

НЕХОМОГЕНИ СИСТЕМИ ЛИНЕАРНИХ ЈЕДН. СА КОНСТ. КОЕФИЦИЈЕНТИМА

МЕТОДА НЕОДРЕЂЕНИХ КОЕФИЦИЈЕНТА

1) Решити систем:
$$\begin{cases} x' = x + 2y + 16te^t \\ y' = 2x - 2y + 3e^{3t} \end{cases}$$

Решење: Систем записан матрично гласи: $\frac{dX}{dt} = A \cdot X + B$, где је $X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$, $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$ и $B = \begin{bmatrix} 16te^t \\ 3e^{3t} \end{bmatrix}$. Решење одговарајућег хомогеног система $\frac{dX}{dt} = A \cdot X$ је $X_H = C_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} e^{-3t} + C_2 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} e^{2t}$ (собствене вредности матрице A су $\lambda_1 = -3, \lambda_2 = 2$, а одговарајући сопствени вектори су $\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$ и $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$).

Пошто је $B = \begin{bmatrix} 16t \\ 0 \end{bmatrix} e^t + \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix} e^{3t}$, бардикуларно решење X_P (слично као код методе неодр. коэф. за нехомогене лине. јед. са конст. коэф.) је облика: $X_P = \begin{bmatrix} a_1 + a_2 t \\ b_1 + b_2 t \end{bmatrix} e^t + \begin{bmatrix} a_3 + a_4 t \\ b_3 + b_4 t \end{bmatrix} e^{3t}$, јер је $\lambda = -3$ сопствена вредност мат. A да се одговара за један својен „болитма“ који множи e^{-3t} . Замењујући X_P у датих систем добијемо: $\begin{bmatrix} (a_1 + a_2) + a_2 t \\ (b_1 + b_2) + b_2 t \end{bmatrix} e^t + \begin{bmatrix} (a_1 - 3a_3) - 3a_4 t \\ (b_1 - 3b_3) - 3b_4 t \end{bmatrix} e^{-3t} = \begin{bmatrix} (a_1 + 2b_1) + (a_2 + 2b_2)t \\ (2a_1 - 2b_1) + (2a_2 - 2b_2)t \end{bmatrix} e^t + \begin{bmatrix} (a_3 + 2b_3) + (a_4 + 2b_4)t \\ (2a_3 - 2b_3) + (2a_4 - 2b_4)t \end{bmatrix} e^{3t}$. Узједначавајући матрице уз e^t и e^{3t} , да добијемо болитме до коефицијената, добијемо систем: $a_1 + a_2 = a_1 + 2b_1$, $b_1 + b_2 = 2a_1 - 2b_1$ остат једначина са $a_2 = a_2 + 2b_2 + 16$, $b_2 = 2a_2 - 2b_2$ остат неопознатих $a_1 - 3a_3 = a_3 + 2b_3$, $b_1 - 3b_3 = 2a_3 - 2b_3 + 3$ (помазан ам лак) $-3a_4 = a_4 + 2b_4$, $-3b_4 = 2a_4 - 2b_4$

чије је једно решење: $a_1 = -13, a_2 = -12, b_1 = -6, b_2 = -8, a_3 = -\frac{4}{5}, b_3 = 1$ (за b_3 се можда изабрати било која вредност, као вредност слободне параметра) $a_4 = -\frac{6}{5}, b_4 = \frac{12}{5}$.
 $\Rightarrow X = X_H + X_P = \begin{bmatrix} C_1 \\ -2C_1 \end{bmatrix} e^{-3t} + \begin{bmatrix} C_2 \\ C_2 \end{bmatrix} e^{2t} + \begin{bmatrix} -13 - 12t \\ -6 - 8t \end{bmatrix} e^t + \begin{bmatrix} -\frac{4}{5} - \frac{6}{5}t \\ 1 + \frac{12}{5}t \end{bmatrix} e^{3t} \Rightarrow \begin{cases} x = -(13 + 12t)e^t + 2C_2 e^{2t} + (-\frac{4}{5} - \frac{6}{5}t)e^{3t} \\ y = -(6 + 8t)e^t + C_2 e^{2t} + (1 - 2C_1 + \frac{12}{5}t)e^{3t} \end{cases}$

2) Решити систем:
$$\begin{cases} x' = -x + 2y \\ y' = -x + y + \cos at \end{cases}$$

