

① РЕШИТИ ДИФЕРЕНЦИЈАЛНУ ЈЕДНАЧИНУ $y'' + y' = 4x^2 e^{-x}$.

РЕШЕЊЕ: КАРАКТЕРИСТИЧАН ПОЛИНОМ ЈЕДНАК ЈЕ $\lambda^2 + \lambda' = \lambda(\lambda + 1)$, ПА СУ КОРЕНИ К.П. ЈЕДНАКИ $\lambda_1 = 0$ И $\lambda_2 = -1$. ПАРТИКУЛАРНА РЕШЕЊА, КОЈА ОДГОВАРАЈУ ОВИМ КОРЕНИМА, СУ $y_1 = e^{0x} = 1$ И $y_2 = e^{-1x}$ ОДАКЛЕ ДОБИЈАМО $y_H = C_1 + C_2 e^{-x}$.

ОД-ЈИ $f(x) = 4x^2 e^{-x}$ ОДГОВАРА ПАРТИКУЛАРНО РЕШЕЊЕ: (*) $y_P = x^1 \cdot (Ax^2 + Bx + C) \cdot e^{-x}$, ЈЕР ЈЕ $\lambda = -1$ КОРЕН (ВИШЕСТРУКОСТИ ЈЕДАН) К.П.

ИЗ $y_P = (Ax^3 + Bx^2 + Cx) e^{-x}$ ДОБИЈАМО . . .

$$\dots y_P' = [-Ax^3 + (3A - B)x^2 + (2B - C)x + C] \cdot e^{-x} \text{ И } \dots$$

$$\dots y_P'' = [Ax^3 + (B - 6A)x^2 + (6A - 4B + C)x + (2B - 2C)] \cdot e^{-x}.$$

ЗАМЕНОМ У ПОЛАЗНУ ЈЕДНАЧИНУ $(y_P'' + y_P' = 4x^2 e^{-x})$ ДОБИЈАМО:

$$[-3A \cdot x^2 + (6A - 2B) \cdot x + (2B - C)] e^{-x} = 4x^2 e^{-x}.$$

ИЗЈЕДНАЧАВАЊЕМ КОЕФИЦИЈЕНАТА УЗ ИСТЕ СТЕПЕНЕ, ПОЛИНОМА СА ЛЕВЕ И ДЕСНЕ СТРАНЕ, ДОБИЈАМО СИСТЕМ:
$$\left. \begin{array}{l} -3A = 4 \\ 6A - 2B = 0 \\ 2B - C = 0 \end{array} \right\}, \text{ ЧИЈЕ РЕШЕЊЕ ЈЕ}$$

$A = -\frac{4}{3}, B = -4, C = -8$. ЗНАЧИ, ТРАЖЕНО ПАРТИКУЛАРНО РЕШЕЊЕ ЈЕ (ИЗ (*)):

$$\underline{y_P = x \cdot \left(-\frac{4}{3}x^2 - 4x - 8\right) \cdot e^{-x}}$$

НАЈЗАД, ОПШТЕ РЕШЕЊЕ ПОЛАЗНЕ ДИФЕРЕНЦИЈАЛНЕ ЈЕДНАЧИНЕ ЈЕДНАКО ЈЕ ЗБИРУ ОПШТЕ РЕШЕЊА ХОМОГЕНЕ ЈЕДНАЧИНЕ (y_H) И ДОБИЈЕНОГ ПАРТИКУЛАРНОГ РЕШЕЊА (y_P), Т.Ј. $y = y_H + y_P \Rightarrow \underline{y = C_1 + C_2 e^{-x} - x \left(\frac{4}{3}x^2 + 4x + 8\right) e^{-x}}.$

②-КОЛ'ОО. РЕШИТИ ЈЕДНАЧИНУ $y'' - 4y' + 13y = e^{2x} \cdot \sin^3 x$.

