1. **<u>POJAM DIFERENCIJALNE JEDNAČINE. REŠENJE DIFERENCIJALNE JEDNAČINE, OPŠTE, PARTIKULARNO, SINGULARNO REŠENJE.</u>** **<u>DEF:</u>** Diferencijalnom jednačinom nazivamo jednačinu koja izražava neku vezu između nezavisno promenljive, nepoznate funkcije i njenih izvoda: $F(x,y,y',y'',...,y^{(n)})=0$; najviši red izvoda u toj jednačini nazivamo redom te diferencijalne jednačine. **<u>DEF:</u> Rešenje** diferencijalne jednačine je svaka funkcija koja identički zadovoljava tu jednačinu. **<u>DEF:</u>** Jednoparametarsku porodicu funkcija $y=\varphi(x,C)$, odn. $\phi(x,y,C)=0$, koja identički zadovoljava diferencijalnu jednačinu prvog reda $y'=f(x,y)$, odn. $F(x,y,y')=0$, nazivamo **opštim rešenjem** (opštim integralom) te jednačine. **<u>DEF:</u> Partikularno rešenje** (partikularni integral) diferencijalne jednačine je svaka ona funkcija $y=y(x)$ koja se dobija iz opšteg rešenja te jednačine za odgovarajuće posebne vrednosti integracionih konstanata. ▪ Ako datu diferencijalnu jednačinu identički zadovoljava i funkcija $y(x)$ koja nija sadržana u njenom opštem rešenju tada se ova funkcija $y(x)$ naziva **singularno rešenje** (singularni integral) te jednačine.

2. **<u>JEDNAČINE S RAZDVOJENIM PROMENLJIVIM.</u>** U jednačini: $g(y)dy=f(x)dx$ promenljive su razdvojene – svaka se nalazi na onoj strani jednačine na kojoj je njen diferencijal; treba odrediti promenljivu y kao funkciju od x . Integracijom dobijamo: $\int g(y)dy=\int f(x)dx+C$, ako se zada početni uslov $y(x_0)=y_0$, odrediće se konstanta C ; njoj odgovarajuće partikularno rešenje koje zadovoljava početni uslov ima oblik: $\int_{y_0}^{y} g(y)dy=\int_{x_0}^{x} f(x)dx$ (*). Očigledno, jednakost (*) se pretvara u identitet ako se gornje granice y i x zamene sa y_0 i x_0 . **<u>DEF:</u>** Diferencijalna jednačina I reda čije se promenljive mogu razdvojiti neposredno ili ako se obe strane pomnože istim izrazom, zove se diferencijalna jednačina sa **razdvojenim promenljivim**.

3. **<u>HOMOGENA DIFERENCIJALNA JEDNAČINA PRVOG REDA.</u>** **<u>DEF:</u>** Jednačina $y'=f(x,y)$ zove se homogena diferencijalna jednačina ako se funkcija $f(x,y)$ može predstaviti u obliku $f(x,y)=\varphi\left(\frac{y}{x}\right)$. **<u>DEF:</u>** Funkciju $f(x,y)$ nazivamo homogenom funkcijom m -tog stepena po promenljivim x i y ako je za svako $\lambda\neq 0$ $f(\lambda x,\lambda y)=\lambda^m f(x,y)$ $(m\in Q)$.

4. **<u>JEDNAČINA PRVOG REDA KOJA SE SVODI NA HOMOGENU JEDNAČINU.</u>** **<u>DEF:</u>** Diferencijalnu jednačinu prvog reda $y'=f(x,y)$ nazivamo **homogenom** u odnosu na x i y ako je $f(x,y)$ homogena funkcija nultog stepena u odnosu na x i y , tj. $f(\lambda x,\lambda y)=\lambda^0 f(x,y)\equiv f(x,y)$.

5. **<u>LINEARNA DIFERENCIJALNA JEDNAČINA PRVOG REDA.</u>** **<u>DEF:</u>** Linearnom diferencijalnom jednačinom prvog reda nazivamo jednačinu $y'+p(x)y=q(x)$ (◊) koja je linearna u odnosu na traženu funkciju $y(x)$ i njen izvod; pri tom su $p(x)$ i $q(x)$ zadate neprekidne funkcije nezavisno promenljive x . ■ Napišimo traženu f-ju u obliku $y=uv$, gde su $u=u(x)$ i $v=v(x)$ f-je od kojih jedna može biti izabrana proizvoljno, a druga treba da zavisi od prve u tom smislu da njihov proizvod zadovoljava linearnu jednačinu (◊). Dakle, ako je $y=uv$, tada je $y'=u'v+uv'$, pa zamenom u (◊) dobijamo $u'v+uv'+p(x)uv=q(x)$. Ako kao $v(x)$ izaberemo neko partikularno rešenje jednačine $v'+p(x)v=0$ (*) tada treba da $u(x)$ odredimo iz jednačine $u'v=q(x)$ (**). U jednačini (*) promenljive se razdvajaju: $\frac{dv}{v}=-p(x)dx$, pa je njeno opšte rešenje $\ln|v|=-\int p(x)dx+C_1$ potrebno partikularno rešenje imamo za $C_1=0$ - to je f-ja: $v=e^{-\int p(x)dx}$. Uvršćujući nađenu vrednost f-je u (**) dobijamo $\frac{du}{dx}=\frac{q(x)}{v}=q(x)e^{\int p(x)dx}$, $dx=q(x)e^{\int p(x)dx}dx$; dakle $u=\int q(x)e^{\int p(x)dx}dx+C$. **Opšte rešenje** (◊) prema tome je $y=e^{-\int p(x)dx}\left[\int q(x)e^{\int p(x)dx}dx+C\right]$ i dobija se pomoću dveju integracija. Partikularno rešenje koje odgovara početnom uslovu $y(x_0)=y_0$ dobija se kada se u opštem rešenju stavi $x=x_0$, $y=y_0$.

6. **<u>BERNULIJEVA DIFERENCIJALNA JEDNAČINA. RIKATIJEVA DIFERENCIJALNA JEDNAČINA.</u>** Na linearne jednačine se svode i složenije jednačine kao recimo **Bernulijeva**: $y'+p(x)y=q(x)y^{\alpha}$, $(\alpha\in\square)$, koja za $\alpha=0$ predstavlja linearnu jednačinu, a za $\alpha=1$ jednačinu u kojoj se promenljive mogu razdvojiti. Za proizvoljno $\alpha\neq\{0,1\}$ primenjujemo sledeći postupak: obe strane delimo sa y^{α} : $y^{-\alpha}y'+p(x)y^{-\alpha+1}=q(x)$ i uvodimo pomoćnu f-ju $y^{-\alpha+1}=z$, $z'=(-\alpha+1)y^{-\alpha}y'$, čime se data jednačina svodi na linearnu po z : $z'+(-\alpha+1)p(x)z=(-\alpha+1)q(x)$. Opšte rešenje ove jednačine je:

$$z=e^{-(1-\alpha)\int p(x)dx}\left[(1-\alpha)\int q(x)e^{(1-\alpha)\int p(x)dx}dx+C\right],$$

pa **opšte rešenje Bernulijeve jednačine** glasi:

$$y=y^{\alpha}e^{-(1-\alpha)\int p(x)dx}\left[(1-\alpha)\int q(x)e^{(1-\alpha)\int p(x)dx}dx+C\right].$$

<u>DEF:</u> Diferencijalna jednačina prvog reda oblika $y'+p(x)y^2+q(x)y=r(x)$ (*) u kojoj su $p(x)$ i $r(x)$ neprekidne funkcije u intervalu $a\le x\le b$, $(p(x)\not\equiv 0)$ zove se **Rikatijeva diferencijalna jednačina**. Za $p(x)\equiv 0$, jednačina (*) je linearna, a za $r(x)\equiv 0$ Bernulijeva jednačina.

7. **<u>JEDNAČINA S TOTALNIM DIFERENCIJALOM.</u>** **<u>DEF:</u>** Jednačina $P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0$ (*) predstavlja jednačinu s totalnim diferencijalom ili egzaktnu diferencijalnu jednačinu ako su $P(x,y)$ i $Q(x,y)$ neprekidne i diferencijabilne funkcije koje zadovoljavaju uslov $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$ (**), gde su parcijalni izvodi $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$ neprekidni u nekoj datoj oblasti D . ▪ Ako je leva strana jednačine (*) totalni diferencijal, tada važi uslov (**), i obrnuto ako je uslov ispunjen, tada je leva strana totalni diferencijal neke funkcije $u(x,y)$, tj. jednačina (*) ima oblik: $du(x,y)=P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0$, pa je njen opšti integral $u(x,y)=C$. Pokažimo da integracija jednačine (*) daje: $\int_{x_0}^{x}P(x,y)dx+\int_{y_0}^{y}Q(x,y)dy=C$, gde je (x_0,y_0) proizvoljna tačka u oblasti D . Pre svega, imamo da je $du(x,y)=\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial x}dy=P(x,y)dx+Q(x,y)dy$ *(1)* ; u tom slučaju je: $P(x,y)=\frac{\partial u}{\partial x}$ i $Q(x,y)=\frac{\partial u}{\partial y}$ *(2)*, iz ove jednakosti nalazimo da je: $u=\int_{x_0}^{x}P(x,y)dx+\varphi(y)$ *(3)*; pri tome s obzirom da smatramo da je $y=const$ integraciona konstanta zavisi od y . Izaberimo f-ju $\varphi(y)$ iz *(2)* tako da važi druga od jednakosti *(1)*, diferencirajmo izraz *(2)* i izjednačimo dobijeni rezultat sa $Q(x,y)$:

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\int_{x_0}^{x}\frac{\partial P}{\partial y}dx+\varphi'(y)=Q(x,y),$$

$\int_{x_0}^{x}\frac{\partial Q}{\partial x}dx+\varphi'(y)=Q(x,y)$, što znači da je: $Q(x,y)\Big|_{x_0}^{x}+\varphi'(y)=Q(x,y)$, tj. $Q(x,y)-Q(x_0,y)+\varphi'(y)=Q(x,y)$, dakle, $\varphi'(y)=Q(x_0,y)$, $\varphi(y)=\int_{y_0}^{y}Q(x_0,y)dy+C_0$ *(4)*. Uzimajući u obzir *(3)* i *(4)* možemo napisati da je: $u=\int_{x_0}^{x}P(x,y)dx+\int_{y_0}^{y}Q(x_0,y)dy+C_0$. Izjednačavajući ovaj izraz sa C dobijamo upravo *(1)*.

8. **<u>INTEGRACIONI FAKTOR KOD JEDNAČINE SA TOTALNIM DIFERENCIJALOM.</u>** Integracioni faktor obeležavamo sa λ . $P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0$

$$\frac{\partial P}{\partial y}\neq\frac{\partial Q}{\partial x}\Rightarrow\lambda(x,y):\underbrace{\lambda P}_{P_1}dx+\underbrace{\lambda Q}_{Q_1}dy=0 . \qquad \frac{\partial P_1}{\partial y}=\frac{\partial Q_1}{\partial x} ;$$

$$\frac{\partial}{\partial y}(\lambda P)=\frac{\partial}{\partial x}(\lambda Q) , \qquad \frac{\partial\lambda}{\partial y}P+\lambda\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial\lambda}{\partial x}Q+\lambda\frac{\partial Q}{\partial x} . \qquad (1)$$

$$\lambda=\lambda(x)\Rightarrow\frac{\partial\lambda}{\partial y}=0 , \qquad \frac{\partial\lambda}{\partial x}\to\frac{d\lambda}{dx} ,$$

$$\lambda\left(\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}\right)=\frac{d\lambda}{dx}Q\Rightarrow \quad \# \# \# \quad (2) \quad \lambda=\lambda(y)\Rightarrow\frac{\partial\lambda}{\partial x}=0 ,$$

$$\frac{\partial\lambda}{\partial y}=\frac{\partial\lambda}{dy} , \quad \frac{d\lambda}{\lambda}=\frac{-\frac{\partial P}{\partial y}+\frac{\partial Q}{\partial x}}{P}dy .$$

9. **<u>SVOĐENJE DIFERENCIJALNE JEDNAČINE OBLIKA</u>** $F(x,y',y'')=0$ **<u>NA DIFERENCIJALNU JEDNAČINU PRVOG REDA.</u>** $y''=f(x,y,y')$ smena: $y'=z\Rightarrow y''=z'$, $y'=\varphi(x,C_1)\Rightarrow y=\int\varphi(x,C_1)dx+C_2$.

10. **<u>SVOĐENJE DIFERENCIJALNE JEDNAČINE OBLIKA</u>** $F(y,y',y'')=0$ **<u>NA DIFERENCIJALNU JEDNAČINU PRVOG REDA.</u>** f $y''=f(y,y')$ smena $z=y'$, $z=z(y)$,

$$\Rightarrow y''=\frac{dz}{dx}=\frac{dz}{dy}\cdot\frac{dy}{dx}=\frac{dz}{dy}\cdot y'=\frac{dz}{dy}\cdot z$$

$$\Rightarrow y''=\frac{dz}{dx}=z-\frac{dz}{dy} \text{ , tj. } \frac{zdz}{dy}=f(y,z) .$$

11. **<u>DIFERENCIJALNE JEDNAČINE VIŠEG REDA. OPŠTE REŠENJE. SVOĐENJE DIFERENCIJALNE JEDNAČINE</u>** $F(x,y^{(k)},y^{(k+1)},...,y^{(n)})=0$ **<u>NA DIFERENCIJALNU JEDNAČINU PRVOG REDA.</u>** Diferencijalna jednačina n -tog reda koja se može rešiti u odnosu na n -ti izvod može se napisati u obliku $y^{(n)}=f(x,y,y',...,y^{(n-1)})$. Opšte rešenje te jednačine zavisi od n proizvoljnih integracionih konstanata: $y=\varphi(x,C_1,C_2,...,C_n)$, pa je za određivanje partikularnog rešenja neophodno dati početne uslove $y(x_0)=y_0$, $y'(x_0)=y'_0,...,y^{(n-1)}(x_0)=y_0^{(n-1)}$. Ako se nađeno opšte rešenje diferencira $n-1$ put i u dobijeni rezultat unose početni uslovi, dobija se sistem od n jednačina sa n nepoznatih $C_1,C_2,...,C_n$, pa ove nepoznate određujemo iz tog sistema. Linearna diferencijalna jednačina višeg reda je jednačina linearna po nepoznatoj funkciji i njenim izvodima; takva jednačina ima oblik: $y^{(n)}+p_1(x)y^{(n-1)}+P_2(x)y^{(n-2)}+...+$ $p_{n-1}(x)y'+p_n(x)y=f(x)$ gde su $p_1(x),...,p_n(x)$ neprekidne funkcije.

$F(x,y^{(k)},y^{(k-1)},...,y^{(n)})=0$, smena: $z'=y^{k+1}$,..., $z^{(n-k)}=y^{(k)}$, $z=y^k$. $F(x,z,z',...,z^{(n-k)})=0$.

12. **HOMOGENA LINEARNA DIFERENCIJALNA JEDNAČINA DRUGOG REDA. LINEARNO NEZAVISNA REŠENJA. DETERMINANTA VRONSKOG. OPŠTE REŠENJE.** **DEF:** Linearna diferencijalna jednačina drugog reda je jednačina linearna u odnosu na nepoznatu f-ju i njene izvode prvog i drugog reda: $y''+p(x)y'+q(x)y=f(x)$ (☼). Ako je (identički) $f(x)\neq 0$, jednačina (☼) je **nehomogena**, a ako je $f(x)\equiv 0$, tada je ona **homogena** linearna diferencijalna jednačina. ■ Rešiti homogenu linearnu diferencijalnu jednačinu znači naći sva njena netrivijalna rešenja, tj. sva rešenja $y(x)\neq 0$ (identički). **TEO:** Ako je $y(x)$ neko rešenje homogene linearne diferencijalne jednačine, onda je i $Cy(x)$, gde je $C\neq 0$ proizvoljna konstanta, rešenje te jednačine. **TEO:** Ako su $y_1(x)$ i $y_2(x)$ rešenja homogene linearne diferencijalne jednačine tada je i svaka njihova linearna kombinacija $y(x)=C_1y_1(x)+C_2y_2(x)$ rešenje jednačine. **DOKAZ** Ako dva puta diferenciramo f-ju $y=C_1y_1+C_2y_2$, dobićemo: $y'=C_1y_1'+C_2y_2'$, $y''=C_1y_1''+C_2y_2''$. Ako sada stavimo y,y' i y'' u (☼) imaćemo:

$$C_1y_1''+C_2y_2''+p(C_1y_1'+C_2y_2')+q(C_1y_1+C_2y_2)$$

$$=C_1(y_1''+py_1'+qy_1)+C_2(y_2''+py_2'+qy)\equiv 0$$

jer su, po pretpostavci, $y_1(x)$ i $y_2(x)$ rešenja jednačine (☼), pa su oba izraza u zagradama identički jednaki nuli. Prema tome i linearna kombinacija $C_1y_1+C_2y_2$ je takođe rešenje date jednačine. ♦ **DEF:** Dva rešenja $y_1(x)$ i $y_2(x)$ jednačine (☼) su **linearno zavisna** ako je $\frac{y_2}{y_1}=const.$ odnosno $\alpha y_1+\beta y_2=0$ (α ili β različito od nule), a **linearno nezavisna** ako je $\frac{y_2}{y_1}=u(x)\ (\neq const.)$, odnosno $\alpha y_1+\beta y_2\neq 0$ (α ili β različito od nule). **DEF:** Ako su $y_1(x)$ i $y_2(x)$ dva rešenja homogene jednačine (☼) tada se funkcionalna determinanta $W(x)=\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}$ zove **determinanta Vronskog** odnosne jednačine. **TEO:** Ako su $y_1(x)$ i $y_2(x)$ dva linearno nezavisna rešenja jednačine (☼) tada je odgovarajuća determinanta Vronskog $W(x)\neq 0, \forall x\in(a,b)$, a ako su $y_1(x)$ i $y_2(x)$ linearno zavisna rešenja te jednačine, tada je $W(x)=0$. **DOKAZ** Pođimo od suprotne pretpostavke: $W(x_0)=0$ u tački $x_0\in(a,b)$. To znači da je $W(x_0)=\begin{vmatrix} y_{10} & y_{20} \\ y'_{10} & y'_{20} \end{vmatrix}$, gde je $y_{10}=y_1(x_0)$, $y'_{10}=y'_1(x_0)$, $y_{20}=y_2(x_0)$, $y'_{20}=y'_2(x_0)$. Posmatrajmo homogeni sistem linearnih algebarskih jednačina $\begin{cases}\alpha y_{10}+\beta y_{20}=0\\ \alpha y_{10}+\beta y_{20}=0\end{cases}$ (□) čija je determinanta $D=W(x_0)=0$ te sistem osim trivijalnog ima i netrivijalno rešenje $\{\alpha,\beta\}$, pomoću koga ćemo obrazovati novu f-ju $\overline{y}(x)=\alpha y_1(x)+\beta y_2(x)$. S obzirom na sistem (□) u tački x_0 važi uslov $\overline{y}(x_0)=\alpha y_1(x_0)+\beta y_2(x_0)$ (□□). Međutim, osim f-je $\overline{y}(x)$ početni uslov (□□) zadovoljava i f-ju $y=0$ koja odgovara trivijalnom rešenju sistema (□), a to protivereči Peanovoj teoremi. Dakle, $W(x)\neq 0,\forall x\in(a,b)$. Ako je, u drugom slučaju $\frac{y_2}{y_1}=k(\neq 0)$, tj. $y_2=ky_1$, tada je očigledno $W(x)=\begin{vmatrix} y_1 & ky_1 \\ y'_1 & ky'_1 \end{vmatrix}=0$. **TEO:** Ako su y_1 i y_2 dva linearno nezavisna rešenja, tj. takva rešenja jednačine (☼) da je uvek $\frac{y_2}{y_1}\neq const.$, tada netrivijalna linearna kombinacija tih f-ja $y=C_1y_1+C_2y_2$ predstavlja **opšte rešenje jednačine** (☼). Ako bi bilo $\frac{y_2}{y_1}=C=const.$ tj. $y_2=Cy_1$, tada bi linearna kombinacija $C_1y_1+C_2y_2=(C_1+CC_2)y_1$ sadržala samo jednu konstantu, te ne bi mogla predstavljati opšte rešenje jednačine (☼). ■ Iz teoreme zaključujemo da od bilo koja dva linearno nezavisna partikularna rešenja homogene linearne diferencijalne jednačine drugog reda možemo formirati njeno opšte rešenje. Zato kažemo da svaka dva linearno nezavisna partikularna rešenja čine fundamentalni sistem rešenja homogene linearne diferencijalne jednačine drugog reda.

