OPERACIONA ISTRAŽIVANJA

OBLAST: **NELINEARNO PROGRAMIRANJE**

Materijal sa predavanja 2009/2010

Prof. dr. Vera Kovačević-Vujčić

1. OSNOVNI POJMOVI

Problem nelinearnog programiranja. Pojam dopustivog skupa.

Opšti oblik problema nelinearnog programiranja:

(NLP)
$$\begin{aligned} &\min(\max) f(x_1,\dots,x_n) \\ &g_i(x_1,\dots,x_n) \le 0, i=1,\dots,m \end{aligned}$$

gde je *f*- *funkcija cilja*, g_i - *funkcije ograničenja.*

Vektorski zapis: $x=(x_1,\dots,x_n)$

(NLP)
$$\begin{aligned} &\min(\max) f(x) \\ &g_i(x) \le 0, i=1,\dots,m \end{aligned}$$

Treći (najkraći) zapis:

(NLP)
$$\begin{aligned} &\min(\max) f(x) \\ &x \in X \end{aligned}$$

gde je $X=\left\{ x \in R^n \mid g_i(x) \le 0, i=1,\dots,m \right\}$ *dopustivi skup*.

Ako je $X=R^n$ (NLP) se naziva *problem bezuslovne optimizacije* ili *bezuslovnog ekstremuma*

(BO)
$$\begin{aligned} &\min(\max) f(x) \\ &x \in R^n \end{aligned}$$

Ako je $X \ne R^n$ (NLP) se naziva *problem uslovne optimizacije* ili *uslovnog ekstremuma*

Napomena 1: Problem maksimizacije se može svesti na problem minimizacije. Rešava se pomoćni problem

$$\begin{aligned}&\min(-f(x))\\&x \in X\end{aligned}$$

i optimalna vrednost funkcije cilja se množi sa –1. U daljem radimo samo sa problemima minimizacije.

Napomena 2: Dopustivi skup je bez umanjenja opštosti definisan preko ograničenja tipa ≤. Zaista, ograničenje $h(x)=0$ može da se zameni sa dve nejednačine $h(x)\leq 0,\ h(x)\geq 0$, tj. sa nejednačinama $h(x)\leq 0,\ -h(x)\leq 0$, dok se ograničenje tipa $v(x)\geq u(x)$ može zapisati u obliku $u(x)-v(x)\leq 0$. Na primer, skup zadat sa

$$x_1^2+x_2^2=x_3-1, \quad x_1\geq x_2$$

možemo opisati na sledeći način:

$$\begin{aligned}&g_1(x)=x_1^2+x_2^2-x_3+1\leq 0\\&g_2(x)=-x_1^2-x_2^2+x_3-1\leq 0\\&g_3(x)=x_2-x_1\leq 0.\end{aligned}$$

Napomena 3: Ako u opisu problema učestvuju samo jednačine radi se o tzv. *klasičnom problemu uslovnog ekstremuma*

$$\text{(KLP)} \qquad \begin{aligned}&\min f(x_1,...,x_n)\\&h_i(x_1,...,x_n)=0, i=1,...,m\end{aligned}$$

Ovaj problem je poznat odavno, i tretira se direktno, bez svodjenja na ograničenja tipa ≤.

Pojam dopustivog i optimalnog rešenja.

Svako $x \in X$ se naziva *dopustivo rešenje*. Koncept optimalnosti je složeniji i obuhvata više pojmova.

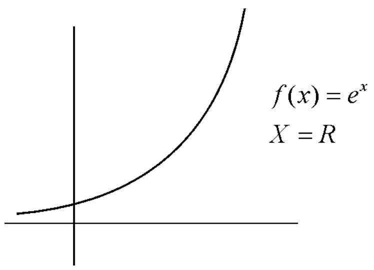
$x^* \in X$ je *globalni minimum* problema (NLP) ako je $f(x^*) \le f(x)$ za sve $x \in X$.

$x^* \in X$ je *strogi globalni minimum* problema (NLP) ako je $f(x^*) < f(x)$ za sve $x \in X$, $x \ne x^*$.