Решење: Решење одговарајућег хомогеног система је $X_H = C_1 \begin{bmatrix} \cos t + \sin t \\ \cos t \end{bmatrix} + C_2 \begin{bmatrix} \sin t - \cos t \\ \sin t \end{bmatrix}$ (собствене вредности су $\lambda_{1,2} = \pm i$, а сопствени вектор за $\lambda = i$ је $\begin{bmatrix} 1 - i \\ 1 \end{bmatrix}$)

Пошто је $B = \begin{bmatrix} 0 \\ \cos at \end{bmatrix}$ за бардикуларно решење разликујемо два случаја:

1) $a \neq \pm 1 \Rightarrow i \cdot a$ није сопствена вредност $\Rightarrow X_P = \begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \end{bmatrix} \cos at + \begin{bmatrix} a_2 \\ b_2 \end{bmatrix} \sin at$. Уврштавање

у датих систем добијемо: $\begin{bmatrix} a_1 + a_2 t \\ b_1 + b_2 t \end{bmatrix} \cos at + \begin{bmatrix} a_1 a_2 \\ a_2 b_1 \end{bmatrix} \sin at - \begin{bmatrix} a_1 a_1 \\ a_1 b_1 \end{bmatrix} \sin at = \begin{bmatrix} (2b_1 - a_1) \cos at + (2b_2 - a_2) \sin at \end{bmatrix}$

одј. систем: $\begin{cases} a a_2 = 2b_1 - a_1 \\ -a a_1 = 2b_2 - a_2 \end{cases} \Rightarrow \dots \Rightarrow a_1 = \frac{2}{1-a^2}, b_1 = \frac{1}{1-a^2}, a_2 = 0, b_2 = -\frac{a}{1-a^2}$.

Значи $X_P = \begin{bmatrix} \frac{2}{1-a^2} \cos at + \frac{0}{1-a^2} \sin at \\ \frac{0}{1-a^2} \cos at - \frac{a}{1-a^2} \sin at \end{bmatrix}$ и $X = X_H + X_P = \begin{bmatrix} C_1(\cos t + \sin t) + C_2(\sin t - \cos t) + \frac{2}{1-a^2} \cos at \\ C_1 \cos t + C_2 \sin t + \frac{1}{1-a^2} \cos at - \frac{a}{1-a^2} \sin at \end{bmatrix}$

2) $a = \pm 1 \Rightarrow \pm i \cdot 1$ јесу сопствене вредности $\Rightarrow X_P = \begin{bmatrix} a_1 + a_2 t \\ b_1 + b_2 t \end{bmatrix} \cos at + \begin{bmatrix} a_3 + a_4 t \\ b_3 + b_4 t \end{bmatrix} \sin at$. Уврштавање

њач у сопственим систем добијено (решење система у једначина је одговарајуће-
 барско, нпр. a_1 и b_1 су барачиори): $a_1=0, b_1=0, a_2=0, b_2=\frac{1}{2}, a_3=0, b_3=\frac{1}{2}, b_4=\frac{1}{2}, a_4=1$.
 $\Rightarrow X_p = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{2}t \end{bmatrix} \cos t + \begin{bmatrix} t \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{2}t \end{bmatrix} \sin t \Rightarrow X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = X_h + X_p = \begin{bmatrix} c_1 - c_2 \\ c_1 + \frac{1}{2}t \end{bmatrix} \cos t + \begin{bmatrix} c_1 + c_2 + t \\ c_2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}t \end{bmatrix} \sin t$

НАПОМЕНА: При решавању добијеног система за барачиоре се могу изабрати
 произвољне вредности. Замена барачиорних решења X_p у даћи систем може
 се вршити и зачењем x и y ($X_p = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$) у даћи систем диф. једначина.

МЕТОДА ВАРИЈАЦИЈЕ КОНСТАНТИ

3) Решити систем: $\begin{cases} x' = 3x - y + \frac{1}{t^2} \\ y' = 9x - 3y \end{cases}$

Решење: Решење одговарајућег хомогеног система је $X_h = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} t \\ -1+3t \end{bmatrix}$ ($\lambda_{1,2}=0$ је
 двострука сопствена вредност) или, записано матрично $X_h = \begin{bmatrix} 1 & t \\ 3 & -1+3t \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = F \cdot C$ (F је
 "фундаментална" матрица система, C је константа).