13. **NALAŽENJE OPŠTEG REŠENJA HOMOGENE LINEARNE DIFERENCIJALNE JEDNAČINE DRUGOG REDA, AKO JE POZNATO JEDNO NJENO PARTIKULARNO REŠENJE. STRUKTURA OPŠTEG REŠENJA NEHOMOGENE LINEARNE DIFERENCIJALNE JEDNAČINE.** **TEO:** Ako je $y_1(x)$ jedno partikularno rešenje jednačine drugog reda $y''+p(x)y'+q(x)y=0$, onda se drugo, linearno nezavisno rešenje $y_2(x)$ nalazi iz jednačine prvog reda. **DOKAZ** Prema pretpostavci je $y_2=u\cdot y_1$, pa je $y_2'=u\cdot y_1'+u'\cdot y_1$, $y_2''=u\cdot y_1''+2u'+y_1'+u''\cdot y_1$, tako da je

$$y_2''+py_2'+qy_2=u[y_1''+py_1'+qy_1]+u'(2y_1'+py_1)+u''y_1$$

gde su leva strana i izraz u srednjoj zagradi na desnoj strani identički jednaki 0. Zato ostaje: $u''y_1+u'(2y_1'+py_1)=0$, to jest $\frac{du'}{dx}+\left(2\frac{y_1'}{y_1}+p\right)u'=0$, a to je jednačina prvog reda po u'. Odatle nalazimo (razdvajanjem promenljivih) $u'(x)$ i zatim neposredno $u(x)$, a time smo dobili i $y_2=y_1u$. ♦ **TEO:** Opšte rešenje nehomogene linearne diferencijalne jednačine $y''+p(x)y'+q(x)y=0$ je zbir opšteg rešenja odgovarajuće homogene jednačine i proizvoljnog partikularnog rešenja $y_p(x)$ date nehomogene jednačine: $y=C_1y_1+C_2y_2+y_p(x)$. **DOKAZ** Neka je $y_h(x)$ opšte rešenje odgovarajuće homogene jednačine, a $y_p(x)$ proizvoljno malo partikularno rešenje date nehomogene jednačine. Diferenciranjem f-je $y=y_h(x)+y_p(x)$ dobijamo $y'=y_h'(x)+y_p'(x)$, $y''=y''_h(x)+y''_p(x)$, pa s obzirom na to leva strana jednačine postaje: $[y''_h+p(x)y'_h+q(x)y_h]+[y''_p+p(x)y'_p+q(x)y_p]$, gde je izraz u prvoj zagradi identički jednak nuli, a izraz u drugoj zagradi je jednak $f(x)$ jer je $y(x)$ rešenje nehomogene jednačine. Prema tome, f-ja $y=y_h(x)+y_p(x)$ zaista je rešenje jednačine. **Opšte rešenje** ima oblik $y=C_1y_1+C_2y_2+y_p(x)$.

14. **HOMOGENA LINEARNA DIFERENCIJALNA JEDNAČINA DRUGOG REDA S KONSTANTNIM KOEFICIJENTIMA.** Razmatraćemo homogenu linearnu diferencijalnu jednačinu drugog reda: $y''+a_1y'+a_2y=0$ (*) u kojoj su koeficijenti a_1 i a_2 konstantni. Potražimo jedno rešenje te jednačine u obliku $y=e^{kx}$, gde konstantu k treba odrediti tako da f-ja e^{kx} identički zadovoljava tu jednačinu. Kako je $y'=ke^{kx}$ i $y''=k^2e^{kx}$, znači da treba da bude zadovoljen identitet $e^{kx}(k^2+a_1k+a_2)=0$ ili, s obzirom da je $e^{kx}\neq 0,\forall k$, $k^2+a_1k+a_2=0$ (♬). Dakle, možemo zaključiti da će eksponencijalna f-ja e^{kx} biti rešenje homogene jednačine ako i samo ako je k koren (rešenje) kvadratne jednačine – tzv. **karakteristične jednačine** date homogene jednačine. Da bismo obrazovali karakterističnu jednačinu (♬) za datu homogenu jednačinu treba da u (*) umesto y stavimo 1, a izvode y' i y'' zamenimo sa konstantom k odn. k^2. Razlikujemo **tri moguća slučaja** za korene karakteristične jednačine: **1.** $k_1\neq k_2$, k_1 i k_2 realni brojevi, **2.** $k_1=k_2$ ($\equiv k$, k realan broj), **3.** k_1 i k_2 su konjugovano kompleksni koreni, tj. $k_1=\alpha+i\beta$, $k_2=\alpha-i\beta$, $\beta\neq 0$. Slučajevi: **(1)** Ako su $k_1,k_2\in R$ i $k_1\neq k_2$ tada odmah dobijamo dva rešenja jednačine: e^{k_1x} i e^{k_2x}. Očigledno je njihov količnik: $\frac{e^{k_2x}}{e^{k_1x}}=e^{(k_2-k_1)x}\neq const.$ što znači da su ta rešenja linearno nezavisna. Opšte rešenje u ovom slučaju je: $y=C_1e^{k_1x}+C_2e^{k_2x}$. **(2)** $k_1=k_2=k$, $k\in R$. U tom slučaju dobijamo samo jedno rešenje: $y_1=e^{kx}$. Po teoremi po kojoj se drugo rešenje jednačine drugog reda nalazi iz jednačine prvog reda, linearno partikularno rešenje $y_2=y_1u$ nalazimo koristeći za nepoznatu f-ju $u(x)$ diferencijalnu jednačinu: $\frac{du'}{dx}+\left(2\frac{y'_1}{y_1}+a_1\right)u'=0$, gde je $y_1=e^{kx}$, $y'_1=ke^{kx}$, $\frac{y'_1}{y_1}=k$, a iz karakteristične jednačine $k=\frac{-a_1}{2}$ tako da dobijamo: $\frac{du'}{dx}=0$ $\left(2\frac{y'_1}{y_1}+a_1=2k+a_1=0\right)$, $u'=C\Rightarrow u=Cx$, tj. $u=x$ (za $C=1$). Sada je $y_2=xy_1=xe^{kx}$, te je $C_1y_1+C_2y_2=C_1e^{kx}+C_2xe^{kx}$. Dakle, opšte rešenje ima oblik: $y=(C_1+C_2x)e^{kx}$. **TEO:** Ako homogenu linearnu diferencijalnu jednačinu sa realnim koeficijentima zadovoljava kompleksna f-ja: $u(x)+i\cdot v(x)$ tada i svaka od funkcija $u(x)$ i $v(x)$ za sebe zadovoljava tu jednačinu, tj. $u(x)$ i $v(x)$ su rešenja te jednačine. **DOKAZ** Iz uslova da f-ja $u(x)+i\cdot v(x)$ zadovoljava našu jednačinu proizilazi $(u''+a_1u'+a_2u)+i(v''+a_1v'+a_2v)=0$, odakle zaključujemo (na osnovu $a+ib=0$, $a=0\wedge b=0$), da je i $u''+a_1u'+a_2u=0$ i $v''+a_1v'+a_2v=0$, što znači da su zaista i $u(x)$ i $v(x)$ rešenja date jednačine. ♦ **(3)** Ako su koreni karakteristične jednačine konjugovano kompleksni: $k_1=\alpha+i\beta$, $k_2=\alpha-i\beta$, $\beta\neq 0$, tada imamo dva rešenja: $y_1=e^{(\alpha+i\beta)x}$ i $y_2=e^{(\alpha-i\beta)x}$, gde je:

$$e^{(\alpha\pm i\beta)x}=e^{\alpha x}e^{\pm i\beta x}=e^{\alpha x}(\cos\beta x\pm i\sin\beta x)$$

$=e^{\alpha x}\cos\beta x\pm ie^{\alpha x}\sin\beta x$. Na osnovu prethodne teoreme: $y=C_1e^{\alpha x}\cos\beta x+C_2e^{\alpha x}\sin\beta x$ to jest $y=e^{\alpha x}(C_1\cos\beta x+C_2\sin\beta x)$.

15. **<u>METODA NEODREĐENIH KOEFICIJENATA ZA REŠAVANJE NEHOMOGENE LINEARNE DIFERENCIJALNE JEDNAČINE DRUGOG REDA SA KONSTANTNIM KOEFICIJENTIMA.</u>** Razmatraćemo nehomogenu jednačinu: $y''+a_1y'+a_2y=f(x)$ (☺) sa konstantnim koeficijentima a_1 i a_2, čije je opšte rešenje zbir opšteg rešenja odgovarajuće homogene jednačine i nekog partikularnog rešenja. Razmotrićemo specijalne slučajeve kad se partikularno rešenje date jednačine nalazi pomoću metode neodređenih koeficijenata. **(1)** Ako je $f(x)=P(x)e^x$, gde je $P(x)$ polinom, tada jednačina (☺) ima partikularno rešenje oblika: $y_p=x^nQ(x)e^{mx}$, gde je $Q(x)$ polinom istog stepena kao i $P(x)$ i uz to, ako m nije koren karakteristične jednačine $k^2+a_1k+a_2=0$, tada je $n=0$, a ako je m koren karakteristične jednačine, tada n označava višestrukost tog korena (tj. $n\in\{1,2\}$). Kad se pomenuto rešenje unese u jednačinu (☺) koeficijenti polinoma $Q(x)$ se određuju po principu neodređenih koeficijenata. **(2)** Ako je u jednačini (☺) $f(x)=a\cos\beta x+b\sin\beta x$. Ako brojevi $\pm i\beta$ nisu koreni odgovarajuće karakteristične jednačine tada jednačina (☺) ima partikularno rešenje oblika: $y_p=A\cos\beta x+B\sin\beta x$, a ako su brojevi $\pm i\beta$ koreni karakteristične jednačine, tada partikularno rešenje jednačine ima oblik $y_p=x(A\cos\beta x+B\sin\beta x)$. **(3)** Neka je u jednačini (☺) $f(x)=e^{\alpha x}[P(x)\cos\beta x+Q(x)\sin\beta x]$ gde su $P(x)$ i $Q(x)$ polinomi. Ako $\alpha\pm i\beta$ nisu koreni karakteristične jednačine, tada partikularno rešenje ima oblik $y_p=e^{\alpha x}[R(x)\cos\beta x+S(x)\sin\beta x]$, a ako su brojevi $\alpha\pm i\beta$ koreni odgovarajuće karakteristične jednačine, tada partikularno rešenje treba tražiti u obliku: $y_p=xe^{\alpha x}[R(x)\cos\beta x+S(x)\sin\beta x]$.

16. **<u>METODA VARIJACIJE KONSTANTI ZA REŠAVANJE NEHOMOGENE LINEARNE DIFERENCIJALNE JEDNAČINE DRUGOG REDA SA KONSTANTIM KOEFICIJENTIMA.</u>** Ova metoda omogućuje nalaženje partikularnog rešenja nehomogene linearne diferencijalne jednačine $y''=p(x)y'+q(x)y=f(x)$, pri tom je potrebno znati opšte rešenje odgovarajuće homogene jednačine. Pretpostavimo da smo za $y''+p(x)y'+q(x)y=0$ našli opšte rešenje $y_h=C_1y_1+C_2y_2$. Partikularno rešenje tražićemo u obliku: $y_p=C_1(x)y_1+C_2(x)y_2$ (*) (variraćemo konstante), gde su $C_1(x)$ i $C_2(x)$ nepoznate funkcije koje treba odrediti iz uslova da $y_p(x)$ identički zadovoljava datu nehomogenu jednačinu, a y_1 i y_2 poznata linearno nezavisna partikularna rešenja homogene jednačine sa početka. Diferenciranjem (*) dobijamo:
$y'_p=C'_1(x)y_1+C_1(x)y'_1+C'_2(x)y_2+C_2(x)y'_2$. Ako su $C_1(x)$ i $C_2(x)$ tako odabrane f-je da izraz y'_p ima isti oblik kao i kad zavisi od običnih konstanata C_1 i C_2. tj. ako je: $C'_1(x)y_1+C'_2(x)y_2=0$, tada se dobija:

$$\begin{cases} y'_p=C_1(x)y'_1+C_2(x)y'_2 \\ y''_p=C_1(x)y''_1+C_2(x)y''_2+C'_1(x)y'_1+C'_2(x)y'_2 \end{cases},$$

pomnožimo li y_p sa q(x), a y'_p sa p(x), dobićemo:

$$C_1(x)[y''_1+py'_1+qy_1]+C_2(x)[y''_2+py'_2+qy_2]$$
$$+C'_1(x)y'_1+C'_2(x)y'_2=f(x)$$

gde su izrazi u zagradama jednaki nuli jer su y_1 i y_2 homogene jednačine. Da bi f-ja $y_p=C'_1(x)y'_1+C'_2(x)y'_2=f(x)$ predstavljala partikularno rešenje nehomogene diferencijalne jednačine mora biti zadovoljen i uslov: $C'_1(x)y'_1+C'_2(x)y'_2=f(x)$. Ovaj i uslov

$$\begin{cases} C'_1(x)y_1+C'_2(x)y_2=0, \\ C'_1(x)y'_1+C'_2(x)y'_2=f(x) \end{cases} \quad (**)$$

čija je determinanta, kao što smo i dokazali, $W(x)=\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y'_1 & y'_2 \end{vmatrix}$. To znači da prvo možemo iz prethodnog sistema naći $C'_1(x)$ i $C'_2(x)$: $C'_1(x)=\frac{1}{W(x)}(-y_2\cdot f(x))$, $C'_2(x)=\frac{1}{W(x)}y_1\cdot f(x)$, a zatim integracijom i f-je $C_1(x)$ i $C_2(x)$.

17. **<u>HOMOGENE LINARNE DIFERENCIJALNE JEDNAČINE VIŠEG REDA. FUNDAMENTALNI SISTEM REŠENJA. DETERMINANTA VRONSKOG.</u>** Nehomogena linearna diferencijalna jednačina n-tog reda ima oblik:
$y^{(n)}+p_1y^{(n-1)}+p_2y^{(n-2)}+...+p_{n-1}y'+p_ny=f(x)$, a odgovarajuća homogena jednačina ima oblik: $y^{(n)}+p_1y^{(n-1)}+p_2y^{(n-2)}+...+p_{n-1}y'+p_ny=0$. Ako su svi $p_i=const.$ imamo nehomogenu, odnosno homogenu jednačinu sa konstantim koeficijentima. **<u>TEO:</u>** Ako je $y_1(x)$ jedno rešenje homogene jednačine tada je i $C_1y_1(x)$ ($C_1\neq 0$ proizvoljna konstanta) takođe rešenje te jednačine. **<u>TEO:</u>** Ako su $y_1(x)$, $y_2(x)$,..., $y_n(x)$ rešenja homogene jednačine tada je i svaka njihova netrivijalna linearna kombinacija $C_1y_1+C_2y_2+...+C_ny_n$ ($C_i=const.,\ i=1,2,...,n$) rešenje te jednačine. **<u>DEF:</u>** Sistem od n funkcija $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$,..., $\varphi_n(x)$ je **linearno zavisan** ako se bilo koja od tih funkcija može predstaviti kao netrivijalna linearna kombinacija ostalih, a **linearno nezavisan** ako se nijedna od tih funkcija ne može predstaviti kao netrivijalna linearna kombinacija ostalih funkcija. **<u>DEF:</u>** Sistem od n među sobom linearno nezavisnih partikularnih rešenja homogene linearne diferencijalne jednačine n-tog reda zove se **fundamentalni sistem rešenja** te jednačine. **<u>TEO:</u>** Opšte rešenje homogene jednačine n-tog reda ima oblik $y_h=C_1y_1+C_2y_2+...+C_ny_n$, gde je $y_1(x)$, $y_2(x)$,..., $y_n(x)$ fundamentalni sistem rešenja te jednačine, a $C_1,C_2,...,C_n$ su integracione konstante. **<u>TEO:</u>** Ako se zna jedno partikularno rešenje homogene jednačine n-tog reda, onda se red te jednačine može sniziti za 1. **<u>DEF:</u>** Ako su $y_1(x)$, $y_2(x)$,..., $y_n(x)$ partikularna rešenja homogene linearne diferencijalne jednačine n-tog reda, onda odgovarajuća determinanta Vronskog glasi:

$$W(x)=\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & ... & y_n \\ y'_1 & y'_2 & ... & y'_n \\ ... & ... & ... & ... \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & ... & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}.$$

<u>TEO:</u> Da bi sistem od n partikularnih rešenja $y_1(x)$, $y_2(x)$,..., $y_n(x)$ homogene jednačine n-tog reda bio linearno nezavisan (tj. fundamentalni sistem) neophodno je da i dovoljno da determinanta Vronskog bude za sve dopustive x različita od 0: $W(x)\neq 0$.

18. **<u>OPŠTE REŠENJE NEHOMOGENE LINEARNE DIFERENCIJALNE JEDNAČINE n- TOG REDA. METODA VARIJACIJE KONSTANATA.</u>** **TEO: Opšte rešenje** nehomogene jednačine n-tog reda je zbir opšteg rešenja $y_h(x)$ odgovarajuće homogene jednačine i jednog, bilo kojeg partikularnog rešenja $y_p(x)$ te homogene jednačine: $y=y_h+y_p$, tj. s obzirom na $y=C_1y_1+C_2y_2+...+C_ny_n+y_p$. Metoda varijacije konstanata: kao i u slučaju nehomogene jednačine drugog reda polazi se od pretpostavke da, ako su u opštem rešenju odgovarajuće homogene jednačine umesto integracionih konstanata $C_1,C_2,...,C_n$ funkcije $C_1(x),C_2(x),...,C_n(x)$ tada $C_1(x)y_1+C_2(x)y_2+...+C_n(x)y_n$ može, pod određenim uslovima zadovoljavati polaznu nehomogenu jednačinu. Dakle, partikularno rešenje $y_p(x)$ te nehomogene jednačine tražimo u obliku $y_p=C_1(x)y_1+C_2(x)y_2+...+C_n(x)y_n$, gde f-je $C_1(x),C_2(x),...,C_n(x)$ zadovoljavaju uslove:

$$\begin{cases} C'_1y_1 & +C'_2y_2 & +...+C'_ny_n & =0 \\ C'_1y'_1 & +C'_2y'_2 & +...+C'_ny'_n & =0 \\ ... & ... & ... & ... \\ C'_1y_1^{(n-1)} & +C'_2y_2^{(n-1)} & +...+C'_ny_n^{(n-1)} & =f(x) \end{cases}$$

ovaj sistem ima determinantu $W(x)\neq 0$ za sve dopustive x, tako da odatle nalazimo $C'_1(x),C'_2(x),...,C'_n(x)$, pa zatim i $C_1(x),C_2(x),...,C_n(x)$ i traženo partikularno rešenje $y_p(x)$.