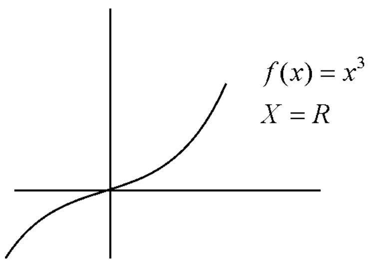
Napomena 4: Za globalni minimum se koriste i termini *globalni optimimum,* tj. *globalni ekstremum* (isti termini se koriste i za globalni maksimim).

Napomena 5: Ako je *f* neprekidna funkcija a skup *X* zatvoren i ograničen postoji (bar jedan) globalni minimum $x^* \in X$.

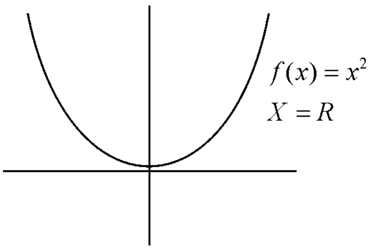
Primer 1. Globalni minimum



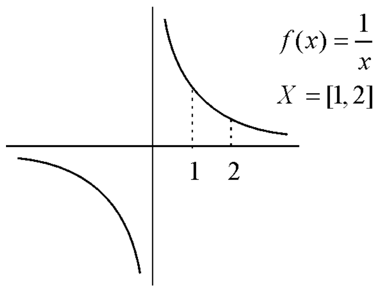
ne postoji globalni minimum (f ograničena odozdo)



ne postoji globalni minimum (f nije ograničena odozdo)



$x^* = 0$ je strogi globalni minimum

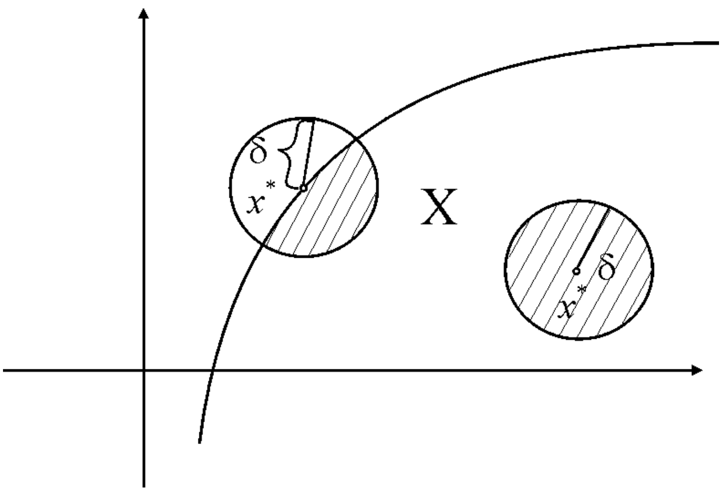


$x^* = 2$ je strogi globalni minimum

Tačka $x^* \in X$ je *lokalni minimum* problema (NLP) ako je najbolja u nekoj svojoj dopustivoj okolini, tj. postoji $\delta > 0$ tako da je $f(x^*) \leq f(x)$ za sve $x \in X$ takve da je $\| x - x^* \| < \delta$.

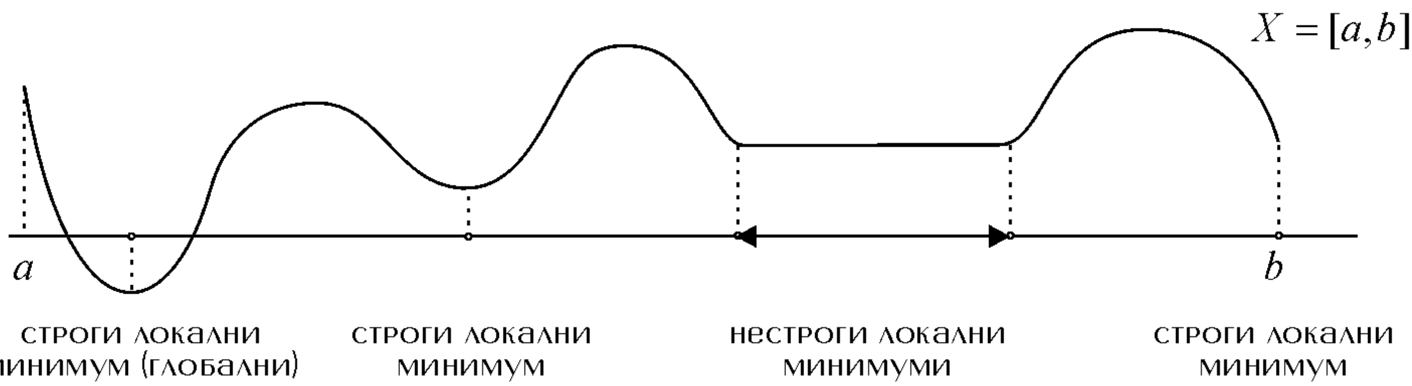
Napomena 6: Podrazumeva se da je $\| x - x^* \| = \sqrt{(x_1 - x_1^*)^2 + \cdots + (x_n - x_n^*)^2}$. Geometrijska interpretacija dopustivih okolina date tačke u R^2 data je na slici.