РЕШЕЊЕ: КАРАКТЕРИСТИЧАН ПОЛИНОМ: $\lambda^2 - 4\lambda + 13 = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = 2 \pm 3i \Rightarrow y_1 = e^{2x} \cos 3x$,
 $y_2 = e^{2x} \sin 3x \Rightarrow y_H = C_1 e^{2x} \cos 3x + C_2 e^{2x} \sin 3x$ - РЕШЕЊЕ ОДГОВАРАЈУЋЕ ХОМОГЕНЕ ЈЕДНАЧИНЕ

КАКО ЈЕ $\sin^3 x = \sin^2 x \cdot \sin x = \frac{1 - \cos 2x}{2} \cdot \sin x = \frac{1}{2} \left(\sin x - \frac{\sin 3x - \sin x}{2} \right) = \frac{3}{4} \sin x - \frac{1}{4} \sin 3x$, Ф-ЈУ
 $f(x) = e^{2x} \sin^3 x = e^{2x} \left(\frac{3}{4} \sin x - \frac{1}{4} \sin 3x \right)$ МОЖЕМО ДА ЗАПИШЕМО КАО ЗЕЛР Ф-ЈА $f_1(x) = \frac{3}{4} e^{2x} \sin x$
и $f_2(x) = -\frac{1}{4} e^{2x} \sin 3x$. ДАЛЕ, КОРИСТИМО ПРИНЦИП СУПЕРПОЗИЦИЈЕ:

(1): $y'' - 4y' + 13y = \frac{3}{4} e^{2x} \sin x$

ТРАЖИМО ПАРТИКУЛАРНО РЕШЕЊЕ: (*) $y_{p1} = e^{2x} \cdot (A \cos x + B \sin x)$, ОДАКЛЕ ДОБИЈАМО
... $y'_{p1} = e^{2x} \cdot [(2A+B) \cos x + (2B-A) \sin x]$ и $y''_{p1} = e^{2x} \cdot [(3A+4B) \cos x + (3B-4A) \sin x]$. ЗАМЕНОМ
У (1) ДОБИЈАМО: ... $e^{2x} \cdot (8A \cos x + 8B \sin x) = \frac{3}{4} e^{2x} \sin x$, ТЈ. ДОБИЈАМО СИСТЕМ:

$$\begin{cases} 8A = 0 \\ 8B = \frac{3}{4} \end{cases} \quad \text{ЧИЈЕ РЕШЕЊЕ ЈЕ } A=0, B=\frac{3}{32}. \text{ ЗНАЧИ, ПРВО ПАРТИКУЛАРНО}$$

РЕШЕЊЕ (ИЗ (*)) ЈЕ: $y_{p1} = e^{2x} \cdot \frac{3}{32} \sin x$.

(2): $y'' - 4y' + 13y = -\frac{1}{4} e^{2x} \sin 3x$

ТРАЖИМО ПАРТИКУЛАРНО РЕШЕЊЕ: (**) $y_{p2} = x \cdot e^{2x} \cdot (C \cos 3x + D \sin 3x)$, ЈЕР ЈЕ
 $\lambda = 2 + 3i$ КОРЕН (ВИШЕСТРУКОСТИ ЈЕДАН) КАРАКТЕРИСТИЧНОГ ПОЛИНОМА.

ИЗ $y_{p2} = e^{2x} \cdot [Cx \cdot \cos 3x + Dx \cdot \sin 3x]$ ДОБИЈАМО ...

... $y'_{p2} = e^{2x} \cdot [(2C+3D)x + C] \cdot \cos 3x + [(2D-3C)x + D] \cdot \sin 3x$ и ...

... $y''_{p2} = e^{2x} \cdot [(12D-5C)x + (4C+6D)] \cdot \cos 3x + [-(12C+5D)x + (4D-6C)] \cdot \sin 3x$.

ЗАМЕНОМ У (2) ДОБИЈАМО: ... $e^{2x} \cdot (6D \cos 3x - 6C \sin 3x) = -\frac{1}{4} e^{2x} \sin 3x$,
ОДАКЛЕ ДОБИЈАМО СИСТЕМ: $\begin{cases} 6D = 0 \\ -6C = -\frac{1}{4} \end{cases}$ ЧИЈЕ РЕШЕЊЕ ЈЕ $C = \frac{1}{24}, D = 0$.

ЗНАЧИ, ДРУГО ПАРТИКУЛАРНО РЕШЕЊЕ (ИЗ (**)) ЈЕ: $y_{p2} = x \cdot e^{2x} \cdot \frac{1}{24} \cos 3x$.