19. **<u>LINEARNA DIFERENCIJALNA JEDNAČINA n-TOG REDA S KONSTANTNIM KOEFICIJENTIMA.</u>** **(I)** Neka je data homogena linearna diferencijalna jednačina n-tog reda: $y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+a_2y^{(n-2)}+...+a_{n-1}y'+a_ny=0$ sa konstantnim koeficijentima $a_1,a_2,...,a_n$. U tom slučaju će karakteristična jednačina biti: $k^n+a_1k^{n-1}+a_2k^{n-2}+...+a_{n-1}k+a_n=0$. **<u>TEO-1:</u>** Svakom m-tostrukom realnom korenu k karakteristične jednačine odgovara m partikularnih rešenja $e^{kx},xe^{kx},...,x^{m-1}e^{kx}$. **<u>TEO-2:</u>** Svakom paru r-trostrukih konjugovano kompleksnih korena $k_1=\alpha+i\beta$, $k_2=\alpha-i\beta$ karakteristične jednačine odgovara $2r$ partikularnih rešenja oblika: $e^{\alpha x}\cos\beta x$, $xe^{\alpha x}\cos\beta x,...,x^{r-1}e^{\alpha x}\cos\beta x$, i $e^{\alpha x}\sin\beta x$, $xe^{\alpha x}\sin\beta x,...,x^{r-1}e^{\alpha x}\sin\beta x$. ■ Pri tom opšti zbir reda višestrukosti svih korena treba da bude jednak stepenu n karakteristične jednačine: $m+2r=n$. Opšte rešenje predstavlja linearnu kombinaciju navedenih partikularnih rešenja. **(II)** Ako je data nehomogena jednačina n-tog reda $y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+...+a_{n-1}y'+a_ny=f(x)$ sa konstantnim koeficijentima, tada se u nekim slučajevima može koristiti metoda neodređenih koeficijenata. Ako je desna strana jednačine oblika $f(x)=e^{\alpha x}[P(x)\cos\beta x+Q(x)\sin\beta x]$ može se pokazati da partikularno rešenje nehomogene jednačine ima oblik kao i kod nehomogene jednačine drugog reda: $y_p=x^re^{\alpha x}[R(x)\cos\beta x+S(x)\sin\beta x]$, gde je r red višestrukosti korena $\alpha+i\beta$ karakteristične jednačine, a $R(x)$ i $S(x)$ su polinomi istog stepena čije koeficijente treba odrediti.

20. **<u>PIKAROVA TEOREMA O EGZISTENCIJI I JEDINOSTI PARTIKULARNOG REŠENJA DIFERENCIJALNE JEDNAČINE PRVOG REDA.</u>** dasdasdas das asda d

21. **<u>POJAM SISTEMA DIFERENCIJALNIH JEDNAČINA. RAZNI ZAPISI SISTEMA. REŠENJE, OPŠTE REŠENJE I PROBLEM S POČETNIM USLOVOM.</u>** Neka su $x_1,...,x_n$ nepoznate f-je nezavisno promenljive t. Sistem od n jednačina koje uspostavljaju vezu između nezavisno promenljive, nepoznatih f-ja i njihovih prvih izvoda: $F_1(t,x_1,x'_1,...,x_n,x'_n)=0$, ... $F_n(t,x_1,x'_1,...,x_n,x'_n)=0$ naziva se sistem diferencijalnih jednačina prvog reda. Ako se sistem može rešiti po izvodima nepoznatih f-ja dobija se sistem diferencijalnih jednačina $x'_1=f_1(t,x_1,...,x_n)$ ... $x'_n=f(t,x_1,...,x_n)$. Za ovaj sistem kaže se da je u normalnom obliku. S obzirom da je $x'_i=\frac{dx_i}{dt}$ $i=1,...,n$ sistem se može pisati i kao produžena proporcija $\frac{dx_1}{f_1(t,x_1,...,x_n)}=...=\frac{dx_n}{f_n(t,x_1,...,x_n)}=\frac{dt}{1}$; to je tzv. simetrični oblik sistema. **<u>DEF:</u>** Funkcije $x_1=x_1(t),...,x_n=x_n(t)$ definisane i diferencijabilne na intervalu (a,b) nazivaju se rešenje sistema na (a,b) ako i samo ako identički zadovoljavaju sistem, tj. ako je $x'_1(t)=f_1(t,x_1(t),...,x_n(t))$ ... $x'_n(t)=f_n(t,x_1(t),...,x_n(t))$ za sve $a<t<b$. Svako rešenje sistema određuje tzv. integralnu krivu u (n+1)-dimenzionom prostoru. ■ Pod opštim rešenjem podrazumevamo n-parametarsku familiju f-ja: $x_1=x_1(t,C_1,...,C_n)$ ... $x_n=x_n(t,C_1,...,C_n)$ koja identički zadovoljava sistem za sve vrednosti nezavisno promenljive t i konstanti $C_1,...,C_n$ iz neke oblasti. Svako rešenje koje se dobija iz opšteg rešenja za fiksirane vrednosti konstanti $C_1,...,C_n$ naziva se **partikularno rešenje** sistema.

22. **<u>EGZISTENCIJA I JEDINOST REŠENJA PROBLEMA S POČETNIM USLOVOM ZA SISTEM DIFERENCIJALNIH JEDNAČINA.</u>** Neka je dat sistem diferencijalnih jednačina prvog reda u normalnom obliku: $x'_1 = f_1(t, x_1, ..., x_n)$ ... $x'_n = f_n(t, x_1, ..., x_n)$ (♀) i neka tačka $(t_0, x_1^0, ..., x_n^0)$ pripada oblasti definisanosti f-ja $f_1, ..., f_n$. Osnovni problem iz teorije sistema diferencijalnih jednačina može se formulisati na sledeći način: da li postoji rešenje sistema (♀) $x_1 = x_1(t)$,..., $x_n = x_n(t)$ koje zadovoljava uslov $x_1(t_0) = x_1^0$,..., $x_n(t_0) = x_n^0$ (☺). Ako postoji, da li je takvo rešenje jedinstveno ili ih ima više? Uslov (☺) se obično naziva **početni uslov**, a problem nalaženja rešenja sistema koje zadovoljava dati početni uslov naziva **Košijev problem**. **<u>TEO:</u>** (Peanova teorema) Neka su f-je $f_1, ..., f_n$ definisane i neprekidne na $(n+1)$ -dimenzionom paralelepipedu: $P = \{(t, x_1, ..., x_n) \mid |t - t_0| \le a, |x_i - x_i^0| \le b, i = 1, ..., n\}$, gde su a i b pozitivni brojevi. Neka je $M > 0$ takvo da je $|f_i(t, x_1, ..., x_n)| \le M$, $(t, x_1, ..., x_n) \in P$, $i = i, ..., n$. Neka je, najzad $h = \min\left\{a, \frac{b}{M}\right\}$. Tada sistem (♀) na intervalu $(t_0 - h, t_0 + h)$ ima bar jedno rešenje koje zadovoljava uslov (☺). <u>TEO:</u> (**Pikarova teorema**). Neka su ispunjeni uslovi Peanove teoreme i neka je, uz iste oznake, $h = \min\{a, \frac{b}{M}\}$. Pretpostavimo dalje da na paralelepipedu P postoje parcijalni izvodi $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$, $i = 1, ..., n$ $j = 1, ..., n$. Pretpostavimo, osim toga, da su navedeni izvodi ograničeni na P, tj. da postoji $K > 0$ tako da je $\left|\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right| \le K$, $(t, x_1, ..., x_n) \in P$, $i, j = 1, ..., n$. Tada sistem na intervalu $(t_0 - h, t_0 + h)$ ima jedno i samo jedno rešenje koje zadovoljava uslov (☺).

23. **<u>VEZA SISTEMA n DIFERENCIJALNIH JEDNAČINA PRVOG REDA SA DIFERENCIJALNOM JEDNAČINOM n-TOG REDA.</u>** Neka je data diferencijalna jednačina n -tog reda rešena po najvišem izvodu: $x^{(n)} = f(t, x, x', ..., x^{(n-1)})$ (♣). Uvedimo nove nepoznate funkcije na sledeći način: $x_1 = x$, $x_2 = x'$, $x_3 = x^n$,..., $x_{n-1} = x^{(n-2)}$, $x_n = x^{(n-1)}$. S obzirom na način uvođenja f-ja $x_1, ..., x_n$ imamo da je: $x'_1 = x' = x_2$, $x'_2 = x^n = x_3$,..., $x'_{n-1} = x^{(n-1)} = x_n$; $x'_n = x^{(n)} = f(t, x, x', ..., x^{(n-1)}) = f(t, x_1, x_2, ..., x_n)$. Prema tome, dobijen je sledeći sistem diferencijalnih jednačina u normalnom obliku: $x'_1 = x_2$, $x'_2 = x_3$, ... $x'_{n-1} = x_n$. Jasno je da je $x = x(t)$ rešenje jednačine (♣) ako i samo ako je $x_1 = x(t)$, $x_2 = x'(t)$,..., $x_n = x^{(n-1)}(t)$ rešenje sistema. Prema tome, rešavanje jednačine (♣) možemo zameniti rešavanjem sistema i obratno.

24. **<u>PRVI INTEGRALI SISTEMA DIFERENCIJALNIH JEDNAČINA. NEZAVISNOST PRVIH INTEGRALA, POTREBAN I DOVOLJAN USLOV.</u>** Neka je dat sistem diferencijalnih jednačina u normalnom obliku: $x'_1 = f_1(t, x_1, ..., x_n)$,..., $x'_n = f_n(t, x_1, ..., x_n)$ i neka su na oblasti D ispunjeni uslovi postojanja i jedinstvenost rešenja Košijevog problema za dati sistem. DEF: Funkcija $\varphi(t, x_1, ..., x_n)$ neprekidno diferencijabilna i različita od konstante na oblasti D naziva se integral sistema na oblasti D ako i samo ako je: $\varphi(t, x_1(t), ..., x_n(t)) = C,\ t \in I$, gde je $x_1 = x_1(t)$,..., $x_n = x_n(t)$, $t \in I$, ma koje rešenje sistema takvo da $(t, x_1(t), ..., x_n(t)) \in D, t \in I,$, a C je odgovarajuća konstanta. <u>TEO:</u> Neka je f-ja $\varphi(t, x_1, ..., x_n)$ neprekidno diferencijabilna i različita od konstante na oblasti D . Potreban i dovoljan uslov da φ predstavlja integral sistema na oblasti D je da sa $\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} f_1 + ... + \frac{\partial \varphi}{\partial x_n} f_n = 0$, $(t, x_1, ..., x_n) \in D$. DOKAZ # # # <u>DEF:</u> Jednakost $\varphi(t, x_1, ..., x_n) = C$, gde je $\varphi(t, x_1, ..., x_n)$ integral sistema, a C proizvoljna konstanta, naziva se **prvi integral** sistema. <u>DEF:</u> Prvi integrali $\varphi_1(t, x_1, ..., x_n) = C_1$,..., $\varphi_k(t, x_1, ..., x_n) = C_k$, sistema nazivaju se **nezavisnim** na oblasti D ako i samo ako ni za jedno $i = 1, ..., k$ ne postoji neprekidno diferencijabilna f-ja ϕ i oblast $D' \subseteq D$ tako da je: $\varphi_i = \phi(\varphi_1, ..., \varphi_{i-1}, \varphi_{i+1}, ..., \varphi_n)$, $(t, x_1, ..., x_n) \in D'$. U suprotnom se kaže da su dati prvi integrali **zavisni**. TEO: Neka su f-je $\varphi_1, ..., \varphi_n$ definisane i neprekidno diferencijabilne na oblasti D i neka su: $\varphi_1(t, x_1, ..., x_n) = C_1$,..., $\varphi_n(t, x_1, ..., x_n) = C_n$, prvi integrali sistema: (1) Ako je $\begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \\ \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_n} \end{vmatrix} \ne 0$, $(t, x_1, ..., x_n) \in D$, tada su prvi integrali $\varphi_1 = C_1$,..., $\varphi_n = C_n$ nezavisni na D .

(2) Ako je $\begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \\ \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_n} \end{vmatrix} = 0$, $(t, x_1, ..., x_n) \in D'$ gde je $D' \subseteq D$ proizvoljna podoblast oblasti D , tada su prvi integrali $\varphi_1 = C_1$,..., $\varphi_n = C_n$ zavisni na D .

25. **<u>NALAŽENJE OPŠTEG I KOŠIJEVOG REŠENJA SISTEMA POMOĆU PRVIH INTEGRALA.</u>** Neka je dat sistem diferencijalnih jednačina: $x'_1 = f_1(t, x_1, ..., x_n)$ ... $x'_n = f_n(t, x_1, ..., x_n)$ (*) . Ako je poznato n nezavisnih prvih integrala datog sistema, sistem se smatra u potpunosti rešenim. Zaista neka su: $\varphi_1(t, x_1, ..., x_n) = C_1$ ... $\varphi_n(t, x_1, ..., x_n) = C_n$ (**) nezavisni prvi integrali sistema i neka je D oblast na kojoj je: $\begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \\ \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_n} \end{vmatrix} \ne 0$; Tada se za svako $(t_0, x_1^0, ..., x_n^0) \in D$ problem nalaženja onog rešenja sistema koje zadovoljava uslov $x_1(t_0) = x_1^0, ..., x_n(t_0) = x_n^0$, svodi na rešavanje sistema nelinearnih algebarskih jednačina: $\varphi_1(t, x_1, ..., x_n) = \varphi_1(t_0, x_1^0, ..., x_n^0)$ ... $\varphi_n(t, x_1, ..., x_n) = \varphi_n(t, x_1^0, ..., x_n^0)$. Rešavanjem sistema (**) može se doći do opšteg rešenja sistema (*). ■ Ukoliko je poznato k nezavisnih prvih integrala sistema (*) u pojedinim slučajevima red je moguće sniziti za k , neka su $\varphi_1(t, x_1, ..., x_n) = C_1$ ... $\varphi_k(t, x_1, ..., x_n) = C_k$ (♪) nezavisni prvi integrali sistema (*). Ako se sistem nelinearnih jednačina (♪) može rešiti, npr. po $x_1, ..., x_k$ dobija se: $x_1 = \psi_1(t, x_{k+1}, ..., x_n, C_1, ..., C_k)$ ... $x_k = \psi_k(t, x_{k+1}, ..., x_n, C_1, ..., C_k)$ (♪♪). Uvrštavanjem dobijenih vrednosti u poslednjih $n-k$ jednačina sistema (*) dobija se sistem od $n-k$ jednačina sa $n-k$ nepoznatih f-ja $x'_{k+1} = f_{k+1}(t, \psi_1, ..., \psi_k, x_{k+1}, ..., x_n)$ ... $x'_n = f_n(t, \psi_1, ..., \psi_k, x_{k+1}, ..., x_n)$ (♪♪♪). Ako je $x_{k+1} = x_{k+1}(t, C_1, ..., C_n)$ ... $x_n = x_n(t, C_1, ..., C_n)$ opšte rešenje sistema (♪♪♪), uvrštavanjem u (♪♪) dobijamo $x_1, ..., x_k$ izraženo u f-ji od $t, C_1, ..., C_n$ i na taj način dolazimo do opšteg rešenja polaznog sistema.

26. **<u>SISTEMI DIFERENCIJALNIH JEDNAČINA VIŠEG REDA. SNIŽAVANJE REDA.</u>** Opšti oblik sistema diferencijalnih jednačina višeg reda je: $F_1(t, x_1, x'_1, ..., x_1^{(k_1)}, ..., x_n, x'_n, ..., x_n^{(k_n)}) = 0$ ... $F_n(t, x_1, x'_1, ..., x_1^{(k_1)}, ..., x_n, x'_n, ..., x_n^{(k_n)}) = 0$ (*). Ako se sistem (*) može rešiti po najvišim izvodima, dobija se tzv. normalni oblik sistema višeg reda: $x_1^{(k_1)} = f_1(t, x_1, x'_1, ..., x_1^{(k_1-1)}, ..., x_n, x'_n, ..., x_n^{(k_n-1)})$ ... $x_n^{(k_1)} = f_n(t, x_1, x'_1, ..., x_1^{(k_1-1)}, ..., x_n, x'_n, ..., x_n^{(k_n-1)})$ (**). Sistem (**) se uvek može svesti na sistem od $k_1 + ... + k_n$ jednačina prvog reda. Uvedimo smene:

$$\begin{matrix} x_{1,1} = x_1 & \cdots & x_{1,n} = x_n \\ x_{2,1} = x'_1 & & x_{2,n} = x'_n \\ \vdots & & \vdots \\ x_{k_1-1,1} = x_1^{(k_1-2)} & & x_{k_n-1,n} = x_n^{(k_n-2)} \\ x_{k_1,1} = x_1^{(k_1-1)} & & x_{k_n,n} = x_n^{(k_n-1)} \end{matrix}$$

, iz uvedenih smena sledi

$$\begin{matrix} x'_{1,1} & \cdots & x'_{1,n} = x_{2,n} \\ \vdots & & \vdots \\ x'_{k_1-1,1} = x_{k_1,1} & & x'_{k_n-1,n} = x_{k_n,n} \end{matrix}$$

što predstavlja $(k_1 - 1) + ... + (k_n - 1) = k_1 + ... + k_n - n$ diferencijalnih jednačina. Osim toga, na osnovu uvedenih smena i sistema (**) dobijamo još n diferencijalnih jednačina $x'_{k_1,1} = f_1(t, x_{1,1}, x_{2,1}, ..., x_{k_1,1}, ..., x_{1,n}, x_{2,n}, ..., x_{k_n,n})$ ... $x'_{k_n,1} = f_n(t, x_{1,1}, x_{2,1}, ..., x_{k_1,1}, ..., x_{1,n}, x_{2,n}, ..., x_{k_n,n})$. Sada je dat sistem od $k_1 + ... + k_n$ diferencijalnih jednačina prvog reda sa $k_1 + ... + k_n$ nepoznatih f-ja.

27. **<u>SISTEMI LINEARNIH DIFERENCIJALNIH JEDNAČINA. EGZISTENCIJA I JEDINSTVENOST REŠENJA.</u>** Sistem linearnih diferencijalnih jednačina prvog reda je sistem oblika $x'_1 = a_{11}(t)x_1 + ... + a_{1n}(t)x_n + b_1(t)$ ... $x'_n = a_{n1}(t)x_1 + ... + a_{nn}(t)x_n + b_n(t)$ (*). Ako bar jedna od f-ja $b_1(t), ..., b_n(t)$ nije identički jednaka nuli, sistem (*) se naziva **nehomogeni** sistem. U suprotnom sistem (*) se svodi na: $x'_1 = a_{11}(t)x_1 + ... + a_{1n}(t)x_n$ ... $x'_n = a_{n1}(t)x_1 + ... + a_{nn}(t)x_n$ i naziva se **homogeni** sistem. Košijev problem za ove sisteme se sastoji u nalaženju rešenja $x_1 = x_1(t)$,..., $x_n = x_n(t)$ koje zadovoljava uslov $x_1(t_0) = x_1^0, ..., x_n(t_0) = x_n^0$, gde su $t_0, x_1^0, ..., x_n^0$ dati brojevi. **<u>TEO:</u>** Neka su f-je $a_{ij}(t)$, $b_i(t)$, $i = 1, ..., n$, $j = 1, ..., n$ neprekidne na (a, b) , neka $t_0 \in (a, b)$ i neka su $x_1^0, ..., x_n^0$ proizvoljni realni brojevi. Tada sistem (*) ima jedno i samo jedno rešenje $x_1(t_0) = x_1^0$,..., $x_n(t_0) = x_n^0$ i ono je definisano na čitavom intervalu (a, b) .