Dopustiva okolina tačke



Tačka $x^* \in X$ je *strogi lokalni minimum* problema (NLP) ako postoji $\delta > 0$ tako da je $f(x^*) < f(x)$ za sve $x \in X$ takve da je $\| x - x^* \| < \delta$ i $x \neq x^*$.

Primeri navedenih pojmova u slučaju funcije jedne promenljive dati su na slici.



Lokalni i globalni minimumi

Stanje teorije u oblasti NLP

1) Postoji karakterizacija lokalnih minimuma (neophodni i dovoljni uslovi za optimalnost).

2) Karakterizacija globalnih minimuma ne postoji, osim u specijalnim slučajevima, kao što je linearno programiranje, konveksno programiranje, itd.

3) *Metode nelinearnog programiranja* su postupci za efektivno nalaženje lokalnih minimuma.

4) *Metode globalne optimizacije* kombinuju metode nelinearnog programiranja sa raznim tehnikama pretraživanja dopustivog skupa u cilju nalaženja globalnih minimuma. Ako se radi o problemima malih dimenzija sa zatvorenim i ograničenim dopustivim skupom u principu se mogu naći svi lokalni minimumi i od njih odabrati najbolji. U praksi se obično radi sa problemima velikih dimenzija, tako da se problemi globalne optimizacije rešavaju uglavnom heurističkim metodama.

2. BEZUSLOVNA OPTIMIZACIJA. NEOPHODNI I DOVOLJNI USLOVI OPTIMALNOSTI

Problem:

$$\text{(BO)} \qquad \begin{array}{l} \min f(x) \\ x \in R^n \end{array}$$

Pretpostavka: *f* dvaput neprekidno diferencijabilna na R^n.

Metodologija:

1) Traže se rešenja sistema

$$\text{(S)} \qquad \frac{\partial f}{\partial x_1} = 0, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n} = 0$$

To su tzv. *stacionarne tačke*, kandidati za ekstremum.

2) Traži se matrica drugih izvoda

$$\nabla^2 f(x) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \vdots & & \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} \end{bmatrix}$$

3) Neka je x^* rešenje sistema (S). Računa se $\nabla^2 f(x^*)$ i nalaze glavni minori $D_1, \ldots, D_n$.

(i) Ako je $D_1 > 0,\ D_2 > 0, \ldots, D_n > 0 \Rightarrow x^*$ je strogi lokalni minimum

(ii) Ako je $D_1 < 0,\ D_2 > 0, \ldots, (-1)^n D_n > 0 \Rightarrow x^*$ je strogi lokalni maksimum

Navedena metodologija se zasniva na sledećim rezultatima:

Teorema 1 (Neophodni uslovi za lokalni minimum). Ako je x^* lokalni minimum funkcije $f \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x_1}(x^*) = 0, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(x^*) = 0 \ (\nabla f(x^*) = 0)$.

Teorema 2 (Dovoljni uslovi za strogi lokalni minimum). Ako je $\nabla f(x^*) = 0$ i ako je matrica $\nabla^2 f(x^*)$ *pozitivno definitna* (tj. $y^T \nabla^2 f(x^*) y > 0, \ \forall y \neq 0$) $\Rightarrow x^*$ je strogi lokalni minimum funkcije *f*.

Teorema 3 (Silvestrov kriterijum). $\nabla^2 f(x^*)$ je pozitivno definitna matrica $\Leftrightarrow D_1 > 0, \ldots, D_n > 0$.

