

1) Матричным методом решить систему:
$$\begin{aligned} x' &= -x + 4y - 4z \\ y' &= x - y + 3z \\ z' &= x - 2y + 3z \end{aligned}$$

Решение: $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & -4 \\ 1 & -1 & 3 \\ 1 & -2 & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow \det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 4 & -4 \\ 1 & -1-\lambda & 3 \\ 1 & -2 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2(3-\lambda) - (1-\lambda)3(-2) + 4(3-\lambda) - 4(1-\lambda)(3-\lambda) = (1-\lambda)^2(3-\lambda) - (1-\lambda)3(-2) + 4(3-\lambda) - 4(1-\lambda)(3-\lambda) = 0$

$\Rightarrow \dots \Rightarrow \det(A - \lambda E) = (1-\lambda)(\lambda^2 + 1) = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 1, \lambda_{2,3} = \pm i$ (собственные значения)

3а $\lambda_1 = 1$: $(A - \lambda_1 E) \cdot M = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 2 & 4 & -4 \\ 1 & -2 & 3 \\ 1 & -2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -2a + 4b - 4c = 0 \\ 1a - 2b + 3c = 0 \\ 1a - 2b + 2c = 0 \end{cases} \Rightarrow \dots \Rightarrow M = 6 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow X_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} e^{1t}$

3а нпр. $\lambda_2 = i$: $(A - \lambda_2 E) \cdot M = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1-i & 4 & -4 \\ 1 & -1-i & 3 \\ 1 & -2 & 3-i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -(1-i)a + 4b - 4c = 0 \\ 1a - (1-i)b + 3c = 0 \\ 1a - 2b + (3-i)c = 0 \end{cases} \Rightarrow \dots \Rightarrow M = 6 \begin{bmatrix} 2(1-i) \\ 1 \\ 1+i \end{bmatrix}$

$\Rightarrow X_{\text{кон}} = \begin{bmatrix} -2(1+i) \\ 1 \\ 1+i \end{bmatrix} e^{it} = \begin{bmatrix} 2-2i \\ 1 \\ 1+i \end{bmatrix} (\cos t + i \sin t) = \begin{bmatrix} 2\cos t + 2i\sin t - 2i\cos t - 2\sin t \\ \cos t + i\sin t \\ \cos t - \sin t + i\cos t + i\sin t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2(\sin t - \cos t) \\ \cos t - \sin t \\ \cos t - \sin t \end{bmatrix} + i \begin{bmatrix} 2(\cos t + \sin t) \\ \sin t \\ \cos t + \sin t \end{bmatrix}$

$\Rightarrow X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = C_1 X_1 + C_2 X_2 + C_3 X_3 = C_1 \begin{bmatrix} 2e^t \\ e^t \\ 0 \end{bmatrix} + C_2 \begin{bmatrix} 2(\sin t - \cos t) \\ \cos t - \sin t \\ \cos t - \sin t \end{bmatrix} + C_3 \begin{bmatrix} 2(\cos t + \sin t) \\ \sin t \\ \cos t + \sin t \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{aligned} x &= 2C_1 e^t + 2C_2(\sin t - \cos t) - 2C_3(\cos t + \sin t) \\ y &= C_1 e^t + C_2 \cos t + C_3 \sin t \\ z &= C_2(\cos t - \sin t) + C_3(\cos t + \sin t) \end{aligned}$

2) Матричным методом решить систему:
$$\begin{aligned} x' &= x + y - z \\ y' &= -x + y + z \\ z' &= -x + 2z \end{aligned}$$

Решение: $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & -1 \\ -1 & 1-\lambda & 1 \\ 1 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2(2-\lambda) - 0 + 1 \cdot 1 \cdot (-1) - 1 \cdot (-1) \cdot (2-\lambda) + 0 - 1 \cdot (1) \cdot (-1) = \dots = (1-\lambda)^2(2-\lambda) = 0$

$\Rightarrow (\det(A - \lambda E) = 0 \Leftrightarrow (1-\lambda)^2(2-\lambda) = 0) \Rightarrow \lambda_{1,2} = 1, \lambda_3 = 2$ (собственные значения).