28. **<u>HOMOGENI SISTEMI DIFERENCIJALNIH JEDNAČINA. OSNOVNA SVOJSTVA. OPŠTE REŠENJE HOMOGENOG SISTEMA.</u>** Osobine homogenog sistema diferencijalnih jednačina: $\frac{dX}{dt} = A(t)X$ (○), gde je $A(t)$ matrica reda $n \times n$ čiji su elementi neprekidne f-je. **<u>TEO:</u>** Neka je dat homogeni sistem (○) i neka su elementi matrice $A(t)$ neprekidne f-je na intervalu (a,b). Ako je $X(t)$ rešenje sistema (○) i ako je za neko $t_0 \in (a,b)$ $X(t_0) = 0$ tada je $X(t) = 0$, $a < t < b$. **<u>DOKAZ</u>** Neposredno se može dokazati da je konstantni vektor 0 takođe rešenje sistema (○). Kako rešenja $X(t)$ i 0 imaju istu vrednost u tački t_0 i kako su na intervalu (a,b) ispunjeni uslovi za jedinstvenost rešenja to se $X(t)$ i 0 moraju poklapati na čitavom intervalu (a,b) tj. $X(t) = 0$, $a < t < b$. **<u>TEO:</u>** Neka je dat homogeni sistem (○) ako su $X_1(t) = \begin{bmatrix} x_{11}(t) \\ \vdots \\ x_{n1}(t) \end{bmatrix}$,..., $X_m(t) = \begin{bmatrix} x_{1m}(t) \\ \vdots \\ x_{nm}(t) \end{bmatrix}$ rešenja sistema (○) na (a,b) i $C_1,...,C_m$ su proizvoljne konstante, tada je i

$$X(t) = C_1X_1(t) + ... + C_mX_m(t) = \begin{bmatrix} C_1x_{11}(t) + ... + C_mx_{1m}(t) \\ \vdots \\ C_1x_{n1}(t) + ... + C_mx_{nm}(t) \end{bmatrix}$$

rešenje sistema na (a,b). **<u>DOKAZ</u>** Kako su $X_1(t),...,X_m(t)$ rešenja sistema (○) imamo da je:

$$\frac{dX(t)}{dt} = C_1\frac{dX_1(t)}{dt} + ... + C_m\frac{dX_m(t)}{dt}$$
$$= C_1A(t)X_1(t) + ... + C_mA(t)X_m(t)$$
$$= A(t)(C_1X_1(t) + ... + C_mX_m(t)) = A(t)X(t), \quad a < t < b,$$

pa je i $X(t)$ rešenje datog sistema. ♦ **<u>DEF:</u>** Za m rešenja sistema (○) $X_1(t),...,X_m(t)$ kažemo da su **linearno zavisna** na (a,b) ako i samo ako postoje konstante $C_1,...,C_m$, od kojih je bar jedna različita od nule, tako da je $C_1X_1(t) + ... + C_mX_m(t) = 0$, $a < t < b$. U suprotnom, tj. ako je iz $C_1X_1(t) + ... + C_mX_m(t) = 0$, $a < t < b$ sledi da je $C_1 = 0,...,C_m = 0$, kažemo da su rešenja $X_1(t),...,X_m(t)$ **linearno nezavisna** na (a,b). **<u>TEO:</u>** Neka su $X_1(t) = \begin{bmatrix} x_{11}(t) \\ \vdots \\ x_{n1}(t) \end{bmatrix}$,..., $X_n(t) = \begin{bmatrix} x_{1n}(t) \\ \vdots \\ x_{nn}(t) \end{bmatrix}$ rešenja sistema (○) i neka su elementi matrice $A(t)$ neprekidne f-je na (a,b). Tada je potreban i dovoljan uslov za linearnu nezavisnost rešenja $X_1(t)$,..., $X_n(t)$ dat sa $\begin{vmatrix} x_{11}(t) & \cdots & x_{1n}(t) \\ \vdots & & \\ x_{n1}(t) & \cdots & x_{nn}(t) \end{vmatrix} \neq 0$, $a < t < b$. **<u>TEO:</u>** Neka su elementi matrice $A(t)$ neprekidne f-je na (a,b) i neka su $X_1(t) = \begin{bmatrix} x_{11}(t) \\ \vdots \\ x_{n1}(t) \end{bmatrix}$,..., $X_n(t) = \begin{bmatrix} x_{1n}(t) \\ \vdots \\ x_{nn}(t) \end{bmatrix}$ linearno nezavisna rešenja sistema (○). Tada je svako rešenje sistema (○) oblika $X(t) = C_1X_1(t) + \cdots + C_nX_n(t)$, $a < t < b$, gde su $C_1,...,C_n$ odgovarajuće konstante.

29. **<u>FUNDAMENTALNE MATRICE HOMOGENOG SISTEMA DIFERENCIJALNIH JEDNAČINA. POTREBAN I DOVOLJAN USLOV. OPŠTE REŠENJE SISTEMA IZRAŽENO PREKO FUNDAMENTALNE MATRICE.</u>** **<u>DEF:</u>** Matrica $\Phi(t)$ reda $n \times n$ naziva se fundamentalna matrica sistema $\frac{dX}{dt} = A(t)X$ (○) ako i samo ako su kolone matrice $\Phi(t)$ linearno nezavisna rešenja sistema. **<u>TEO:</u>** Neka je matrica $\Phi(t)$ rešenje matrične diferencijalne jednačine $\frac{d\Phi}{dt} = A(t)\Phi$ i neka su elementi matrice $A(t)$ neprekidni na (a,b). Tada je $\Phi(t)$ fundamentalna matrica sistema ako i samo ako je: $\det\Phi(t) \neq 0$, $a < t < b$. **<u>TEO:</u>** Neka su elementi matrice $A(t)$ neprekidni na (a,b). Ako je $\Phi(t)$ fundamentalna matrica sistema (○) i P je proizvoljna konstantna nesingularna matrica reda $n \times n$, tada je i $\psi(t) = \Phi(t)P$ fundamentalna matrica sistema (○).

30. **<u>NEHOMOGENI SISTEMI. OPŠTE REŠENJE NEHOMOGENOG SISTEMA.</u>** Neka je $\frac{dX}{dt} = A(t)X + B(t)$ (▲) vektorski zapis nehomogenog sistema linearnih diferencijalnih jednačina. Sistemu (▲) pridružujemo homogeni sistem: $\frac{dX}{dt} = A(t)X$ (▲▲). **<u>TEO:</u>** Pretpostavimo da su elementi matrice $A(t)$ i vektora $B(t)$ neprekidni na (a,b). Neka su $X_1(t),...,X_n(t)$ linearno nezavisna rešenja homogenog sistema (▲▲) i neka je $Y(t)$ jedno partikularno rešenje nehomogenog sistema (▲). Tada je svako rešenje sistema (▲) oblika: $X(t) = C_1X_1(t) + ... + C_nX_n(t) + Y(t)$, gde su $C_1,...,C_n$ odgovarajuće konstante. **<u>DOKAZ</u>** Neka je $X(t)$ proizvoljno rešenje nehomogenog sistema i neka $t_0 \in (a,b)$. Mogu se odrediti konstante $C_1,...,C_n$ tako da je: $C_1X_1(t_0) + ... + C_nX_n(t_0) + Y(t_0) = X(t_0)$. Osim toga je:

$$\frac{d}{dt}(C_1X_1(t) + ... + C_nX_n(t) + Y(t))$$
$$= C_1\frac{dX_1}{dt} + ... + C_n\frac{dX_n}{dt} + \frac{dY}{dt}$$
$$= C_1A(t)X_1(t) + ... + C_nA(t)X_n(t) + A(t)Y(t) + B(t)$$
$$= A(t)(C_1X_1(t) + ... + C_nX_n(t) + Y(t)) + B(t).$$

Dakle, $C_1X_1(t) + ... + C_nX_n(t) + Y(t)$ je rešenje sistema (▲) koje zadovoljava isti početni uslov kao rešenje $X(t)$. Na osnovu teoreme o jedinstvenosti rešenja je: $X(t) = C_1X_1(t) + ... + C_nX_n(t) + Y(t)$, $a < t < b$.

31. **<u>METODA VARIJACIJE KONSTANATA ZA NEHOMOGENI SISTEM.</u>** Opšte rešenje nehomogenog sistema može se dobiti metodom varijacije konstanata. Neka su $X_1(t) = \begin{bmatrix} x_{11}(t) \\ \vdots \\ x_{n1}(t) \end{bmatrix}$,..., $X_n(t) = \begin{bmatrix} x_{1n}(t) \\ \vdots \\ x_{nn}(t) \end{bmatrix}$ linearno nezavisna rešenja sistema $\frac{dX}{dt} = A(t)X$ (☼). Potražimo opšte rešenje. Jasno je da je $X(t)$ rešenje sistema ako i samo ako je za $a < t < b$

$$\frac{dC_1}{dt}X_1 + C_1\frac{dX_1}{dt} + ... + \frac{dC_n}{dt}X_n + C_n\frac{dX_n}{dt}$$
$$= A(t)(C_1X_1 + ... + C_nX_n) + B(t).$$

Uzimajući u obzir da su $X_1(t),...,X_n(t)$ rešenja homogenog sistema, dobijamo: $\frac{dC_1}{dt}X_1 + ... + \frac{dC_n}{dt}X_n = B(t)$, tj.

$$\begin{matrix} \frac{dC_1}{dt}x_{11} + ... + \frac{dC_n}{dt}x_{1n} = b_1(t) \\ \vdots \\ \frac{dC_1}{dt}x_{n1} + ... + \frac{dC_n}{dt}x_{nn} = b_n(t) \end{matrix}$$

. Kako su $X_1(t),...,X_n(t)$ linearno nezavisna rešenja homogenog sistema, determinanta sistema linearnih algebarskih jednačina je različita od nule, pa sistem ima jedinstveno rešenje. $\frac{dC_1}{dt} = v_1(t)$,..., $\frac{dC_n}{dt} = v_n(t)$. F-je $C_1(t),...,C_n(t)$ se sada određuju integracijom: $C_1(t) = \int v_1(t)dt + C_1$,..., $C_n(t) = \int v_n(t)dt + C_n$ pritom f-je $C_i(t)$ zavise i od konstanti C_i koje se javljaju pri integraciji. Za tako određene f-je $C_i(t)$ je jasno da je:

$$X(t) = C_1(t)X_1(t) + ... + C_n(t)X_n(t)$$
$$= \left(\int v_1(t)dt + C_1\right)X_1(t) + ... + \left(\int v_n(t)dt + C_n\right)X_n(t)$$

rešenje sistema. Kako je pritom:

$$X(t) = C_1X_1(t) + ... + C_nX_n(t)$$
$$+ X_1(t)\int v_1(t)dt + ... + X_n(t)\int v_1(t)dt$$

, imamo da je $X(t)$ zbir opšeg rešenja homogenog sistema i partikularnog rešenja nehomogenog sistema. Radi se dakle o opštem rešenju nehomogenog sistema. ■ U matričnom obliku: neka je $\Phi(t)$ fundamentalna matrica homogenog sistema (☼) i neka je C konstantan vektor. Tada je, kao što je poznato $X(t) = \Phi(t)C$ opšte rešenje homogenog sistema. Potražimo opšte rešenje nehomogenog sistema $\frac{dX}{dt} = A(t)X + B(t)$ u obliku $X(t) = \Phi(t)C(t)$. Pritom će $X(t)$ biti rešenje nehomogenog sistema ako i samo ako je $\frac{d}{dt}(\Phi(t)C(t)) = A(t)\Phi(t)C(t) + B(t)$, $a < t < b$, tj. s obzirom da za diferenciranje proizvoda matrice i vektora važi analogna formula kao u skalarnom slučaju,

$$\frac{d\Phi(t)}{dt}C(t) + \Phi(t)\frac{dC(t)}{dt} = A(t)\Phi(t)C(t) + B(t) \quad (☼☼),$$

$a < t < b$. Kako je $\Phi(t)$ fundamentalna matrica sistema (☼) biće $\frac{d\Phi(t)}{dt} = A(t)\Phi(t)$, pa je $\frac{d\Phi(t)}{dt}C(t) = A(t)\Phi(t)C(t)$, i (☼☼) svodi se na $\Phi(t)\frac{dC(t)}{dt} = B(t)$ odakle sledi $\frac{dC(t)}{dt} = \Phi^{-1}(t)B(t)$ tj. $C(t) = \int\Phi^{-1}(t)B(t)dt + C$ gde je C konstantni vektor. Opšte rešenje je tako $X(t) = \Phi(t)\int\Phi^{-1}(t)B(t)dt + \Phi(t)C$.

32. **<u>REŠAVANJE HOMOGENOG SISTEMA SA KONSTANTNIM KOEFICIJENTIMA. KARAKTERISTIČNA JEDNAČINA I KARAKTERISTIČNE VREDNOSTI SISTEMA. JEDNOSTRUKI REALNI KORENI.</u>** Razmatramo rešavanje sistema linearnih diferencijalnih jednačina sa konstantnim koeficijentima $x'_1 = a_{11}x_1 + ... + a_{1n}x_n + b_1(t)$ ... $x'_n = a_{n1}x_1 + ... + a_{nn}x_n + b_n(t)$ (*), gde su a_{ij}, $i, j = 1,...,n$ konstante, a $b_i(t)$, $i = 1,...,n$ f-je neprekidne na intervalu (a,b) . Rešavanje nehomogenog sistema svodi se na rešavanje odgovarajućeg homogenog sistema: $x'_1 = a_{11}x_1 + ... + a_{1n}x_n$ ... $x'_n = a_{n1}x_1 + ... + a_{nn}x_n$ (**). Da bi smo odredili opšte rešenje sistema (**) dovoljno je naći n linearno nezavisnih rešenja ovog sistema. Potražimo ta rešenja u obliku: $x_1 = A_1e^{\lambda t}$,..., $x_n = A_ne^{\lambda t}$, gde su $A_1,..., A_n$ i λ konstante. Tada je: $x'_1 = \lambda A_1e^{\lambda t},..., x'_n = \lambda A_ne^{\lambda t}$. Smenom u (**) dobijamo:

$$\begin{aligned} &\lambda A_1e^{\lambda t} = e^{\lambda t}(a_{11}A_1 + \cdots + a_{1n}A_n) \\ &\vdots \\ &\lambda A_ne^{\lambda t} = e^{\lambda t}(a_{n1}A_1 + \cdots + A_{nn}A_n) \end{aligned}$$

odakle, posle skraćivanja sa $e^{\lambda t}$ dobijamo homogeni sistem linearnih algebarskih jednačina po $A_1,..., A_n$:

$$\begin{aligned} &(a_{11} - \lambda)A_1 + \cdots + a_{1n}A_n = 0 \\ &\vdots \\ &a_{n1}A_1 + \cdots + (a_{nn} - \lambda)A_n = 0 \end{aligned}$$

(***). Interesuju nas samo netrivijalna rešenja ovog sistema. Sistem (***) ima netrivijalna rešenja ako i samo ako je njegova determinanta jednaka nuli, tj.

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

(****) . Jednačina (****) se naziva karakteristična jednačina sistema (**). Razvojem navedene determinante dobija se polinom n -tog stepena po λ , pa jednačina (****) ima n rešenja $\lambda_1,..., \lambda_n$, koja se nazivaju karakteristične vrednosti sistema (**). ■ Karakteristična jednačina se može zapisati u obliku: $\det(A - \lambda I) = 0$, gde je A matrica sistema, a I je jedinična matrica reda $n \times n$, tj.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}, \quad I = \begin{bmatrix} 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \\ 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

. Razmotrimo slučaj kada su koreni karakteristične jednačine jednostruki i realni. Tada, za svako $k = 1,..., n$ rang matrice

$$\begin{bmatrix} a_{11} - \lambda k & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} - \lambda k \end{bmatrix}$$

jednak $n - 1$. Pa se za svako $k = 1,..., n$ sistem

$$\begin{aligned} &(a_{11} - \lambda_k)A_1 + \cdots + a_{1n}A_n = 0 \\ &\vdots \\ &a_{n1}A_1 + \cdots + (a_{nn} - \lambda_k)A_n = 0 \end{aligned}$$

može dovesti u kvazitrougaoni oblik (npr. primenom Gausove metode) sa jednom slobodnom i $n - 1$ vezanih promenljivih. Obeležimo sa $A_{1k},..., A_{nk}$ jedno netrivijalno rešenje sistema. Tom rešenju odgovara rešenje $x_1 = A_{1k}e^{\lambda_k t},..., x_n = A_{nk}e^{\lambda_k t}$ sistema. Kako navedeno razmatranje važi za svako $k = 1,..., n$, na taj način dobijamo n rešenja sistema (**), koja vektorski možemo zapisati:

$$X_1 = \begin{bmatrix} A_{11} \\ \vdots \\ A_{n1} \end{bmatrix} e^{\lambda_1 t} ,..., \quad X_n = \begin{bmatrix} A_{1n} \\ \vdots \\ A_{nn} \end{bmatrix} e^{\lambda_n t}$$

. S obzirom na učinjenu pretpostavku da su $\lambda_1,..., \lambda_n$ međusobno različiti, rešenja $X_1,..., X_n$ su linearno nezavisna na intervalu $(-\infty, +\infty)$. Fundamentalna matrica sistema (**) je data sa:

$$\Phi(t) = \begin{bmatrix} A_{11}e^{\lambda_1 t} & \cdots & A_{1n}e^{\lambda_n t} \\ \vdots & & \\ A_{n1}e^{\lambda_1 t} & \cdots & A_{nn}e^{\lambda_n t} \end{bmatrix}$$

, a opšte rešenje sa $X(t) = \Phi(t)C$, gde je C konstantan vektor.

33. **<u>REŠAVANJE HOMOGENOG SISTEMA SA KONSTANTNIM KOEFICIJENTIMA. KARAKTERISTIČNA JEDNAČINA I KARAKTERISTIČNE VREDNOSTI SISTEMA. JEDNOSTRUKI KOMPLEKSNI KORENI.</u>** U slučaju kada je λ_k kompleksni koren karakteristične jednačine višestrukosti r , slično kao i u slučaju višestrukog realnog korena odgovara mu rešenje oblika: $x_1 = P_1(t)e^{\lambda_k t}$,..., $x_n = P_n(t)e^{\lambda_k t}$, gde su $P_1(t)$,..., $P_n(t)$ polinomi stepena $r - 1$. Koeficijenti ovih polinoma takođe se određuju uvrštavanjem u sistem $x'_1 = a_{11}x_1 + ... + a_{1n}x_n$ ... $x'_n = a_{n1}x_1 + ... + a_{nn}x_n$ (*). Sada se dobija sistem linearnih jednačina sa kompleksnim koeficijentima, koji se, slično kao i u slučaju višestrukih realnih korena, može svesti na oblik sa r slobodnih i $r(n-1)$ vezanih promenljivih. Razdvajanjem realnih i imaginarnih delova ovih rešenja dobija se $2r$ realnih rešenja sistema, za koja se može pokazati da su linearno nezavisna; r -tostrukom konjugovano-kompleksnom paru korena karakteristične jednačine odgovara $2r$ linearno nezavisnih rešenja sistema (*).