Primer 1.

$$f(x) = x_1^4 + x_2^4 - x_1^2 - 2x_1x_2 - x_2^2$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x_1} &= 4x_1^3 - 2x_1 - 2x_2 = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial x_2} &= 4x_2^3 - 2x_1 - 2x_2 = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow 4x_1^3 = 4x_2^3 \Rightarrow x_1 = x_2$$

$$4x_1^3 - 4x_1 = 0 \Rightarrow \qquad \begin{aligned} x_1 &= 0 & x^1 &= (0,0) \\ x_1 &= 1 & x^2 &= (1,1) \\ x_1 &= -1 & x^3 &= (-1,-1) \end{aligned}$$

$$\nabla^2 f(x) = \begin{bmatrix} 12x_1^2 - 2 & -2 \\ -2 & 12x_2^2 - 2 \end{bmatrix}$$

$$x^1 = (0,0), \qquad \nabla^2 f(x^1) = \begin{bmatrix} -2 & -2 \\ -2 & -2 \end{bmatrix}, D_1 = -2,\ D_2 = 0 \quad \text{bez zaključka}$$

$$x^2 = (1,1), \qquad \nabla^2 f(x^2) = \begin{bmatrix} 10 & -2 \\ -2 & 10 \end{bmatrix}, D_1 = 10,\ D_2 = 96 \quad \text{strogi lok. min.}$$

$$x^3 = (-1,-1), \quad \nabla^2 f(x^3) = \nabla^2 f(x^2), \qquad \text{strogi lok. min.}$$

Šta ako su narušeni uslovi (i), (ii)?

Važi sledeće pravilo:

1) Ako postoji glavni minor parnog reda koji je $< 0 \Rightarrow x^*$ nije ekstremum.

2) Ako postoje dva glavna minora neparnog reda različitog znaka $\Rightarrow x^*$ nije ekstremum.

3) Ako je $D_1 \geq 0, ..., D_n \geq 0$ (bar jedan =0) ili $D_1 \leq 0, ..., (-1)^n D_n \geq 0$ (bar jedan =0) treba evaluirati sve minore simetrične u odnosu na glavnu dijagonalu.

3.1) Ako postoji simetričan minor parnog reda koji je $< 0 \Rightarrow x^*$ nije ekstremum.

3.2) Ako postoje dva simetrična minora neparnog reda različitog znaka $\Rightarrow x^*$ nije ekstremum.

Šta ako su narušeni i uslovi 1), 2), 3.1), 3.2)?

Onda nema odgovora na pitanje da li se radi o ekstremumu. To se vidi već na primeru funkcija jedne promenljive. Tačka $x^* = 0$ je stacionarna tačka funkcija $f(x) = x^4$ i $g(x) = x^3$ i važi $f''(0) = 0,\ g''(0) = 0$. Ova tačka jeste minimum funkcije *f*, a nije ekstremum (ni minimum ni maksimum) funkcije *g*.

Napomena 1: Broj glavnih minora jednak je n, dok broj simetričnih minora raste eksponencijalnom brzinom u odnosu na n. Zato 3.1) i 3.2) ima smisla koristiti samo za probleme malih dimenzija

Primer 2. $\nabla^2 f(x^1) = \begin{bmatrix} -2 & -2 \\ -2 & -2 \end{bmatrix}$

Svi minori simetrični u odnosu na glavnu dijagonalu su

$$\left.\begin{array}{l} \Delta_1 = -2 \quad \text{(vrsta 1, kolona 1)} \\ \Delta_2 = -2 \quad \text{(vrsta 2, kolona 2)} \\ \Delta_3 = \begin{vmatrix} -2 & -2 \\ -2 & -2 \end{vmatrix} = 0 \end{array}\right\} \text{ i dalje nema odgovora}$$

__**Direktna analiza**__**:** x^1 nije ekstremum.

3. KLASIČNI PROBLEM USLOVNOG EKSTREMUMA

Problem:

$$\text{(KLP)} \qquad \begin{aligned} &\min f(x) \\ &h_i(x) = 0, \quad i = 1,\dots,m \end{aligned}$$

Pretpostavka: $f,\ h_i,\ i = 1,\dots,m$ diferencijabilne

$$J(x) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial h_1}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial h_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \\ \dfrac{\partial h_m}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial h_m}{\partial x_n} \end{bmatrix}_{m\times n}$$

rang $J(x)=m$ na dopustivom skupu

3.1. METODA ELIMINACIJE PROMENLJIVIH.

Ideja: (KLP) se svodi na problem bezuslovne optimizacije.