Опште решење нехомогеног једначине је $X = F \cdot C(t)$, где $C(t) = \begin{bmatrix} c_1(t) \\ c_2(t) \end{bmatrix}$ налазимо из
 система $\frac{dC}{dt} = F^{-1} \cdot B$, где $\begin{bmatrix} c_1' \\ c_2' \end{bmatrix} = \frac{1}{\det F} \cdot \begin{bmatrix} t+3t & -t \\ -3 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{t^2} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-3t & t \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{t^2} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1-3t}{t^2} \\ \frac{3}{t^2} \end{bmatrix}$. Како је

$c_1(t) = \int \frac{1-3t}{t^2} dt = \dots = -\frac{1}{t} - 3 \ln t + D_1$, $c_2(t) = \int \frac{3}{t^2} dt = -\frac{3}{t} + D_2$, опште решење је:

$X = F \cdot C(t) = \begin{bmatrix} 1 & t \\ 3 & -1+3t \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} D_1 - \frac{1}{t} - 3 \ln t \\ D_2 - \frac{3}{t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_1 - 3 + D_2 t - \frac{1}{t} - 3 \ln t \\ 3D_1 - 9 - D_2 + 3D_2 t - 9 \ln t \end{bmatrix}$

4) Решити систем: $\begin{cases} x' = -5x + 2y + 3 \sin t \\ y' = x - 6y - 3e^{-2t} \end{cases}$

Решење: Решење одговарајућег хомогеног система је $X_h = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} e^{-7t} + c_2 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} e^{-4t} =$
 $= c_1 \begin{bmatrix} e^{-7t} \\ -e^{-7t} \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 2e^{-4t} \\ e^{-4t} \end{bmatrix}$ ($\lambda_1 = -7, \lambda_2 = -4$ су сопствене вредности а $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ и $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ одговарајући
 сопствени вектори), па је $F = \begin{bmatrix} e^{-7t} & 2e^{-4t} \\ -e^{-7t} & e^{-4t} \end{bmatrix}$ фундаментална матрица система.

Опште решење одговарајућег нехомогеног система је $X = F \cdot C(t)$, $C(t) = \begin{bmatrix} c_1(t) \\ c_2(t) \end{bmatrix}$, или
 $X = c_1(t) \begin{bmatrix} e^{-7t} \\ -e^{-7t} \end{bmatrix} + c_2(t) \begin{bmatrix} 2e^{-4t} \\ e^{-4t} \end{bmatrix}$. Функције $c_1(t)$ и $c_2(t)$ налазимо из:

$\begin{bmatrix} c_1' \\ c_2' \end{bmatrix} = \frac{dC}{dt} = F^{-1} \cdot B = \frac{1}{3e^{-11t}} \cdot \begin{bmatrix} e^{-4t} & -2e^{-4t} \\ e^{-7t} & e^{-7t} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 \sin t \\ -3e^{-2t} \end{bmatrix} = \dots = \begin{bmatrix} e^{7t} \sin t + 2e^{5t} \\ e^{4t} \sin t - e^{2t} \end{bmatrix}$, где

$c_1 = \int (e^{7t} \sin t + 2e^{5t}) dt = \int e^{7t} \sin t dt + 2 \int e^{5t} dt = \dots = \frac{(7 \sin t - \cos t) \cdot e^{7t}}{50} + \frac{2}{5} e^{5t} + D_1$ (интеграл

$I = \int e^{7t} \sin t dt$ се решава гласовним варијацијом интегралом), и слично

$c_2 = \int (e^{4t} \sin t - e^{2t}) dt = \int e^{4t} \sin t dt - \int e^{2t} dt = \dots = \frac{(4 \sin t - \cos t) \cdot e^{4t}}{17} - \frac{1}{2} e^{2t} + D_2$.

На крају $X = c_1 \begin{bmatrix} e^{-7t} \\ -e^{-7t} \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 2e^{-4t} \\ e^{-4t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{7 \sin t - \cos t}{50} + \frac{2}{5} e^{-2t} + D_1 e^{-7t} \\ \frac{\cos t - 7 \sin t}{50} - \frac{2}{5} e^{-2t} - D_1 e^{-7t} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{8 \sin t - 2 \cos t}{17} e^{-2t} - \frac{1}{2} e^{-2t} + D_2 e^{-4t} \\ \frac{4 \sin t - \cos t}{17} e^{-2t} - \frac{1}{2} e^{-2t} + D_2 e^{-4t} \end{bmatrix}$

$\Rightarrow x = \frac{519 \sin t - 117 \cos t}{850} - \frac{3}{5} e^{-2t} + D_1 e^{-7t} + 2D_2 e^{-4t}$
 $y = \frac{81 \sin t - 33 \cos t}{850} - \frac{9}{10} e^{-2t} - D_1 e^{-7t} + D_2 e^{-4t}$