34. **<u>REŠAVANJE HOMOGENOG SISTEMA SA KONSTANTNIM KOEFICIJENTIMA. KARAKTERISTIČNA JEDNAČINA I KARAKTERISTIČNE VREDNOSTI SISTEMA. REALNI VIŠESTRUKI KORENI.</u>** Razmotrimo sada nehomogeni sistem sa konstantnim koeficijentima $x'_1 = a_{11}x_1 + ... + a_{1n}x_n + b_1(t)$ ... $x'_n = a_{n1}x_1 + ... + a_{nn}x_n + b_n(t)$ (*). Ukoliko je $X = C_1X_1(t) + \cdots + C_nX_n(t)$ opšte rešenje pridruženog homogenog sistema $x'_1 = a_{11}x_1 + ... + a_{1n}x_n$ ... $x'_n = a_{n1}x_1 + ... + a_{nn}x_n$ (**) opšte rešenje je oblika: $X = C_1X_1(t) + \cdots + C_nX_n(t) + Y(t)$, gde je $Y(t)$ jedno partikularno rešenje sistema (**). S obzirom da se radi o sistemu sa konstantim koeficijentima u nekim slučajevima se do partikularnog rešenja $Y(t)$ može doći i metodom neodređenih koeficijenata. Neka je: $b_1(t) = e^{\alpha t}(P_1(t)\cos\beta t + Q_1(t)\sin\beta t)$ ... $b_n(t) = e^{\alpha t}(P_n(t)\cos\beta t + Q_n(t)\sin\beta t)$ gde su $P_1(t)$,..., $P_n(t)$, $Q_1(t)$,..., $Q_n(t)$ polinomi stepena $p_1,..., p_n$, $q_1,..., q_n$, respektivno. Neka je $r = \max\{p_1,..., p_n, q_1,..., q_n\}$. Partikularno rešenje se traži u obliku $y_1(t) = e^{\alpha t}(R_1(t)\cos\beta t + Q_1(t)\sin\beta t)$ ... $y_n(t) = e^{\alpha t}(R_n(t)\cos\beta t + Q_n(t)\sin\beta t)$, gde su $R_1(t),..., R_n(t)$, $Q_1(t),..., Q_n(t)$ polinomi stepena $r + s$ sa neodređenim koeficijentima, a s je ili nula (ako $\alpha \pm i\beta$ nije koren karakteristične jednačine) ili je jednako višestrukosti korena $\alpha \pm i\beta$ (ako $\alpha \pm i\beta$ jeste koren karakteristične jednačine). Neodređeni koeficijenti se određuju iz uslova da $Y(t)$ predstavlja rešenje sistema (*). Metoda neodređenih koeficijenata se može primeniti i u slučaju kada su f-je $b_1(t),..., b_n(t)$ zbirovi f-ja navedenog oblika.

35. **<u>ODREĐIVANJE FUNDAMENTALNE MATRICE POMOĆU MATRIČNOG EKSPONENTA.</u>** Neka je dat linearni homogeni sistem sa konstantnim koeficijentima $\frac{dX}{dt} = AX$ (♀). Pokažimo da je: $\Phi(t) = e^{At}$ fundamentalna matrica sistema. Zaista kako je po definiciji matričnog eksponenta $\frac{d}{dt}e^{At} = Ae^{At}$ to matrica $\Phi(t) = e^{At}$ zadovoljava matričnu diferencijalnu jednačinu $\frac{d\Phi}{dt} = A\Phi$. Kako je osim toga $\det e^{At} \neq 0$, $\Phi(t) = e^{At}$ fundamentalna matrica sistema (♀). Opšte rešenje sistema (♀) dato je prema tome sa: $X(t) = e^{At}C$, gde je C konstantan vektor. Rešenje Košijevog problema $\frac{dX}{dt} = AX$, $X(t_0) = X_0$ može se takođe napisati pomoću matričnog eksponenta. Kako je $\Phi(t) = e^{At}$ fundamentalna matrica, traženo rešenje je $X(t) = e^{At}(e^{At_0})^{-1}X_0$. Kako je $(e^{At_0})^{-1} = e^{-At_0}$ i $e^{At_0}e^{-At_0} = e^{A(t-t_0)}$, rešenje Košijevog problema dato je sa: $X(t) = e^{A(t-t_0)}X_0$.

36. **<u>STABILNOST REŠENJA SISTEMA LINEARNIH JEDNAČINA S KONSTANTNIM KOEFICIJENTIMA.</u>** **<u>DEF:</u>** Neka je $x_1 = x_1(t, t_0, x_1^0,..., x_n^0)$,..., $x_n = x_n(t, t_0, x_1^0,..., x_n^0)$ ono rešenje sistema $x'_1 = a_{11}x_1 + ... + a_{1n}x_n + b_1(t)$ ... $x'_n = a_{n1}x_1 + ... + a_{nn}x_n + b_n(t)$ (*) koje zadovoljava početni uslov $x_1(t_0, t_0, x_1^0,..., x_n^0) = x_1^0$,..., $x_n(t_0, t_0, x_1^0,..., x_n^0) = x_n^0$. Dato rešenje je **stabilno u smislu Ljapunova** ako i samo ako svakom $\varepsilon > 0$ odgovara $\partial > 0$ tako da iz $\left|x_i^0 - \overline{x}_i^0\right| < \partial$, $i = 1,..., n$ sledi $\left|x_i(t, t_0, x_1^0,..., x_n^0) - \overline{x_i}(t, t_0, \overline{x_1^0},..., \overline{x_n^0})\right| < \varepsilon$, $i = 1,..., n$ za sve $t_0 \leq t \leq \infty$, gde je $\overline{x_1} = \overline{x_1}(t_0, t_0, \overline{x_1^0},..., \overline{x_n^0})$,..., $x_n = \overline{x_n}(t_0, t_0, \overline{x_1^0},..., \overline{x_n^0}) = \overline{x_n^0}$ ono rešenje sistema (*) koje zadovoljava početni uslov $\overline{x_1} = (t_0, t_0, \overline{x_1^0},..., \overline{x_n^0}) = \overline{x_1^0}$,..., $\overline{x_n}(t_0, t_0, \overline{x_1^0},..., \overline{x_n^0}) = \overline{x_n^0}$. ■ Neka je dat homogeni sistem: $x'_1 = a_{11}x_1 + ... + a_{1n}x_n$ ... $x'_n = a_{n1}x_1 + ... + a_{nn}x_n$ (♫) **<u>DEF:</u>** Trivijalno rešenje sistema (♫) je stabilno u smislu Ljapunova ako i samo ako svakom $\varepsilon > 0$ odgovara $\delta > 0$ tako da iz $\left|\overline{x_i^0}\right| < \delta$, $i = 1,..., n$ sledi $\left|\overline{x_i}(t, t_0, \overline{x_1^0},..., \overline{x_n^0}) = \overline{x_n^0}\right| < \varepsilon$, $i = 1,..., n$, $t_0 \leq t < \infty$, gde je t_0 dato, a $x_i = \overline{x_i}(t, t_0, \overline{x_1^0},..., \overline{x_n^0})$, $i = 1,..., n$ je ono rešenje sistema (♫) koje zadovoljava početni uslov $\overline{x_n}(t_0, t_0, \overline{x_1^0},..., \overline{x_n^0}) = \overline{x_i^0}$, $i = 1,..., n$. **<u>DEF:</u>** Trivijalno rešenje sistema (♫) je asimptotski stabilno ako i samo ako je stabilno i, osim toga, postoji $\partial_0 > 0$ tako da iz $\left|\overline{x_i^0}\right| < \partial_0$, $i = 1,..., n$ sledi $\lim_{t\to\infty}\overline{x_i}(t, t_0, \overline{x_1^0},..., \overline{x_n^0}) = 0$, $i = 1,..., n$. **<u>TEO:</u>** Trivijalno rešenje sistema (♫) je asimptotski stabilno ako i samo ako svi koreni karakteristične jednačine:

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

(▲) imaju negativne realne delove. **<u>TEO:</u>** (Hurvicov kriterijum) Svi koreni jednačine $\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \cdots + a_{n-1}\lambda + a_n = 0$ imaju negativne realne delove ako i samo ako je $\Delta_1 > 0,..., \Delta_n > 0$. **<u>TEO:</u>** Ako bar jedan koren jednačine (▲) ima pozitivan realni deo onda trivijalno rešenje sistema nije stabilno u smislu Ljapunova.

37. **LINEARNE HOMOGENE PARCIJALNE JEDNAČINE. OSNOVNE TEOREME. OPŠTE REŠENJE.** Neka je data jednačina $P_1(x_1,...,x_n)\frac{\partial u}{\partial x_1}+\cdots+P_n(x_1,...,x_n)\frac{\partial u}{\partial x_n}=0$ (*), i pretpostavimo da su f-je $P_1,...,P_n$ definisane i neprekidno diferencijabilne na n -dimenzionoj oblasti D, a pritom je $P_n(x_1,...,x_n)\neq 0$ za $(x_1,...,x_n)\in D$. Rešenje (*) je $u\equiv C$, gde je C proizvoljna konstanta. Da bi smo došli do drugih netrivijalnij rešenja jednačini pridružujemo sistem: $\frac{dx_1}{P_1(x_1,...,x_n)}=\cdots=\frac{dx_n}{P_n(x_1,...,x_n)}$ (**). **TEO:** F-ja $\varphi(x_1,...,x_n)$ neprekidno diferencijabilna i različita od konstante na oblasti D je rešenje jednačine (*) ako i samo ako je $\varphi(x_1,...,x_n)=C$ prvi integral sistema (**). **DOKAZ** Kako je $P_n(x_1,...,x_n)\neq 0$, $(x_1,...,x_n)\in D$, sistem (**) se može napisati u obliku: $\frac{dx_i}{dx_n}=\frac{P_i(x_1,...,x_n)}{P_n(x_1,...,x_n)}$ (***), $i=1,...,n-1$. Pretpostavimo da je $\varphi(x_1,...,x_n)=C$ prvi integral sistema (**) tj. sistema (***). Kako je onda za $(x_1,...,x_n)\in D$, $\frac{\partial\varphi}{\partial x_n}+\frac{P_1}{P_n}\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}+\cdots+\frac{P_{n-1}}{P_n}\frac{\partial\varphi}{\partial x_{n-1}}=0$, tj. $P_1\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}+\cdots+P_{n-1}\frac{\partial\varphi}{\partial x_{n-1}}+P_n\frac{\partial\varphi}{\partial x_n}=0$, što znači da f-ja $\varphi(x_1,...,x_n)$ zadovoljava jednačinu (*). Pretpostavimo sada da je f-ja $\varphi(x_1,...,x_n)$ rešenje jednačine (*), tj. da je za $(x_1,...,x_n)\in D$ $P_1\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}+\cdots+P_{n-1}\frac{\partial\varphi}{\partial x_{n-1}}+P_n\frac{\partial\varphi}{\partial x_n}=0$. Kako je $P_n(x_1,...,x_n)\neq 0$, dalje je: $\frac{P_1}{P_n}\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}+\cdots+\frac{P_{n-1}}{P_n}\frac{\partial\varphi}{\partial x_{n-1}}+\frac{\partial\varphi}{\partial x_n}=0$, $(x_1,...,x_n)\in D$, odakle zaključujemo da je $\varphi(x_1,...,x_n)=C$ prvi integral sistema (**).

TEO: Neka su $\varphi_1=C_1$,..., $\varphi_k=C_k$ prvi integrali sistema (**) i neka je F proizvoljna neprekidno diferencijabilna f-ja k promenljivih. Tada je f-ja $u=F(\varphi_1,...,\varphi_k)$ rešenje jednačine (*). **DOKAZ** Na osnovu pravila diferenciranja složenih f-ja je:

$$\frac{\partial u}{\partial x_1}=\frac{\partial F}{\partial\varphi_1}\frac{\partial\varphi_1}{\partial x_1}+\cdots+\frac{\partial F}{\partial\varphi_k}\frac{\partial\varphi_k}{\partial x_1}$$

… stoga je

$$\frac{\partial u}{\partial x_n}=\frac{\partial F}{\partial\varphi_1}\frac{\partial\varphi_1}{\partial x_n}+\cdots+\frac{\partial F}{\partial\varphi_k}\frac{\partial\varphi_k}{\partial x_n}$$

$$P_1\frac{\partial u}{\partial x_1}+\cdots+P_n\frac{\partial u}{\partial x_n}=P_1\left(\frac{\partial F}{\partial\varphi_1}\frac{\partial\varphi_1}{\partial x_1}+\cdots+\frac{\partial F}{\partial\varphi_k}\frac{\partial\varphi_k}{\partial x_1}\right)+\cdots$$

$$+P_n\left(\frac{\partial F}{\partial\varphi_1}\frac{\partial\varphi_1}{\partial x_n}+\cdots+\frac{\partial F}{\partial\varphi_k}\frac{\partial\varphi_k}{\partial x_n}\right)= \qquad (****)$$

$$\frac{\partial F}{\partial\varphi_1}\left(P_1\frac{\partial\varphi_1}{\partial x_1}+\cdots+P_n\frac{\partial\varphi_k}{\partial x_n}\right)+$$

$$\cdots+\frac{\partial F}{\partial\varphi_k}\left(P_1\frac{\partial\varphi_k}{\partial x_1}+\cdots+P_n\frac{\partial\varphi_k}{\partial x_n}\right).$$

Kako su $\varphi_1=C_1,...,\varphi_k=C_k$ prvi integrali sistema (**) tada je $P_1\frac{\partial\varphi_1}{\partial x_1}+\cdots+P_n\frac{\partial\varphi_1}{\partial x_n}=0$, $i=1,...,k$, pa iz (****) sledi da je $P_1\frac{\partial u}{\partial x_1}+\cdots+P_n\frac{\partial u}{\partial x_n}=0$ tj. da f-ja $u=F(\varphi_1,...,\varphi_k)$ zadovoljava jednačinu (*). ♦ Familija f-ja $u=F(\varphi_1,...,\varphi_k)$ naziva se opštim rešenjem linearne homogene jednačine (*).

38. **PROBLEM S POČETNIM USLOVOM ZA LINEARNU HOMOGENU JEDNAČINU.** Neka je data linearna homogena parcijalna jednačina: $P_1(x_1,...,x_n)\frac{\partial u}{\partial x_1}+\cdots+P_n(x_1,...,x_n)\frac{\partial u}{\partial x_n}=0$ (♥), neka su f-je $P_1,...,P_n$ neprekidno diferencijabilne na oblasti D i neka je, npr. $P_n(x_1,...,x_n)\neq 0$ za $(x_1,...,x_n)\in D$. Pretpostavimo da $(x_1^0,...,x_n^0)\in D$. Košijev problem ili problem sa početnim uslovom za jednačinu (♥) je sledeći: naći ono rešenje jednačine (♥) koje za $x_n=x_n^0$ zadovoljava uslov $u(x_1,...,x_{n-1},x_n^0)=\varphi(x_1,...,x_{n-1})$ (♥♥), gde je φ data neprekidno diferencijabilna f-ja. Pritom (♥♥) važi za sve $x_1,...,x_{n-1}$ takve da $(x_1,...,x_{n-1},x_n^0)\in D$. Pokazaćemo da pod navedenim pretpostavkama o jednačini (♥) Košijev problem (♥♥) ima rešenja. S obzirom na pretpostavke sistem $\frac{dx_1}{P_1(x_1,...,x_n)}=\cdots=\frac{dx_n}{P_n(x_1,...,x_n)}$ ima $n-1$ prvih integrala definisanih i nezavisnih u okolini tačke $(x_1^0,...,x_n^0)$. Neka su: $\varphi_1(x_1,...,x_{n-1},x_n)=C_1$ ... $\varphi_{n-1}(x_1,...,x_{n-1},x_n)=C_{n-1}$ nezavisni prvi integrali. Za $x_n=x_n^0$ dobijamo sistem: $\varphi_1(x_1,...,x_{n-1},x_n^0)=C_1$ ... $\varphi_{n-1}(x_1,...,x_{n-1},x_n^0)=C_{n-1}$ (♥♥♥). Neka je: $x_1=\lambda_1(C_1,...,C_{n-1})$ ... $x_{n-1}=\lambda_{n-1}(C_1,...,C_{n-1})$ rešenje sistema (♥♥♥). Razmotrimo složenu f-ju: $u=\varphi[\lambda_1(\varphi_1(x_1,...,x_n),...,\varphi_{n-1}(x_1,...,x_n)),...,$ $\lambda_{n-1}(\varphi_1(x_1,...,x_n),...,\varphi_{n-1}(x_1,...,x_n))]$ (♥♥♥♥). (♥♥♥♥) jeste rešenje (♥), osim toga je za $x_n=x_n^0$ $u(x_1,...,x_{n-1},x_n^0)=\varphi(x_1,...,x_{n-1})$ pa je sa (♥♥♥♥) zaista dato rešenje postavljenog Košijevog problema.

39. **KVAZILINEARNE PARCIJALNE JEDNAČINE. SVOĐENJE NA HOMOGENU JEDNAČINU.** **TEO:** Neka je f-ja $v=v(x_1,...,x_n,u)$ neprekidno diferencijabilna na oblasti D i neka je na D $\frac{\partial v}{\partial u}\neq 0$. F-ja $v(x_1,...,x_n,u)$ je rešenje jednačine

$$P_1(x_1,...,x_n,u)\frac{\partial v}{\partial x_1}+\cdots+P_n(x_1,...,x_n,u)\frac{\partial v}{\partial x_n}$$

$$+P_{n+1}(x_1,...,x_n,u)\frac{\partial v}{\partial u}=0$$

(♂) ako i samo ako je f-ja $u(x_1,...,x_n)$, implicitno zadata sa $v(x_1,...,x_n,u)=0$ rešenje jednačine

$$P_1(x_1,...,x_n,u)\frac{\partial v}{\partial x_1}+\cdots+P_n(x_1,...,x_n,u)\frac{\partial v}{\partial x_n}=$$

$P_{n+1}(x_1,...,x_n,u)$ (♂♂). **DOKAZ** Nađimo prvo parcijane izvode implicitno zadate f-je. Ako je sa $v(x_1,...,x_n,u)=0$ (*) implicitno zadata f-ja $u(x_1,...,x_n)$, iz (*) je: $\frac{\partial v}{\partial x_i}+\frac{\partial v}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x_i}=0$, $i=1,...,n$. pa je $\frac{\partial u}{\partial x_i}=-\frac{\frac{\partial v}{\partial x_i}}{\frac{\partial v}{\partial u}}$, (**) $i=1,...,n$. Pretpostavimo da je $v=v(x_1,...,x_n,u)$ rešenje jednačine (♂) tj. da je $P_1\frac{\partial v}{\partial x_1}+\cdots+P_n\frac{\partial v}{\partial x_n}+P_{n+1}\frac{\partial v}{\partial u}\equiv 0$. Deljenjem poslednjeg identiteta sa $\left(-\frac{\partial v}{\partial u}\right)$ dobijamo ekvivalentan identitet $P_1\left(-\frac{\frac{\partial v}{\partial x_1}}{\frac{\partial v}{\partial u}}\right)++P_n\left(-\frac{\frac{\partial v}{\partial x_n}}{\frac{\partial v}{\partial u}}\right)-P_{n+1}\equiv 0$ (***) . Na osnovu (**), (***) je jednako sa $P_1\frac{\partial u}{\partial x_1}++P_n\frac{\partial u}{\partial x_n}\equiv P_{n+1}$, što znači da f-ja u zadata sa (*) zadovoljava jednačinu (♂♂). ■ Neka je $v=F(\varphi_1,...,\varphi_n)$ opšte rešenje linearne homogene jednačine (♂) gde su $\varphi_1(x_1,...,x_n,u)=C_1$,..., $\varphi_n(x_1,...,x_n,u)=C_n$ nezavisni prvi integrali pridruženog sistema $\frac{dx_1}{P_1}=\cdots=\frac{dx_n}{P_n}=\frac{du}{P_{n+1}}$. Tada je sa $F(\varphi_1(x_1,...,x_n,u),...,\varphi_n(x_1,...,x_n,u))=0$ implicitno zadato opšte rešenje kvazilinearne jednačine (♂♂).