$$\begin{aligned} &h_1(x_1,\dots,x_n) = 0 & & x_1 = \varphi_1(x_{m+1},\dots,x_n) \\ &\vdots & \Rightarrow & \vdots \\ &h_m(x_1,\dots,x_n) = 0 & & x_m = \varphi_m(x_{m+1},\dots,x_n) \end{aligned}$$

Dobija se problem bezuslovne optimizacije

(BO) $\min f(\varphi_1(x_{m+1},...,x_n),...,\varphi_m(x_{m+1},...,x_n),x_{m+1},...,x_n) = F(x_{m+1},...,x_n)$

Ako je $(x_{m+1}^*,...,x_n^*)$ rešenje (BO) $\Rightarrow$
$(\varphi_1(x_{m+1}^*,...,x_n^*),...,\varphi_m(x_{m+1}^*,...,x_n^*),x_{m+1}^*,...,x_n^*)$ je rešenje (KLP).

Primer 1. Metodom eliminacije promenljivih rešiti problem:

$$\min\ 3x_1^2+7x_2^2+5x_3$$
$$x_1+x_2+x_3=9$$

Ovde je $J=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\end{bmatrix}$, rang J=1.

Eliminišimo, na primer, x_3:

$$x_3 = 9-x_1-x_2.$$

Biće $F(x_1,x_2)=3x_1^2+7x_2^2+5(9-x_1-x_2)$, $\dfrac{\partial F}{\partial x_1}=6x_1-5$, $\dfrac{\partial F}{\partial x_2}=14x_2-5$ i jedina stacionarna tačka je $x^*=\left(\dfrac{5}{6},\dfrac{5}{14}\right)$.

Kako je $\nabla^2F(x^*)=\begin{bmatrix}6 & 0\\ 0 & 14\end{bmatrix}$, $D_1=6>0$, $D_2=84>0$, zaključujemo da je x^* strogi lokalni minimum pomoćnog problema, tj. da je tačka $\left(\dfrac{5}{6},\dfrac{5}{14},\dfrac{164}{21}\right)$ strogi lokalni minimum polaznog problema.

Kasnije ćemo videti da se radi o problemu konveksnog programiranja pa je lokalni minimum istovremeno i globalni minimum.

3.2. METODA LAGRANŽOVIH MNOŽILACA

(KLP) $\rightarrow$ *Lagranžova funkcija* $L(x,\lambda) = f(x) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i h_i(x)$

Napomena 1: $\lambda = (\lambda_1, ..., \lambda_m)$ se naziva vektor *Lagranžovih množilaca*.

Metodologija:
1) Traže se rešenja sistema

(SS) $$\frac{\partial L}{\partial x_1} = 0, ..., \frac{\partial L}{\partial x_n} = 0, \frac{\partial L}{\partial \lambda_1} = 0, ..., \frac{\partial L}{\partial \lambda_m} = 0$$

Rešenja su *stacionarne tačke Lagranžove funkcije*, kandidati za ekstremum.

2) Traži se matrica

$$H(x,\lambda) = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & \frac{\partial h_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial h_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & & \vdots & & \\ 0 & \cdots & 0 & \frac{\partial h_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial h_m}{\partial x_n} \\ \frac{\partial h_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial h_m}{\partial x_1} & \frac{\partial^2 L}{\partial x_1^2} & \cdots & \frac{\partial^2 L}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \vdots & & & \vdots & & \\ \frac{\partial h_1}{\partial x_n} & \cdots & \frac{\partial h_m}{\partial x_n} & \frac{\partial^2 L}{\partial x_n \partial x_1} & \cdots & \frac{\partial^2 L}{\partial x_n^2} \end{bmatrix}_{(m+n)\times(m+n)} = \begin{bmatrix} 0 & J \\ J^T & \nabla_{xx}^2 L \end{bmatrix}$$

3) Neka je (x^*, λ^*) rešenje (SS) i neka su $D_1,...,D_{m+n}$ glavni minori matrice $H(x^*, \lambda^*)$.