3а $\lambda_{1,2} = 1$: $(A - \lambda_{1,2} E) \cdot M_2 = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} b_1 - c_1 = 0 \\ -a_1 + c_1 = 0 \\ -a_1 + c_1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \dots \Rightarrow M_1 = \begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 - c_2 \\ c_1 + c_2 \\ c_1 \end{bmatrix}, c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

$C_1 = 1, C_2 = 0 \Rightarrow X_1 = (M_1 + M_2) e^{\lambda_1 t} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{1t}; C_1 = 0, C_2 = 1 \Rightarrow X_2 = (M_1 + M_2) e^{\lambda_2 t} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{1t}$

3а $\lambda_3 = 2$: $(A - \lambda_3 E) \cdot M = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -a + b - c = 0 \\ -a - b + c = 0 \\ -a = 0 \end{cases} \Rightarrow \dots \Rightarrow M = 6 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow X_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{2t}$

$\Rightarrow X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = C_1 X_1 + C_2 X_2 + C_3 X_3 = C_1 \begin{bmatrix} e^t \\ e^t \\ e^t \end{bmatrix} + C_2 \begin{bmatrix} -e^t \\ e^t \\ e^t \end{bmatrix} + C_3 \begin{bmatrix} 0 \\ e^{2t} \\ e^{2t} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{aligned} x &= C_1 e^t + C_2 (-1) e^t \\ y &= C_1 e^t + C_2 (1) e^t + C_3 e^{2t} \\ z &= C_1 e^t + C_2 (1) e^t + C_3 e^{2t} \end{aligned}$

② Решити систему
$$\begin{cases} x' = x - y \\ y' = 2x + y + z \\ z' = 2y + z \end{cases}$$

Решение: Из матрице система $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} = A$, добити карактеристичан полином:

$$\det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} (1-\lambda) & -1 & 0 \\ 2 & (1-\lambda) & 0 \\ 0 & 2 & (1-\lambda) \end{vmatrix} = \dots = (1-\lambda)^3, \text{ та је } \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1 \text{ собств. вредности, вишеструко-} \\ \text{ста 3.}$$

Партикуларна решења тражити у облику (*): $X_i = (M_1 + M_2 t + M_3 t^2) \cdot e^{\lambda_i t}; i \in \{1, 2, 3\}$. Заме-
нат у образази систему ($X_i' = A \cdot X_i$ - у матричном запису) добити да је

$$X_i' = (M_2 + 2M_3 t) e^{\lambda_i t} + (M_1 + M_2 t + M_3 t^2) e^{\lambda_i t} = A \cdot (M_1 + M_2 t + M_3 t^2) e^{\lambda_i t}, \text{ тј. } (M_1 + M_2) + (M_2 + 2M_3)t + M_3 t^2 = \\ = A \cdot M_1 + A M_2 t + A M_3 t^2, \text{ тј. добити систем } \dots \left. \begin{aligned} (A - \lambda_i E) \cdot M_3 &= 0 \\ (A - \lambda_i E) \cdot M_2 &= 2M_3 \\ (A - \lambda_i E) \cdot M_1 &= M_2 \end{aligned} \right\}. \text{ Узевши да је}$$

$$M_1 = \begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{bmatrix}, M_2 = \begin{bmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \end{bmatrix} \text{ и } M_3 = \begin{bmatrix} a_3 \\ b_3 \\ c_3 \end{bmatrix}, \text{ у развијеном}$$

$$\text{облику систем глави: } \left. \begin{aligned} -b_3 &= 0 \\ 2a_3 + c_3 &= 0 \\ 2b_3 &= 0 \end{aligned} \right\} \rightarrow \left. \begin{aligned} -b_2 &= 2a_3 \\ 2a_2 + c_2 &= 2b_3 \\ 2b_2 &= 2c_3 \end{aligned} \right\} \rightarrow \left. \begin{aligned} -b_1 &= a_2 \\ 2a_1 + c_1 &= b_2 \\ 2b_1 &= c_2 \end{aligned} \right\}. \text{ Добити}$$

систем се може решити до параметрица a_1, a_2 и a_3 : $b_3 = 0, c_3 = -2a_3, b_2 = -2a_3$ и

$b_1 = -a_2, c_1 = -2a_3 - 2a_1$. Узимајући редом вредности параметара: 1° $a_1 = 1, a_2 = 0, a_3 = 0$; 2° $a_1 = 0, a_2 = 1, a_3 = 0$; 3° $a_1 = 0, a_2 = 0, a_3 = 1$, добити

$$\text{тј. 1° } M_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}, M_2 = M_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{(*)} X_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix} e^{1 \cdot t}$$

$$2^\circ M_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, M_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}, M_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{(*)} X_2 = \begin{bmatrix} t \\ -1 \\ -2t \end{bmatrix} e^{1 \cdot t}$$

$$3^\circ M_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}, M_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}, M_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix} \xrightarrow{(*)} X_3 = \begin{bmatrix} t^2 \\ -2t \\ -2-2t \end{bmatrix} e^{1 \cdot t}$$

$$\Rightarrow X = C_1 X_1 + C_2 X_2 + C_3 X_3$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_1 + C_2 t + C_3 t^2 \\ -C_2 - C_3 2t \\ -C_1 2 - C_2 2t - C_3 (2 + 2t) \end{bmatrix} \cdot e^t$$