НА КРАЈУ, ОПШТЕ РЕШЕЊЕ ПОЛАЗНЕ ДИФЕРЕНЦИЈАЛНЕ ЈЕДНАЧИНЕ ЈЕДНАКО
ЈЕ ЗЕЛРУ ОПШТЕГ РЕШЕЊА ХОМОГЕНЕ (y_H) И ДОБИЈЕНИХ ПАРТИКУЛАРНИХ РЕШЕЊА
(y_{p1} И y_{p2}), ТЈ. $y = C_1 e^{2x} \cos 3x + C_2 e^{2x} \sin 3x + \frac{3}{32} e^{2x} \sin x + \frac{1}{24} x e^{2x} \cos 3x$.

① МЕТОДОМ ВАРИАЦИЈЕ КОНСТАНТИ РЕШИТИ ЈЕДНАЧИНУ:

$$y^{(4)} - y''' + y'' - y' = \sin x + \cos x.$$

РЕШЕЊЕ: КОРЕНИ КАРАКТЕРИСТИЧНОГ ПОЛИНОМА $\lambda^4 - \lambda^3 + \lambda^2 - \lambda^1$ су $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 1, \lambda_{3,4} = \pm i$,
ПА ЈЕ РЕШЕЊЕ ОДГОВАРАЈУЋЕ ХОМОГЕНЕ ЈЕДНАЧИНЕ $y_H = C_1 + C_2 e^x + C_3 \cos x + C_4 \sin x$.

ОПШТЕ РЕШЕЊЕ НЕОДНОСТАВНЕ ЈЕДНАЧИНЕ ЈЕ ОБЛИКА $y = C_1(x) + C_2(x)e^x + C_3(x)\cos x + C_4(x)\sin x$. (*)

НЕПОЗНАТЕ $C_1(x), C_2(x), C_3(x)$ И $C_4(x)$ ДОБИЈАМО ИЗ СИСТЕМА:
$$\begin{cases} C_1' \cdot 1 + C_2' \cdot e^x + C_3' \cdot \cos x + C_4' \cdot \sin x = 0 \\ C_2' \cdot e^x - C_3' \cdot \sin x + C_4' \cdot \cos x = 0 \\ C_2' \cdot e^x - C_3' \cdot \cos x - C_4' \cdot \sin x = 0 \\ C_2' \cdot e^x + C_3' \cdot \sin x - C_4' \cdot \cos x = \sin x + \cos x \end{cases}$$

СИСТЕМ СЕ ЈЕДНОСТАВНО РЕШАВА КРАМЕРОВИМ ПРАВИЛОМ

ИЛИ ПОМОЋУ КРОНЕКЕР-КАПЕЛИЈЕВЕ ТЕОРЕМЕ (ИЛИ ЈЕДНО-

СТАВНИЈЕ, САБИРАЊЕМ ДРУГЕ И ЧЕТВРТЕ А ПОТОМ ПРВЕ И ТРЕЋЕ ЈЕДНАЧИНЕ ИТА.). ДОБИЈАМО:

$$C_1'(x) = -(\sin x + \cos x), C_2'(x) = \frac{\sin x + \cos x}{2} e^{-x}, C_3'(x) = \frac{1 + \sin 2x}{2} \text{ И } C_4'(x) = -\frac{\cos 2x}{2}, \text{ А ЗАТИМ:}$$

$$C_1(x) = \int -(\sin x + \cos x) dx = \cos x - \sin x + D_1$$

$$C_2(x) = \int \frac{\sin x + \cos x}{2} e^{-x} dx = \frac{1}{2} \int \sin x e^{-x} dx + \frac{1}{2} \int \cos x e^{-x} dx = \left[\text{АВА ПУТА ПАРЦИЈАЛНА ИНТЕГРАЦИЈА} \right]$$

$$\text{ИЛИ САМО ЈЕДНОМ ПАР. ИНТ. НА ДРУГИ ИНТЕГРАЛ}] = \dots = -\frac{1}{2} e^{-x} \cos x + D_2$$

$$C_3(x) = \int \frac{1 + \sin 2x}{2} dx = \frac{2x - \cos 2x}{4} + D_3$$

$$C_4(x) = \int -\frac{\cos 2x}{2} dx = -\frac{\sin 2x}{4} + D_4.$$

ЗАМЕНОМ У (*) ДОБИЈАМО ОПШТЕ РЕШЕЊЕ:

$$y = [\cos x - \sin x + D_1] - \left[\frac{1}{2} \cos x + D_2 e^x \right] + \left[\frac{2x - \cos 2x}{4} + D_3 \right] \cos x - \left[\frac{\sin 2x}{4} - D_4 \right] \sin x = \dots$$