(i) $(-1)^m D_{2m+1} > 0,...,(-1)^m D_{m+n} > 0 \Rightarrow x^*$ je strogi lokalni minimum (KLP)

(ii) $(-1)^{m+1} D_{2m+1} > 0,...,(-1)^n D_{m+n} > 0 \Rightarrow x^*$ je strogi lokalni maksimum (KLP)

Metodologija se zasniva na sledeća tri rezultata

Teorema 1 (Neophodni uslovi za lokalni minimum). Ako je x^* lokalni minimum problema (KLP) $\Rightarrow \exists \lambda^* = (\lambda_1^*,...,\lambda_m^*)$ tako da je $\nabla_x L(x^*, \lambda^*) = 0$, $\nabla_\lambda L(x^*, \lambda^*) = 0$ (tj. $\nabla L(x^*, \lambda^*) = 0$).

Teorema 2 (Dovoljni uslovi za strogi lokalni minimum). Neka je (x^*, λ^*) stacionarna tačka funkcije L. Ako je matrica $\nabla_{xx}^2 L(x^*, \lambda^*)$ *pozitivno definitna na tangentnom prostoru* $(y^T \nabla_{xx}^2 L(x^*, \lambda^*) y > 0 \quad \forall y \neq 0$ takvo da je $y^T \nabla h_i(x^*) = 0, i = 1,...,m)$ tada je x^* strogi lokalni minimum problema (KLP).

Teorema 3 (Dovoljni uslovi za pozitivnu definitnost na tangentnom prostoru).

Ako je $(-1)^m D_{2m+1} > 0,...,(-1)^m D_{m+n} > 0 \Rightarrow \nabla_{xx}^2 L(x^*, \lambda^*)$ je pozitivno definitna matrica na tangentnom prostoru.

Napomena 2: Svi navedeni rezultati važe pod pretpostavkom da je rang *J=m.* Ako je u nekim tačkama dopustivog skupa ovaj uslov narušen, njih treba posebno ispitati (i one su kandidati za ekstremum).

Primer 1.

$$f(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$$
$$x_1 + x_2 + x_3 = 1$$

$$L = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + \lambda(x_1 + x_2 + x_3 - 1)$$

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial L}{\partial x_1} &= 2x_1 + \lambda = 0 \\
\frac{\partial L}{\partial x_2} &= 2x_2 + \lambda = 0 \\
\frac{\partial L}{\partial x_3} &= 2x_3 + \lambda = 0 \\
\frac{\partial L}{\partial \lambda} &= x_1 + x_2 + x_3 - 1 = 0
\end{aligned}\right\} \Rightarrow x_1 = \frac{1}{3},\ x_2 = \frac{1}{3},\ x_3 = \frac{1}{3},\ \lambda = -\frac{2}{3},\ x^* = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right),\ \lambda^* = -$$

$$\nabla_{xx}^2 L(x,\lambda) = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad J = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$H(x,\lambda) = \left[\begin{array}{c|ccc} 0 & 1 & 1 & 1 \\ \hline 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right] = H(x^*, \lambda^*) \qquad m = 1,\ n = 3,\ 2m+1 = 3,\ m+n = 4$$

$$(-1)^m D_{2m+1} = (-1)D_3 = -\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 4 > 0$$

$$(-1)^m D_{m+n} = -D_4 = -\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 12 > 0$$

$\Rightarrow x^*$ je strogi lokalni minimum (videće se da se radi o globalnom minimumu)

4. OPŠTI SLUČAJ PROBLEMA NELINEARNOG PROGRAMIRANJA

Problem:

(NLP)
$$\min f(x)$$
$$g_i(x) \leq 0, i = 1,\ldots,m$$

4.1. METODA IZRAVNAVAJUĆIH FUNKCIJA

(NLP) se dodavanjem nenegativnih *izravnavajućih funkcija* $x_{n+i}^2, i = 1,\ldots,m$ svodi na klasični problem uslovnog ekstremuma:

(KLP)
$$\min f(x)$$
$$g_i(x) + x_{n+i}^2 = 0, i = 1,\ldots,m$$

(KLP) se može dalje rešavati metodom eliminacije promenljivih ili metodom Lagranžovih množilaca.