40. **PROBLEM SA POČETNIM USLOVOM ZA KVAZILINEARNU JEDNAČINU.** Neka je data kvazilinearna jednačina

$$P_1(x_1,...,x_n,u)\frac{\partial u}{\partial x_1}+\cdots+P_n(x_1,...,x_n,u)\frac{\partial u}{\partial x_n}=$$

$P_{n+1}(x_1,...,x_n,u)$ (☼), neka su f-je $P_1,...,P_{n+1}$ neprekidno diferencijabilne na oblasti D i neka je npr. $P_n(x_1,...,x_n,u)\neq 0$, $(x_1,...,x_n)\in D$. Pretpostavimo $(x_1^0,...,x_n^0,u^0)\in D$. Košijev problem ili problem sa početnim uslovom za jednačinu (☼) je sledeći: naći ono rešenje jednačine (☼) koje za $x_n=x_n^0$ zadovoljava uslov $u(x_1,...,x_{n-1},x_n^0)=\varphi(x_1,...,x_{n-1})$ (☼☼), gde je φ data neprekidno diferencijabilna f-ja, pritom (☼☼) važi za sve $x_1,...,x_{n-1}$ takve da $(x_1,...,x_{n-1},x_n^0,\varphi(x_1,...,x_{n-1}))\in D$. Pokažimo da Košijev problem ima rešenje. Sistem: $\frac{dx_1}{P_1}=\cdots=\frac{dx_n}{P_n}=\frac{du}{P_{n+1}}$ ima u okolini tačke $(x_1^0,...,x_n^0,u^0)$ n nezavisnih prvih integrala $\varphi_1(x_1,...,x_n,u)=C_1$ ... $\varphi_n(x_1,...,x_n,u)=C_n$. Za $x_n=x_n^0$ dobijamo sistem $\varphi_1(x_1,...,x_{n-1},x_n^0,u)=C_1$ ... $\varphi_n(x_1,...,x_{n-1},x_n^0,u)=C_n$ (☼☼☼) koji zbog nezavisnosti prvih integrala, ima rešenje po $x_1,...,x_{n-1},u$; neka je $x_1=\lambda(C_1,...,C_n)$ ... $x_{n-1}=\lambda(C_1,...,C_n)$, $u=\lambda_n(C_1,...,C_n)$ rešenje sistema (☼☼☼). Razmotrimo f-ju u implicitno definisanu sa $\lambda_n(\varphi_1(x_1,...,x_n,u)),...,\varphi_n(x_1,...,x_n,u))=$ $\varphi(\lambda_1(\varphi_1(x_1,...,x_n,u),...,\varphi_n(x_1,...,x_n,u))$,..., $\lambda_{n-1}(\varphi_1(x_1,...,x_n,u),...,\varphi_n(x_1,...,x_n,u)))$ (☼☼☼☼) rešenje jednačine

$$P_1(x_1,...,x_n,u)\frac{\partial v}{\partial x_1}+\cdots+P_n(x_1,...,x_n,u)\frac{\partial v}{\partial x_n}=$$

$P_{n+1}(x_1,...,x_n,u)$, pod pretpostavkom da je u okolini tačke $(x_1^0,...,x_n^0,u^0)$ $\frac{\partial v}{\partial u}\neq 0$, sledi da je sa $v=0$ sa (☼☼☼☼) dato rešenje jednačine (☼). Za $x_n=x_n^0$ $u=\varphi(x_1,...,x_{n-1})$ uslov (☼☼) je zadovoljen. Zaključujemo da je sa (☼☼☼☼) dato rešenje Košijevog problema.

41. **ELEMENTARNE FUNKCIJE KOMPLEKSNE PROMENLJIVE.** Ako je zadato pravilo kojim se svakom $z\in D$ dodeljuje određeni kompleksni broj w, kažemo da je na D zadata kompleksna f-ja kompleksne promenljive i pišemo: $w=f(z)$. Proizvoljnu f-ju kompleksne promenljive možemo dakle zadati na sledeći način: $w=u(x,y)+iv(x,y)$. ■ Elementarne f-je kompleksne promenljive: (1) **Polinom stepena** n $w=P(z)$ se definiše sa $P(z)=a_0z^n+a_1z^{n-1}+\cdots+a_{n-1}z+a_n$, gde su $a_0\neq 0$, $a_1,...,a_n$ kompleksne promenljive, $n\in$. (2) **Racionalna** f-ja $w=R(z)$ definiše se sa $R(z)=\frac{P(z)}{Q(z)}$, gde su $P(z)$ i $Q(z)$ polinomi stepena n i m. (3) **Eksponencijalna** f-ja $w=e^z$ definiše se sa $e^z=e^{x+iy}=e^x(\cos y+i\sin y)$. (4) **Trigonometrijske** f-je $w=\sin z$ i $w=\cos z$ definišu se sa $\sin z=\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}$, $\cos z=\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}$. (5) Inverzna f-ja f-je $z=w^n$ označava se sa $\sqrt[n]{z}$ i naziva se n -ti **koren**. Imajući u vidu da je $\rho=|z|,\varphi=\arg|z|$ je: $w=\sqrt[n]{z}=\sqrt[n]{|z|}\left(\cos\left(\frac{\arg z+2k\pi}{n}\right)+i\sin\left(\frac{\arg z+2k\pi}{n}\right)\right)$, $k=0,...,n-1$. (6) **Inverzna** f-ja eksponencijalne f-je $z=e^w$ naziva se logaritamska f-ja i označava $\ln z$. (7) **Opšta stepena** f-ja $w=z^a$, gde a može biti kompleksan broj, definiše se sa: $z^a=e^{a\ln z},z\neq 0$. (8) Ako je a kompleksan broj $(a\neq 0,1,e)$ opšta eksponencijalna f-ja $w=a^z$ definiše se pomoću $a^z=e^{z\ln a}$.

42. **GRANIČNE VREDNOSTI I NEPREKIDNOST FUNKCIJE KOMPLEKSNE PROMENLJIVE.** DEF: Broj w_0 je granična vrednost f-je $f(z)$ u tački z_0 ako i samo ako za svako $\varepsilon>0$ postoji $\partial(\varepsilon)>0$ tako da za svako $z\in D$ $|z-z_0|<\partial(\varepsilon)\Rightarrow|f(z)-w_0|<\varepsilon$. DEF: Broj w_0 je granična vrednost f-je $f(z)$ u tački z_0 ako i samo ako za svaki niz (z_n) tačaka iz D koji konvergira ka z_0 odgovarajući niz vrednosti f-je ($f(z_n)$) konvergira ka w_0. DEF: F-ja $f(z)$ je neprekidna u tački $z_0\in D$ ako i samo ako je $\lim_{z\to z_0}f(z)=f(z_0)$.

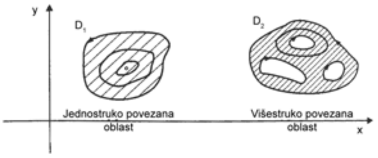
43. **IZVOD FUNKCIJE KOMPLEKSNE PROMENLJIVE. KOŠI – RIMANOVI USLOVI. POJAM ANALITIČKE FUNKCIJE.** **DEF:** F-ja $f(z)$ je diferencijabilna u tački z_0 ako i samo ako postoji konačna granična vrednost količnika $\frac{f(z_0+\Delta z)-f(z_0)}{\Delta z}$ kad $\Delta z \to 0$. **TEO:** Neka je f-ja $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ diferencijabilna u tački $z_0=x_0+iy_0$. Tada u tački (x_0,y_0) postoje prvi parcijalni izvodi f-ja $u(x,y)$ i $v(x,y)$ i pritom je:

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x_0,y_0)=\frac{\partial v}{\partial y}(x_0,y_0); \quad \frac{\partial u}{\partial y}(x_0,y_0)=-\frac{\partial v}{\partial x}(x_0,y_0);$$

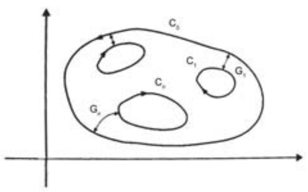
(Koši-Rimanovi uslovi). **TEO:** Ako su f-je $u(x,y)$ i $v(x,y)$ diferencijabilne u tački (x_0,y_0) i u tački (x_0,y_0) su ispunjeni Koši-Rimanovi uslovi, tada je f-ja $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ diferencijabilna u tački $z_0=x_0+iy_0$.

44. **INTEGRALI FUNKCIJE KOMPLEKSNE PROMENLJIVE. DEFINICIJA I SVOJSTVA.** **DEF:** Ako postoji granična vrednost sume S_n, kada $n\to\infty$ i $\max|\Delta z_k|\to 0$, koja je nezavisna od načina podele krive C i izbora tačaka z_k, onda se ta granična vrednost naziva integral f-je $f(z)$ duž krive C i obeležava sa $\int_C f(z)dz$ ili $\int_{AV} f(z)dz$.

45. **KOŠIJEVA TEOREMA ZA JEDNOSTRUKO I VIŠESTRUKO POVEZANU OBLAST.** Oblast D ćemo zvati jednostruko povezanom ako svaka prosta zatvorena kriva koja pripada oblasti D može biti skupljanjem deformisana u tačku bez napuštanja oblasti D. U suprotnom, oblast D ćemo zvati višestruko povezanom.



Neka se granica oblasti D sastoji od jedne ili više kontura. Rećićemo da se granica oblasti D obilazi u pozitivnom smeru ako pri tom oblast D ostaje s leva. TEO: (Košijeva teorema) Neka je jednostruko povezana oblast D ograničena konturom C i neka je f-ja $f(z)$ analitička na D i na C. Tada je $\int_{C^+} f(z)dz=0$. **TEO:** Neka je višestruko povezana oblast D ograničena spolja konturom C_0, a iznutra konturama $C_1,...,C_n$. Neka je f-ja $f(z)$ analitička na D i na $C_0,C_1,...,C_n$. Tada je: $\int_{C^+} f(z)dz=0$, gde je C granica oblasti D, koja se sastoji od konture $C_0,...,C_n$.



DOKAZ

Neka su $G_1,...,G_n$ krive koje spajaju $C_1,...,C_n$ sa konturom C_0. Može se pokazati da je oblast ograničena krivom $\overline{C}$, sastavljenom od krivih $C_0,C_1,...C_n$, $G_1,...,G_n$, pri čemu se svaka od krivih G_i obilazi dva puta jednostruko povezana. Pa je zato $\int_{\overline{C}^+} f(z)dz=0$. Kako se integrali duž krivih $G_1,...,G_n$ računaju po dva puta u međusobno suprotnim smerovima oni se potiru i imamo da je:

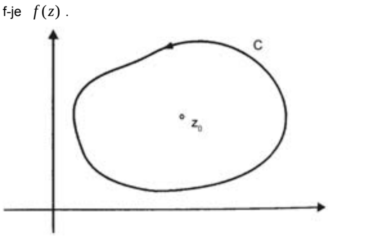
$$\int_{\overline{C}^+} f(z)dz=\int_{C_0^+} f(z)dz+\int_{C_1^-} f(z)dz+\cdots+\int_{C_n^-} f(z)dz=\int_{C^+} f(z)dz$$

♦

46. **NEODREĐENI INTEGRAL FUNKCIJE KOMPLEKSNE PROMENLJIVE I OSNOVNA SVOJSTVA.** **TEO:** Ako je $f(z)$ analitička f-ja na jednostruko povezanoj oblasti D i ako $z_0\in D$ tada je f-ja: $F(z)=\int_{z_0}^{z} f(z)dz$ analitička na D i $F'(z)=f(z)$, $z\in D$. ■ Svaku f-ju $F(z)$ sa osobinom $F'(z)=f(z)$, $z\in D$, nazivamo **primitivna f-ja** f-je $f(z)$. Može se pokazati da je skup svih primitivnih f-ja date f-je $f(z)$ dat sa $F(z)+c$, gde je $F(z)$ proizvoljna primitivna f-ja, a c kompleksna konstanta. Skup svih primitivnih f-ja date f-je $f(z)$ nazivamo **neodređeni integral** f-je $f(z)$ i označavamo sa $\int f(z)dz$.

47. **KOŠIJEVE FORMULE ZA FUNKCIJE KOMPLEKSNE PROMENLJIVE.** **TEO:** Neka je f-ja $f(z)$ analitička na jednostruko povezanoj oblasti D. Neka je $z_0\in D$ i neka je G proizvoljna kontura oko tačke z_0 koja pripada oblasti D. Tada je: $f(z_0)=\frac{1}{2\pi i}\int_{G^+}\frac{f(z)}{z-z_0}dz$. **TEO:** Neka je jednostruko povezana oblast D ograničena konturom C i neka je $f(z)$ analitička f-ja na D i na C. Tada postoje svi izvodi f-je $f(z)$ na D i za $z_0\in D$ je $f^{(n)}(z_0)=\frac{n!}{2\pi i}\int_{C^+}\frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz$, $n=1,2,...$ **TEO:** Ako je f-ja $f(z)$ neprekidna na jednostruko povezanoj oblasti D i ako je $\int_G f(z)dz=0$ za svaku konturu G sadržanu u D, tada je $f(z)$ analitička f-ja na D.

48. **REZIDUUM FUNKCIJE KOMPLEKSNE PROMENLJIVE.** Neka je $z=z_0$ izolovani singularitet f-je $f(z)$. Reziduum f-je $f(z)$ u tački z_0 definiše se formulom $\mathrm{Res}[f(z),z_0]=\frac{1}{2\pi i}\int_{C^+} f(z)dz$ gde je C proizvoljna kontura koja pripada oblasti u kojoj je f-ja $f(z)$ analitička i koja u svojoj unutrašnjosti osim z_0 nema drugih singulariteta f-je $f(z)$.



TEO: Neka je jednostruko povezana oblast D ograničena konturom C i neka je $f(z)$ analitička f-ja na D i C, osim u konačno mnogo singularnih tačaka $z_1,...,z_k$ koje pripadaju D. Tada je $\int_{C^+} f(z)dz=2\pi i\sum_{i=1}^{k}\mathrm{Res}[f(z),z_i]$. # # #DOKAZ.

49. **DEFINICIJA LAPLASOVE TRANSFORMACIJE I DOVOLJNI USLOVI ZA POSTOJANJE.** Neka je $f(t)$ f-ja realne promenljive. Laplasovom transformacijom L se datoj f-ji pridružuje f-ja kompleksne promenljive $F(s)$ po formuli: $F(s)=L[f(t)]\overset{def}{=}\int_0^\infty e^{-st}f(t)dt$. Pretpostavimo da $f(t)$ zadovoljava sledeće uslove: **(1)** $f(t)$ je definisana na intervalu $[0,\infty]$, **(2)** $f(t)$ ima najviše konačno mnogo prekida prve vrste na svakom konačnom podintervalu intervala $[0,\infty)$, **(3)** $f(t)$ je eksponencijalnog reda rasta, tj. postoji realna konstanta a i pozitivna konstanta M tako da je za sve $t>0$, $|f(t)|\le Me^{at}$. • Pod navedenim pretpostavkama Laplasova transformacija f-je $f(t)$ postoji. **TEO:** Neka f-ja $f(t)$ zadovoljava uslove (1), (2) i (3). Tada $\int_0^\infty e^{-st}f(t)dt$ (*) konvergira za sve s za koje je $\mathrm{Re}\,s>a$. **DOKAZ** Neka je $s=\alpha+i\beta$, tj. $\mathrm{Re}\,s=\alpha$, $\mathrm{Im}\,s=\beta$. Za $t>0$ je $|e^{-st}f(t)|=e^{-\alpha t}|f(t)|\le Me^{(a-\alpha)t}$ (**). Za $a-\alpha<0$ je $\int_0^\infty e^{(a-\alpha)t}dt=\lim_{T\to 0}\int_0^T e^{(a-\alpha)t}dt=\lim_{T\to 0}\frac{1}{a-\alpha}e^{(a-\alpha)t}\Big|_0^T=\frac{1}{\alpha-a}$ tj. $\int_0^\infty e^{(a-\alpha)t}dt$ konvergira. Na osnovu (**) odatle sledi konvergencija integrala (*). **TEO:** Neka f-ja $f(t)$ zadovoljava uslove (1),(2) i (3). Tada je $F(s)=\int_0^\infty e^{-st}f(t)dt$ analitička f-ja u oblasti $\mathrm{Re}\,s>a$.

50. **LAPLASOVA TRANSFORMACIJA FUNKCIJE** $f(t)=e^{bt}$. Eksponencijalna f-ja $f(t)=e^{bt}$, $b\neq 0$ realan broj. Imamo da je

$$F(s)=\int_0^\infty e^{-st}e^{bt}dt=\int_0^\infty e^{(b-s)t}dt=$$

$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{b-s}e^{(b-s)t}\Big|_0^T=\frac{1}{b-s}(\lim_{T\to\infty}e^{(b-s)T}-1)$. Neka je $\mathrm{Re}\,s=\alpha$, $\mathrm{Im}\,s=\beta$, tj. $s=\alpha+i\beta$. Kako je $e^{(b-s)T}=e^{(b-\alpha)T}e^{-i\beta T}=e^{(b-\alpha)T}(\cos\beta T-i\sin\beta T)$, imamo da je $F(s)=\frac{1}{b-s}(\lim_{T\to\infty}e^{(b-\alpha)T}\cos\beta T-i\lim_{T\to\infty}e^{(b-\alpha)T}\sin\beta T-1)$. Za $b-\alpha<0$, tj. $\mathrm{Re}\,s>b$ biće $\lim_{T\to\infty}e^{(b-\alpha)T}\cos\beta T=0$, $\lim_{T\to\infty}e^{(b-\alpha)T}\sin\beta T=0$. Pa je za $\mathrm{Re}\,s>0$ $F(s)=\frac{1}{s-b}$. Za $\mathrm{Re}\,s\le b$ navedene granične vrednosti ne postoje pa ni Laplasova transformacija f-je e^{bt} nije definisana.

51. **LAPLASOVA TRANSFORMACIJA FUNKCIJE** $f_1(t)=\sin bt,\ f_2(t)=\cos bt$. Trigonometrijske f-je $\sin bt$ i $\cos bt$, $b\neq 0$ realan broj. Kako je $\sin bt=\frac{e^{ibt}-e^{-ibt}}{2i}$ biće

$$F_1(s)=\int_0^\infty e^{-st}\sin btdt=\frac{1}{2i}\int_0^\infty(e^{(ib-s)t}-e^{(-ib-s)})dt=$$

$$\frac{1}{2i}\lim_{T\to\infty}\left(\frac{1}{ib-s}e^{(ib-s)t}-\frac{1}{-ib-s}e^{(-ib-s)t}\right)\Big|_0^T$$

$$=\frac{1}{2i}\left(\lim_{T\to\infty}\left(\frac{1}{ib-s}e^{(ib-s)T}-\frac{1}{-ib-s}e^{(-ib-s)T}\right)-\frac{1}{ib-s}+\frac{1}{-ib-s}\right)$$

Kako je $e^{(ib-s)T}=e^{-\alpha T}(\cos(b-\beta)T+i\sin(b-\beta)T)$, $e^{(ib-s)T}=e^{-\alpha T}(\cos(b+\beta)T-i\sin(b+\beta)T)$, gde je $\alpha=\mathrm{Re}\,s$, $\beta=\mathrm{Im}\,s$, imamo da je za $\mathrm{Re}\,s>0$ $\lim_{T\to\infty}e^{(ib-s)T}=0$; $\lim_{T\to\infty}e^{(-ib-s)T}=0$. Prema tome, za $\mathrm{Re}\,s>0$ dobijamo $F_1(s)=\frac{1}{2i}\left(-\frac{1}{ib-s}+\frac{1}{-ib-s}\right)=\frac{b}{s^2+b^2}$. Koristeći formulu $\cos bt=\frac{e^{ibt}+e^{-ibt}}{2}$ analogno se pokazuje da je za $\mathrm{Re}\,s>0$ $F_2(s)=\int_0^\infty e^{-st}\cos btdt=\frac{s}{s^2+b^2}$.

