cos t + (\sin t - 1)u(t-2) - \frac{t \sin t}{2} - \dots \\ y(t) &= -C_1 \sin t + C_2 \cos t - (\sin t - 1)u(t-2) + \frac{t \cos t - \sin t}{2} = \dots \end{aligned}$$

8 Решити једначину: $6y - y' = 10 \sin t + 10 \int_0^t y(x) \cdot \cos(t-x) \cdot dx$; ако је $y(0) = 0$.

Решење: Пошто је $\int_0^t y(x) \cdot \cos(t-x) \cdot dx = y(t) * \cos t$, из Лапласове пр. граве једначине (узевши да је $\mathcal{L}[y(t)] = Y(s)$) годијамо: $6Y - (sY - 0) = 10 \frac{1}{s^2+1} + 10 \cdot Y \cdot \frac{s}{s^2+1}$, од чега сређивања: $Y = \frac{-10}{(s-1)(s-2)(s-3)}$. Пошто је $Y = \frac{P(s)}{Q(s)}$, ($P(s) = -10$, $Q(s) = (s-1)(s-2)(s-3)$), $\mathcal{L}^{-1}[Y(s)]$ можемо годићи из формуле $\sum \frac{P(s_k)}{Q'(s_k)} e^{s_k t}$ (s_k су једноставне нуле полинома $Q(s)$), од чега $y(t) = \mathcal{L}^{-1}[Y(s)] = \frac{P(1)}{Q'(1)} e^{1t} + \frac{P(2)}{Q'(2)} e^{2t} + \frac{P(3)}{Q'(3)} e^{3t} = \dots = \frac{-10}{2} e^t + \frac{-10}{-1} e^{2t} + \frac{-10}{2} e^{3t} = -5e^t + 10e^{2t} - 5e^{3t} = \dots = -5e^t (e^t - 1)^2$.

9 Решити једначину $\int_0^t e^{t-x} (y''(x) + y(x)) \cdot dx = t$; ако је $y(0) = y'(0) = 0$.

Решење: Пошто је $\int_0^t e^{t-x} (y''(x) + y(x)) \cdot dx = e^t * (y''(t) + y(t))$, из Лапласове пр. граве једначине (узевши да је $\mathcal{L}[y(t)] = Y(s)$) годијамо: $\frac{1}{s-1} \cdot (s^2 Y - s \cdot 0 - 0 + Y) = \frac{1}{s^2}$, од чега сређивања: $Y = \frac{s-1}{s^2(s^2+1)}$. Методом неогр. коэф. годијамо да је $Y = \frac{1}{s} - \frac{1}{s^2} + \frac{-s+1}{s^2+1}$ па је $y(t) = \mathcal{L}^{-1}[Y(s)] = 1 - t - \cos t + \sin t$.