Primer 1.

$$\text{(NLP)}\ \begin{array}{c}\min 4x_1^2+5x_2^2\\ 1-x_1\le 0\end{array} \longrightarrow \text{(KLP)}\ \begin{array}{c}\min 4x_1^2+5x_2^2\\ 1-x_1+x_3^2=0\end{array}\ \ (x_1=1+x_3^2)$$

$$\longrightarrow \text{(BO)}\ \min 4(1+x_3^2)^2+5x_2^2=F(x_2,x_3)$$

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{\partial F}{\partial x_2}=10x_2=0\\[2ex] \dfrac{\partial F}{\partial x_3}=16x_3(1+x_3^2)=0\end{array}\right\}\Rightarrow\ \begin{array}{l}x_2=0\\ x_3=0\end{array}$$

$$\nabla^2 F(x_2,x_3)=\begin{bmatrix}10 & 0\\ 0 & 16(1+x_3^2)+16x_3\cdot 2x_3\end{bmatrix},\ \ \nabla^2 F(0,0)=\begin{bmatrix}10 & 0\\ 0 & 16\end{bmatrix}$$

$D_1=10>0,\ D_2=160>0\Rightarrow$

$(0,0)$ strogi lokalni min (BO) $\Rightarrow (1,0,0)$ strogi lokalni min (KLP) $\Rightarrow (1,0)$ strogi lokalni min (NLP) (kasnije ćemo videti da je to globalni minimum).

4.2. KUN-TAKEROVA TEOREMA, NAJVAŽNIJI REZULTAT U NLP

Problem:

$$\text{(NLP)} \qquad \begin{aligned} &\min f(x) \\ &g_i(x) \le 0, i = 1,\ldots,m \end{aligned}$$

Pretpostavka: funkcije $f, g_1,\ldots,g_m$ su diferencijabilne.

Ako su funkcije *f*, $g_1,\ldots,g_m$ konveksne (NLP) se naziva *problem konveksnog programiranja.* Problem konveksnog programiranja ima važno svojstvo da je svaki lokalni minimum istovremeno globalni minimum.

Kun-Takerova teorema daje neophodne uslove za lokalni minimum problema (NLP).

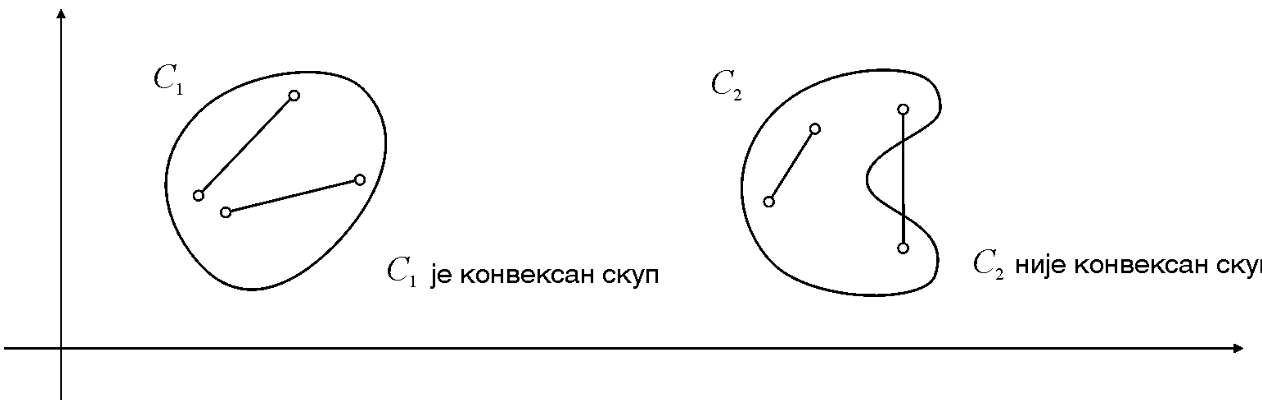
Ukoliko se radi o problemu konveksnog programiranja ti uslovi su i dovoljni.

Kun-Takerova teorema važi pod odredjenim uslovima regularnosti.

Pre iskaza teoreme navode se ključni pojmovi vezani za konveksnost i regularnost.