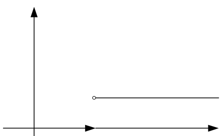
52. **LAPLASOVA TRANSFORMACIJA FUNKCIJE** $f(t)=t^n$. Stepena f-ja t^n, $n=0,1,2,...$ Neka je $I_n=\int_0^\infty e^{-st}t^n dt$. Za $n=0$ imamo da je $I_0=\int_0^\infty e^{-st}dt=\lim_{T\to\infty}\left(-\frac{1}{s}e^{-st}\right)\Big|_0^T=-\frac{1}{s}(\lim_{T\to\infty}e^{-sT}-1)$. Slično kao malopre, iz $e^{-sT}=e^{-\alpha T}(\cos\beta T-i\sin\beta T)$ gde je $\alpha=\mathrm{Re}\,s$, $\beta=\mathrm{Im}\,s$, zaključujemo da je za $\mathrm{Re}\,s>0$ $\lim_{T\to\infty}e^{-sT}=0$. Dakle, za $\mathrm{Re}\,s>0$ $I_0=\frac{1}{s}$. Za $n\ge 1$, primenjujući parcijalnu integraciju $t^n=u, e^{-st}dt=dv$, pod uslovom $\mathrm{Re}\,s>0$ dobijamo

$$I_n=\int_0^\infty e^{-st}t^n dt=-\frac{1}{s}e^{-st}t^n\Big|_0^\infty+\frac{n}{s}\int_0^\infty e^{-st}t^{n-1}dt=$$

$$\lim_{T\to\infty}\left(-\frac{1}{s}e^{-st}t^n\right)\Big|_0^T+\frac{n}{s}I_{n-1}=-\frac{1}{s}\lim e^{-sT}T^n+\frac{n}{s}I_{n-1}=\frac{n}{s}I_{n-1}$$

jer je zbog $e^{-sT}T^n=e^{-\alpha T}T^n(\cos\beta T-i\sin\beta T)$ za $\alpha=\mathrm{Re}\,s>0$ ispunjeno $\lim_{T\to\infty}e^{-sT}T^n=0$. Iz date rekurentne veze je $I_n=\frac{n(n-1)\cdots 1}{s^n}I_0=\frac{n!}{s^{n+1}}$. Dakle, za $\mathrm{Re}\,s>0$ i $n=0,1,2,...$ je $F(s)=\int_0^\infty e^{-st}t^n dt=\frac{n!}{s^{n+1}}$.

53. **DEFINICIJA JEDINIČNE ODSKOČNE FUNKCIJE $f(t)=u(t-b)$. LAPLASOVA TRANSFORMACIJA FUNKCIJE $f(t)$.** Neka je $b>0$. Jedinična odskočna f-ja definiše se sa $U(t-b)=\begin{cases}0, t<b\\ 1, t\ge b\end{cases}$.



Imamo da je

$$F(s)=\int_0^\infty e^{-st}U(t-b)dt=\int_0^b e^{-st}U(t-b)dt+$$

$$\int_b^\infty e^{-st}U(t-b)dt=\int_b^\infty e^{-st}dt=\lim_{T\to\infty}\left(-\frac{1}{s}e^{-st}\right)\Big|_0^T$$

$$=-\frac{1}{s}(\lim_{T\to\infty}e^{-sT}-e^{-sb})$$, odakle za $\mathrm{Re}\,s>0$ dobijamo

$$F(s)=\frac{1}{s}e^{-sb}.$$

54. **OSOBINA LINEARNOSTI ZA LAPLASOVU TRANSFORMACIJU. DOKAZ.** Neka $f_1(t)\in E(a_1)$, $f_2(t)\in E(a_2)$ i neka je $L[f_1(t)]=F_1(s),\mathrm{Re}\,s>a_1$, $L[f_2(t)]=F_2(s),\mathrm{Re}\,s>a_2$. Tada je $L[c_1f_1(t)+c_2f_2(t)]=c_1F_1(s)+c_2F_2(s)$, $\mathrm{Re}\,s>\max\{a_1,a_2\}$. **DOKAZ.** S obzirom na definiciju Laplasove transformacije i osobinu linearnosti određenih integrala imamo da je za $\mathrm{Re}\,s>\max\{a_1,a_2\}$

$$L[c_1f_1(t)+c_2f_2(t)]=c_1L[f_1(t)]+c_2L[f_2(t)]$$

$=c_1F_1(s)+c_2F_2(s)$. ♦ Ova osobina važi i za f-je koje nisu eksponencijalno ograničene.

55. **AKO JE** $L\{f(bt)\}=1/b\,\mathrm{F}(s/b),\mathrm{Re}\,s>ab$ **AKO JE** $L\{\mathrm{F}(t)\}=\mathrm{F}(s),\mathrm{Re}\,s>a$. Neka $f(t)\in E(a)$ i neka je $L[f(t)]=F(s)$, $\mathrm{Re}\,s>a$. Neka je $b>0$. Tada je $L[f(bt)]=\frac{1}{b}F\left(\frac{s}{b}\right),\mathrm{Re}\,s>ab$. **DOKAZ.** Koristeći smenu $bt=x$ imamo da je

$$L[f(bt)]=\int_0^\infty e^{-st}f(bt)dt=\frac{1}{b}\int_0^\infty e^{-\frac{s}{b}x}f(x)dx=\frac{1}{b}F\left(\frac{s}{b}\right),$$

$\mathrm{Re}\left(\frac{s}{b}\right)=\frac{\mathrm{Re}(s)}{b}>a$. ♦

56. **AKO JE** $L\{F(t)\}=\mathrm{F}(s),\mathrm{Re}\,s>a$ **DOKAZATI DA VAŽI** $L\{e^{bt}f(t)\}=\mathrm{F}(s-b),\mathrm{Re}\,s>a+b$. Neka $f(t)\in E(a)$ i neka je $L[f(t)]=F(s)$, $\mathrm{Re}\,s>a$. Tada je $L[e^{bt}f(t)]=F(s-b),\mathrm{Re}\,s>a+b$, gde je b proizvoljan realan broj. **DOKAZ.**

$$L[e^{bt}f(t)]=\int_0^\infty e^{-st}e^{bt}f(t)dt=\int_0^\infty e^{-(s-b)t}f(t)dt=$$

$F(s-b),\mathrm{Re}(s-b)=\mathrm{Re}\,s-b>a$. ♦

57. **NEKA JE** $L\{f(t)\}=\mathrm{F}(s),\mathrm{Re}\,s>a$. **TADA JE** $L\{f(t-b)u(t-b)\}=e^{-bs}\,\mathrm{F}(s),\mathrm{Re}\,s>a$, **GDE JE** $b>0$, **A** $t(t-b)$ **JE JEDINIČNA ODSKOČNA FUNKCIJA.** Neka $f(t)\in E(a)$ i neka je $L[f(t)]=F(s),\mathrm{Re}\,s>a$. Tada je $L[f(t-b)U(t-b)]=e^{-bs}F(s),\mathrm{Re}\,s>a$, gde je $b>0$, a $U(t-b)$ je jedinična odskočna f-ja. **DOKAZ** S obzirom na definiciju jedinične odskočne f-je je

$$L[f(t-b)U(t-b)]=\int_0^\infty e^{-st}f(t-b)U(t-b)dt$$

$$=\int_0^b e^{-st}f(t-b)U(t-b)dt+$$

$\int_b^\infty e^{-st}f(t-b)U(t-b)dt=\int_b^\infty e^{-st}f(t-b)dt$, odakle, koristeći smenu $t-b=x$, dobijamo

$$L[f(t-b)U(t-b)]=\int_0^\infty e^{-s(b+x)}f(x)dx=$$

$e^{-bs}\int_b^\infty e^{-sx}f(x)dx=e^{-bs}F(s)$, $\mathrm{Re}\,s>a$. ♦

b

58. **OSOBINA IZVODA ZA LAPLASOVU TRANSFORMACIJU.** Osobina izvoda. Neka $f(t)\in E(a)$, $f'(t)\in E(a)$ i neka je $L[f(t)]=F(s)$, $\mathrm{Re}\,s>a$, $L[f'(t)]=G(s)$, $\mathrm{Re}\,s>a$. Tada je $G(s)=sF(s)-f(0)$, $\mathrm{Re}\,s>a$, tj. $L[f'(t)]=sL[f(t)]-f(0)$, $\mathrm{Re}\,s>a.$ **DOKAZ** Koristeći parcijalnu integraciju $(f'(t)dt=du,e^{-st}=v)$ imamo da je za $\mathrm{Re}\,s>a$

$$L[f'(t)]=\int_0^\infty e^{-st}f'(t)dt=e^{-st}f(t)\Big|_0^\infty+s\int_0^\infty e^{-st}f(t)dt$$

$=\lim_{T\to\infty}e^{-st}f(t)|+sL[f(t)]=sL[f(t)]-f(0)$, jer je zbog $|f(t)|\le Me^{aT}$ ispunjeno $\lim_{T\to\infty}e^{-sT}f(T)=0,\mathrm{Re}\,s>a$. ♦

59. **OSOBINA INTEGRALA ZA LAPLASOVU TRANSFORMACIJU.** Osobina integrala. Neka $f(t)\in E(a)$ i neka je $L[f(t)]=F(s)$, $\mathrm{Re}\,s>a$. Tada je $L\left[\int_0^1 f(x)dx\right]=\frac{L[f(t)]}{s}=\frac{F(s)}{s},\mathrm{Re}\,s>a$. **DOKAZ** Dokažimo prvo da $\int_0^t f(x)dx\in E(a)$. Zaista, zbog $|f(x)|\le Me^{ax}$ sledi da je za $a\ne 0$

$$\left|\int_0^t f(x)dx\right|\le\int_0^t|f(x)|dx\le M\int_0^t e^{ax}dx=\frac{M}{a}(a^{at}-1)\le M_1e^{at}.$$

Koristeći parcijalnu integraciju $\left(e^{-st}dt=du,\int_0^t f(x)dx=v\right)$ imamo da je, za $\mathrm{Re}\,s>a$

$$L\left[\int_0^t f(x)dx\right]=\int_0^\infty e^{-st}\left(\int_0^t f(x)dx\right)dt=$$

$$-\frac{1}{s}e^{-st}\left(\int_0^t f(x)dx\right)\Big|_0^\infty+\frac{1}{s}\int_0^\infty e^{-st}f(t)dt$$

T(t-b)

$$=-\frac{1}{s}\lim_{T\to\infty}e^{-st}\left(\int_0^t f(x)dx\right)\Big|_0^T+\frac{1}{s}L[f(t)]$$

$$=-\frac{1}{s}\lim_{T\to\infty}e^{-sT}\left(\int_0^T f(x)dx\right)+\frac{L[f(t)]}{s}=\frac{F(s)}{s}$$ jer zbog

$\left|\int_0^T f(x)dx\right|\le M_1e^{aT}$ sledi da je

$$\lim_{T\to\infty}e^{-sT}\left(\int_0^T f(x)dx\right)=0,\mathrm{Re}\,s>a.$$ ♦

60. **DEFINICIJA KONVOLUCIJE. KOMUTATIVNOST KONVOLUCIJE. OSOBINA KONVOLUCIJE ZA LAPLASOVU TRANSFORMACIJU.** Konvolucija f-ja $f_1(t)$ i $f_2(t)$ je f-ja $g(t)$ definisana sa $g(t)=f_1*f_2\overset{def}{=}\int_0^t f_1(x)f_2(t-x)dx$. Koristeći smenu $t-x=x'$ dobijamo

$$f_2*f_1=\int_0^t f_2(x)f_1(t-x)dx=-\int_t^0 f_1(x')f_2(t-x')dx'=$$

$\int_0^t f_1(x')f_2(t-x')dx'=f_1*f_2$ **DOKAZ** Dokazaćemo da važi sledeća osobina konvolucije: neka $f_1(t)\in E(a_1)$, $f_2(t)\in E(a_2)$ i neka je $L[f_1(t)]=F_1(s),\mathrm{Re}\,s>a_1$, $L[f_2(t)]=F_2(s),\mathrm{Re}\,s>a_2$. Tada je $L[f_1*f_2]=F_1(s)F_2(s),\mathrm{Re}\,s>\max\{a_1,a_2\}$. Pokažimo prvo da je $g(t)=f_1*f_2\in E(a)$, gde je $a=\max\{a_1,a_2\}$. Zbog, $|f_1(t)|\le M_1e^{a_1t}$, $|f_2(t)|\le M_2e^{a_2t}$ imamo da je za $a_1\ne a_2$:

$$|g(t)|\le\int|f_1(x)f_2(t-x)|dx\le M_1M_2\int_0^t e^{a_1x}e^{a_2(t-x)}dx$$

$=\frac{M_1M_2}{a_1-a_2}(e^{a_1t}-e^{a_2t})\le\frac{2M_1M_2}{|a_1-a_2|}e^{at}=Me^{at}$. Laplasova transformacija $g(t)$ definisana je za $\mathrm{Re}\,s>a$. Promenom poretka integracije ($0\le x<t<\infty$), imamo da je za $\mathrm{Re}\,s>a$

$$L[g(t)]=\int_0^\infty e^{-st}\left(\int_0^t f_1(x)f_2(t-x)dt\right)=$$

$\int_0^\infty f_1(x)\left(\int_x^\infty e^{-st}f_2(t-x)dt\right)dx$ odakle, smenom $t-x=t'$ u unutrašnjem integralu dobijamo

$$L[g(t)]=\int_0^\infty f_1(x)\left(\int_0^\infty e^{-s(t'+x)}f_2(t')dt'\right)dx$$

$$=\int_0^\infty e^{-sx}f_1(x)\left(\int_0^\infty e^{-st'}f_2(t')dt'\right)dx$$

$$=\left(\int_0^\infty e^{-sx}f_1(x)dx\right)\left(\int_0^\infty e^{-st'}f_2(t')dt'\right)=F_1(s)F_2(s),\mathrm{Re}\,s>a.$$ ♦

61. **AKO JE** $L\{f(t)\}=\mathrm{F}(s),\mathrm{Re}\,s>a$, **DOKAZATI** $L\{t\,f(t)\}=-\mathrm{F}'(s),\mathrm{Re}\,s>a$. Neka je $f(t)\in E(a)$ i neka je $L[f(t)]=F(s)$, $\mathrm{Re}\,s>a$. Tada je $L[tf(t)]=-F'(s),\mathrm{Re}\,s>a$. **DOKAZ** F-ja $F(s)=\int_0^\infty e^{-st}f(t)dt$ je analitička u oblasti $\mathrm{Re}\,s>a$. Diferenciranjem dobijamo

$$F'(s)=\frac{d}{ds}\int_0^\infty e^{-st}f(t)dt=\int_0^\infty\frac{d}{ds}e^{-st}f(t)dt=$$

$-\int_0^\infty e^{-st}tf(t)dt=-L[tf(t)],\mathrm{Re}\,s>a$, odnosno

$L[t\,f(t)]=-F'(s),\mathrm{Re}\,s>a$. ♦

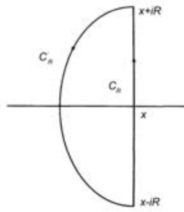
62. **DOKAZATI DA JE** $L\{\mathrm{f}(t)/t\}=\int_s^\infty\mathrm{F}(p)dp,\mathrm{Re}\,s>a$, **AKO JE** $L\{\mathrm{f}(t)\}=\mathrm{F}(s),\mathrm{Re}\,s>a$. Neka $f(t)\in E(a),\frac{f(t)}{t}\in E(a)$, i neka je $L[f(t)]=F(s),\mathrm{Re}\,s>a$, $L\left[\frac{f(t)}{t}\right]=G(s),\mathrm{Re}\,s>a$, tada je $G(s)=\int_s^\infty F(p)dp,\mathrm{Re}\,s>a$ tj. $L\left[\frac{f(t)}{t}\right]=\int_s^\infty F(p)dp,\mathrm{Re}\,s>a$. **DOKAZ** Diferenciranjem analitičke f-je $G(p)=\int_0^\infty e^{-pt}\frac{f(t)}{t}dt$ dobijamo $G'(p)=-\int_0^\infty e^{-pt}t\frac{f(t)}{t}dt=-F(p)$. Integracijom u granicama od S do s dolazimo do $\int_S^s G'(p)dp=-\int_S^s F(p)dp$, tj. $G(s)-G(S)=\int_s^S F(p)dp$. Prelaskom na granicu kad $\mathrm{Re}\,S\to\infty$ dobijamo $G(s)=\int_s^\infty F(p)dp$. pa je zbog $\left|\frac{f(t)}{t}\right|\le Me^{at}$,

$|G(S)|\le\int_0^\infty\left|e^{-St}\frac{f(t)}{t}\right|dt\le M\int_0^\infty e^{(a-\mathrm{Re}\,S)t}dt=\frac{M}{\mathrm{Re}\,S-a}$ pa je $\lim_{\mathrm{Re}\,S\to\infty}G(S)=0$.

63. **INVERZNA LAPLASOVA TRANSFORMACIJA. JEDNOZNAČNOST.** Neka je $F(s)$ data f-ja kompleksne promenljive. Ako postoji f-ja realne promenljive $f(t)$ tako da je $L[f(t)]=F(s)$, f-ju $f(t)$ nazivamo inverznom Laplasovom transformacijom f-je $F(s)$ i koristimo oznaku $f(t)=L^{-1}[F(s)]$. Može se pokazati da se inverzne Laplasove transformacije f-je $F(s)$ ne mogu "mnogo" razlikovati među sobom. **TEO:** Ako $f(t)\in E(a)$ i $g(t)\in E(a)$ i ako je $f(t)=L^{-1}[F(s)]$, $G(t)=L^{-1}[F(s)]$ tada ne postoji interval (c,d) dužine veće od nule na kome je $f(t)\ne g(t)$ za svako $t\in(c,d)$. ♦ Posledica ove teoreme je sledeća: ako $f(t)$ i $g(t)$ zadovoljavaju uslove teoreme i uz to su neprekidne f-je, tada je $f(t)=g(t),t>0$.

64. **EGZISTENCIJA INVERZNE LAPLASOVE TRANSFORMACIJE I MELINOVA FORMULA.** **TEO:** (Melinova formula) Neka f-ja $F(s)$ kompleksne promenljive $s = x + iy$ zadovoljava sledeće uslove: **(1)** $F(s)$ je analitička f-ja u oblasti $\mathrm{Re}\, s = x > a$, **(2)** $\lim_{|s|\to\infty} F(s) = 0$, uniformno po $\arg s$, **(3)** za svako $x > a$ integral $\int_{x-i\infty}^{x+i\infty} |F(s)| dy$ konvergira. Tada je f-ja $F(s)$ za $\mathrm{Re}\, s > a$ Laplasova transformacija f-je $f(t)$, i pritom je za $t > 0$ $f(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{x-i\infty}^{x+i\infty} e^{st}F(s)ds$, $x > a$. **TEO:** Neka f-ja $F(s)$ zadovoljava uslove Melinove formule. Neka je, osim toga, f-ja $F(s)$ analitička za $\mathrm{Re}\, s \le a$, osim u konačno mnogo izolovanih singulariteta $s_1, ..., s_k$. Tada je za $x > a$ $\frac{1}{2\pi i}\int_{x-i\infty}^{x+i\infty} e^{st}F(s)ds = \sum_{i=1}^{k} \mathrm{Res}[e^{st}F(s), s_i]$.

DOKAZ Posmatrajmo konturu C_R koja sastoji od polukruga radijusa R i odsečka dužine $2R$ na pravoj $\mathrm{Re}\, s = x$. Označimo polukrug sa $C_R^{'}$. Imamo da je: $\int_{C_R} e^{st}F(s)ds = \int_{C_R^{'}} e^{st}F(s)ds + \int_{x-iR}^{x+iR} e^{st}F(s)ds$.



Za R dovoljno veliko svi singulariteti f-je $F(s)$ (koji su istovremeno i singulariteti f-je $e^{st}F(s)$) nalaze se unutar konture C_R . Stoga je $\int_{C_R^{'}} e^{st}F(s) = 2\pi i \sum_{i=1}^{k} \mathrm{Res}[e^{st}F(s), s_i]$. Pokazuje se da je pod navedenim pretpostavkama za $t > 0$ $\lim_{R\to\infty} \int_{C_R} e^{st}F(s)ds = 0$. Prelaskom na granicu, kad $R \to \infty$ dobijamo $\frac{1}{2\pi i}\int_{x-i\infty}^{x+i\infty} e^{st}F(s)ds = \sum_{i=1}^{k} \mathrm{Res}[e^{st}F(s), s_i]$. ♦

65. **NALAŽENJE** $L^{-1}\{\mathrm{P}(s)/\mathrm{Q}(s)\}$. Nalaženje inverzne Laplasove transformacije količnika $\frac{P(s)}{Q(s)}$. Neka je $F(s) = \frac{P(s)}{Q(s)}$, gde su $P(s)$ i $Q(s)$ polinomi kompleksne promenljive s sa realnim koeficijentima, a stepen polinoma $Q(s)$ je veći od stepena polinoma $P(s)$. Svakom višestrukom korenu a jednačine $Q(s) = 0$ odgovara po k sabiraka oblika $\frac{A_1}{(s-a)}, \frac{A_2}{(s-a)^2}, ..., \frac{A_k}{(s-a)^k}$, gde je k višestrukost korena a . Svakom paru jednostrukih konjugovano-kompleksnih korena $\alpha + i\beta$ i $\alpha - i\beta$ jednačine $Q(s) = 0$ odgovara po jedan sabirak oblika $\frac{As + B}{(s-\alpha)^2 + \beta^2}$. Svakom paru višestrukih konjugovano kompleksnih korena $\alpha + i\beta$ i $\alpha - i\beta$ jednačine $Q(s) = 0$ odgovara po k sabiraka oblika $\frac{A_1 s + B_1}{(s-\alpha)^2 + \beta^2}, \frac{A_2 s + B_2}{((s-\alpha)^2 + \beta^2)^2}, ..., \frac{A_k s + B_k}{((s-\alpha)^2 + \beta^2)^k}$, gde je k višestrukost korena $\alpha + i\beta$ tj. korena $\alpha - i\beta$. Nalaženje inverzne transformacije svodi se, na osnovu linearnosti Laplasove transformacije, na nalaženje inverzne transformacije količnika oblika $\frac{A}{s-a}$, $\frac{A}{(s-a)^n}$, $\frac{As + B}{(s-\alpha)^2 + \beta^2}$, $\frac{As + B}{((s-\alpha)^2 + \beta^2)^n}$. Inverzna Laplasova transformacija ovih izraza se uvek može naći direktno iz tabele Laplasovih transformacija.

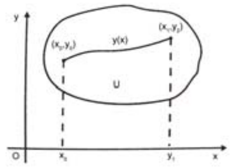
66. **NALAŽENJE** $L^{-1}\{\mathrm{F}(s)\cdot \mathrm{G}(s)\}$. Nalaženje inverzne Laplasove transformacija proizvoda $\frac{F_1(s)}{F_2(s)}$. Neka je $F(s) = F_1(s)F_2(s)$, a pritom je poznato da je $L^{-1}[F_1(s)] = f_1(t)$, $L^{-1}[F_2(s)] = f_2(t)$. U tom slučaju je $L^{-1}[F_1(s)F_2(s)] = \int_0^t f_1(x) f_2(t-x)dx$

67. **PRIMENA LAPLASOVE TRANSFORMACIJE NA DIFERENCIJALNE JEDNAČINE.** Neka je dat Košijev problem $a_0 x^{(n)} + a_1 x^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}x' + a_n x = f(t)$, $x(0) = x_0, x'(0) = x'_0, ..., x^{(n-1)}(0) = x_0^{(n-1)}$. Pretpostavimo da f-ja $f(t)$ ima eksponencijalni red rasta. Može se pokazati da tada rešenje Košijevog problema $x(t)$ takođe ima eksponencijalni red rasta. Primenom Laplasove transformacije na levu i desnu stranu diferencijalne jednačine dobijamo algebarsku jednačinu: $a_0(s^n X(s) - s^{n-1}x_0 - \cdots - s x_0^{(n-2)} - x_0^{(n-1)})$ $a_1(s^{n-1}X(s) - s^{n-2}x_0 - \cdots - s x_0^{(n-3)} - x_0^{(n-2)}) + \cdots +$ $a_{n-1}(sX(s) - x_0) + a_n X(s) = F(s)$, gde je $X(s) = L[x(t)]$, $F(s) = L[f(t)]$. Rešavanjem po $X(s)$ dobijamo $X(s) = \frac{F(s) + P(s)}{Q(s)}$ (*), gde je $P(s) = a_0(s^{n-1}x_0 + \cdots + x_0^{(n-1)}) + \cdots + a_{n-1}x_0$, $Q(s) = a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_{n-1}s + a_n$. Primenom inverzne Laplasove transformacije na (*) dobijamo $x(t) = L^{-1}\left[\frac{F(s) + P(s)}{Q(s)}\right]$.

68. **PRIMENA LAPLASOVE TRANSFORMACIJE NA SISTEME DIFERENCIJALNIH JEDNAČINA.** Primenom Laplasove transformacije na svaku od jednačina sistema dobija se sistem linearnih algebarskih jednačina po transformacijama nepoznatih f-ja. Rešavanjem ovog sistema i nalaženjem odgovarajućih inverznih transformacija dobija se rešenje. **(1)** Homogeni linearni sistemi diferencijalnih jednačina prvog reda: neka je dat Košijev problem $\frac{dX}{dt} = AX$, $X(0) = X_0$, gde je $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$, $\frac{dX}{dt} = \begin{bmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{bmatrix}$, $A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$, $X_0 = \begin{bmatrix} x_{10} \\ \vdots \\ x_{n0} \end{bmatrix}$. Primenom Laplasove transformacije na dati sistem dobijamo $sH(s) - X_0 = AL(s)$, gde je $H(s) = L[X(t)] = \begin{bmatrix} L[x_1] \\ \vdots \\ L[x_n] \end{bmatrix}$. Dalje je $(sI - A)H(s) = X_0$, gde je I jedinična matrica reda $n \times n$. Odavde je $H(s) = (sI - A)^{-1} X_0$. Primenom inverzne Laplasove transformacije dobijamo $X(t) = L^{-1}[(sI - A)^{-1} X_0] = L^{-1}[(sI - A)^{-1}]X_0$; pritom se inverzna transformacija matrice $(sI - A)^{-1}$ dobija nalaženjem inverzne transformacije svake njene komponente. Primetimo da je $L^{-1}[(sI - A)^{-1}]$ fundamentalna matrica datog sistema. **(2)** nehomogeni linearni sistemi diferencijalnih jednačina prvog reda: neka je dat Košijev problem $\frac{dX}{dt} = Ax + B(t)$, $X(0) = X_0$, gde su $X, \frac{dX}{dt}, A, X_0$ kao u homogenom slučaju, a $b(t) = \begin{bmatrix} b_1(t) \\ \vdots \\ b_n(t) \end{bmatrix}$. Imamo da je $sH(s) - X_0 = AH(s) + B(s)$, gde je $H(s) = L[X(t)]$, $B(s) = L[B(t)]$. Odavde je $H(s) = (sI - A)^{-1}(B(s) + X_0)$, tj. $X(t) = L^{-1}[(sI - A)^{-1}(B(s) + X_0)]$.

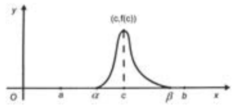
69. **PROSTORI** $\mathrm{C}(a,b)$ **I** $\mathrm{C}_1(a,b)$. **POJAM OKOLINE. POJAM LINEARNOG FUNKCIONALA I PRVE VARIJACIJE FUNKCIONALA** φ. Varijacioni račun je oblast matematike u kojoj se razmatra problem određivanja ekstremuma funkcionala. **DEF:** Za funkcional $J[y(x)]$ kažemo da je **linearan** ako je $J[\alpha y_1(x) + \beta y_2(x)] = \alpha J[y_1(x)] + \beta J[y_2(x)]$, $\alpha, \beta \in$. **DEF:** Ako se priraštaj funkcionala može napisati u obliku $\Delta J = J[y(x) + \delta y] - J[y(x)] =$ $L[y(x), \delta y] + \beta(y(x), \delta y)\rho(y + \delta y, y)$ gde je L linearni funkcional u odnosu na δy i $\beta(y(x), \delta y) \to 0$ kad $\rho(y + \delta, y) \to 0$, tada se glavni, linearni deo priraštaja funkcionala $L[y(x), \delta y]$ označava δJ i naziva **prvom varijacijom** funkcionala $J[y(x)]$.

70. **OSNOVNI PROBLEM VARIJACIONOG RAČUNA I OJLEROVA JEDNAČINA.** Funkcional $J[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} F[x, y(x), y'(x)]dx$ (☺), $y(x_0) = y_0$, $y(x_1) = y_1$, i određivanje ekstremuma funkcionala (☺) se naziva osnovnim problemom varijacionog računa. Pretpostavićemo da je integrand F dva puta diferencijabilna f-ja po argumentu y za sve vrednosti x i $y(x)$ u nekoj oblasti $U \subset R^2$, i da je f-ja $y = y(x)$ neprekidno diferencijabilna na odsečku $[x_0, x_1]$.



Skup tzv. dopustivih f-ja M definisaćemo: $y(x) \in M \Leftarrow \begin{cases} y(x) \in C^{(1)}[x_0, x_1], \\ y(x_0) = y_0, y(x_1) = y_1 \end{cases}$. Pretpostavićemo da postoji dopustiva f-ja $y(x)$ za koju funkcional (☺) dostiže ekstremnu vrednost. Razmotrimo klasu f-ja $y^*(x) = y(x) + \alpha\eta(x)$, gde je $\alpha \in R$, $\alpha\eta(x)$ varijacija argumenata $y(x)$. Da bi f-ja $y^*(x)$ pripadala skupu M dopustivih f-ja $\forall \alpha \in R$, pomoćna f-ja $\eta(x)$ mora zadovoljavati uslove $\eta(x) \in C^{(1)}[x_0, x_1]$, $\eta(x_0) = \eta(x_1) = 0$ (☺☺). U tom slučaju i f-ja $y^*(x) \in M$ jer $y^*(x) \in C^{(1)}[x_0, x_1]$ i $y^*(x_0) = y(x_0) = y_0$, $y^*(x_1) = y(x_1) = y_1$. Za fiksirane vrednosti $y(x)$ i x funkcional $J(y^*)$ će predstavljati f-ju realnog parametra α : $J(y^*) = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y^*, y^{*\prime})dx = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y + \alpha\eta, y' + \alpha\eta')dx = \Phi(\alpha)$

Kako po pretpostavci integral $J(y^*)$ dostiže ekstremnu vrednosti za f-ju $y^* = y(x)$ to će f-ja $\Phi(\alpha)$ imati ekstremnu vrednost za $\alpha = 0$, tj. $\Phi'(0) = \int_{x_0}^{x_1} [F_y(x, y, y')]\eta + F_{y'}(x, y, y')\eta']dx = 0$ (☺☺☺), za svaku f-ju $\eta(x)$ koja zadovoljava uslove (☺☺). Ako integral (☺☺☺) napišemo u obliku $\int_{x_0}^{x_1} [F_y\eta + F_{y'}\eta']dx = \int_{x_0}^{x_1} F_y\eta dx + \int_{x_0}^{x_1} F_{y'}\eta' dx$ i primenimo parcijalnu integraciju kod drugog integrala $\int_{x_0}^{x_1} F_{y'}\eta' dx = F_{y'}\eta \Big|_{x_0}^{x_1} - \int_{x_0}^{x_1} \eta \frac{d}{dx} F_{y'}dx = -\int_{x_0}^{x_1} \eta \frac{d}{dx} F_{y'}dx$, jer je $\eta(x_0) = \eta(x_1) = 0$ tada se uslov (☺☺☺) može napisati u obliku $\Phi'(0) = \int_{x_0}^{x_1} \left(F_y - \frac{d}{dx}F_{y'}\right)\eta dx = 0$ (▼). **Lagranžova lema:** Neka f-ja $f(x) \in C[a,b]$, a f-ja $\eta(x) \in C^{(1)}(a,b)$ i pri tome $\eta(a) = \eta(b) = 0$. Ako je za svaku takvu f-ju $\eta(x)$ ispunjen uslov $\int_a^b f(x)\eta(x)dx = 0$ tada je $f(x) \equiv 0$, $\forall x \in [a,b]$. **DOKAZ** Ako se pretpostavi da je u nekoj tački c , $a < c < b$, $f(c) \ne 0$, npr. $f(c) > 0$, tada, s obzirom na neprekidnost f-je $f(x)$, postoji interval (α, β) : $a < \alpha < c < \beta < b$, u kome je $f(x) > 0$, $\forall x \in [\alpha, \beta]$. Ako sada konstruišemo dopustivu f-ju $\eta(x)$: $\eta(x) = \begin{cases} 0, & a \le x \le \alpha \vee \beta \le x \le b, \\ (x-\alpha)^2(\beta - x)^2 & \alpha < x < \beta \end{cases}$, tada je $\int_a^b f(x)\eta(x)dx = \int_\alpha^\beta f(x)\eta(x)dx > 0$ što je u protivrečnosti sa pretpostavkom leme, odakle sledi da je $f(x) \equiv 0$, $\forall x \in [a,b]$.



Ako se dokazana lema primeni na izraz (▼) dobija se da izraz (▼) važi samo u slučaju kada je $F_y - \frac{dF_{y'}}{dx} = 0$, $F_y - F_{xy'} - F_{yy'} \cdot y' - F_{y'y'} \cdot y'' = 0$. Ovaj izraz predstavlja neophodan uslov za ekstremum funkcionala (☺) napisan u obliku diferencijalne jednačine drugog reda u odnosu na argument $y(x)$ i naziva se Ojlerovom jednačinom.

71. **OJLEROVA JEDNAČINA KADA JE** $F = \mathrm{F}(x,y)$. S obzirom na to da je u ovom slučaju $F_{y'} \equiv 0$, odgovarajuća Ojlerova jednačina ima konačni oblik $F_y(x,y) = 0$, tj. ne sadrži integracionu konstantnu, pa u opštem slučaju ne mora zadovoljavati granične uslove $y(x_0) = y_0$ i $y(x_1) = y_1$. Prema tome, rešenje razmatranog varijacionog problema u opštem slučaju ne postoji; ekstremala postoji samo u specijalnim slučajevima kada kriva $F_y(x,y) = 0$ prolazi kroz granične tačke (x_0, y_0) i (x_1, y_1).

72. **OJLEROVA JEDNAČINA KADA JE** $F = \mathrm{F}(x,y')$. U ovom slučaju je $F_y = 0$, pa se Ojlerova jednačina svodi na jednačinu $\frac{dF_y}{dx} = 0$, čiji je prvi integral $F_{y'} = C$. Rešivši ovu jednačinu prvog reda (koja ne sadrži y) po y', dobijamo da je $y' = f(x,C)$ odakle se y dobija u kvadraturama.

73. **OJLEROVA JEDNAČINA KADA JE** $F = \mathrm{F}(y,y')$. Odgovarajuća Ojlerova jednačina ima oblik: $F_y - \frac{dF_{y'}}{dx} = F_y - F_{yy'} \cdot y' - F_{y'y'} \cdot y'' = 0$. Ako dobijeni izraz pomnožimo sa y' dobićemo potpuni izvod $\frac{d(F - yF_{y'})}{dx}$ jer je

$$\frac{d(F - y'F_{y'})}{dx} = F_y \cdot y' + F_{y'} \cdot y'' - y''F_{y'} - F_{yy'} \cdot y'^2 - F_{y'y'} \cdot y'' \cdot y'$$

tj. $\frac{d(F - y'F_{y'})}{dx} = y'(F_y - F_{yy'} \cdot y' - F_{y'y'} \cdot y'') = 0$. Prema tome, prvi integral je $F - y'F_{y'} = C$, što predstavlja diferencijalnu jednačinu prvog reda koja ne sadrži x i koja se može rešiti po y' ili uvođenjem parametra.

74. **OJLEROVA JEDNAČINA KADA JE** $F = \mathrm{F}(y')$. Ojlerova jednačina ima oblik $\frac{dF_{y'}(y')}{dx} = 0$, tj. $f_{y'y'} \cdot y'' = 0$, što znači da je ili $y'' = 0$, ili $F_{y'y'} = 0$. Ako je $y'' = 0$, tada je $y' = C_1$, a $y = C_1x + C_2$ - porodica pravih linija koju određuju dva parametra. Ako je $F_{y'y'}(y') = 0$, tada imamo jedan ili više realnih korena $y' = r_i$, kojima odgovara jednoparametarska porodica pravih $y = r_ix + C$ koja se sadrži u porodici pravih sa dva parametra $y = C_1x + C_2$. Dakle, u ovom slučaju ekstremale predstavljaju sve moguće prave $y = C_1x + C_2$.

75. **OJLEROVA JEDNAČINA KADA JE** $F = A(x,y) + B(x,y) \cdot y'$. Odgovarajuća Ojlerova jednačina ima oblik $A_y + B_y \cdot y' - \frac{dB(x,y)}{dx} = 0$ ili $A_y + B_y \cdot y' - B_x - B_y \cdot y' = 0$, što predstavlja konačnu, a ne diferencijalnu jednačinu, pa u opštem slučaju ne mora zadovoljavati postavljene granične uslove, što znači da razmatrani varijacioni problem nema rešenja u klasi neprekidnih f-ja u opštem slučaju. Ako je $A_y - B_x \equiv 0$, tada je $Adx + Bdy$ potpuni diferencijal i integral $J = \int_{x_0}^{x_1} (A(x,y) + B(x,y)\frac{dy}{dx})dx = \int_{x_0}^{x_1} (Adx + Bdy)$ ne zavisi od krive na kojoj se vrši integracija, tj. vrednost funkcionala J je konstanta na svim dopustivim krivama, te odgovarajući varijacioni problem postaje bespredmetan.