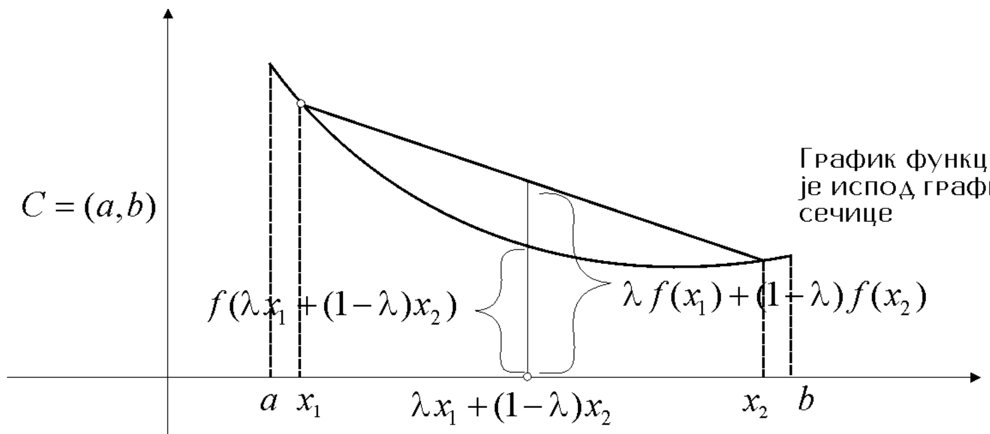
Konveksnost.

Konveksan skup: $\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2 \in C \quad \forall\, x_1, x_2 \in C$ i $\forall\, \lambda \in [0,1]$
"sa svake dve tačke sadrži duž koja ih spaja"



Konveksnost skupova

Konveksna funkcija:
$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \le \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2) \quad \forall\, x_1, x_2 \in C$ i $\forall\, \lambda \in [0,1]$.
"grafik se nalazi ispod sečice"



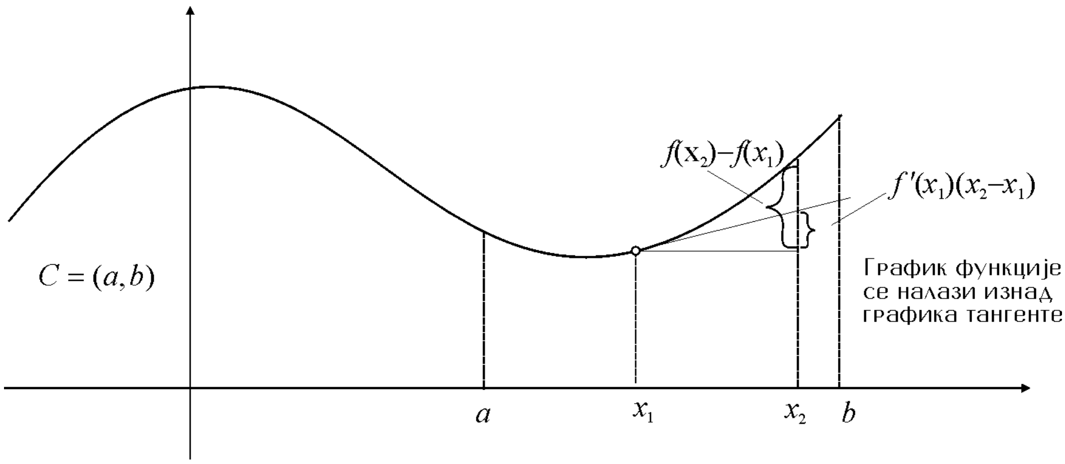
Konveksnost funkcije

Strogo konveksna funkcija:
$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) < \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2), \forall\, x_1, x_2 \in C,\ x_1 \ne x_2$ i $\forall$ $\lambda \in (0,1)$.

Konkavna funkcija: g konkavna $\Leftrightarrow$ $-g$ konveksna

Ako je f diferencijabilna funkcija "grafik se nalazi ispod sečice" $\Leftrightarrow$ "grafik se nalazi iznad tangente". To kaže sledeća teorema:

Teorema 1. f je konveksna $\Leftrightarrow$
$\nabla f(x_1)^T(x_2 - x_1) \leq f(x_2) - f(x_1), \forall x_1, x_2 \in C$



Konveksnost diferencijabilne funkcije na (a,b)

Kako proveriti konveksnost funkcije?

Ako je funkcija dvaput diferencijabilna to je najlakše učiniti preko matrice drugih izvoda na sledeći način:

1) Naći glavne minore matrice $\nabla^2 f(x)$. Ako su svi pozitivni na $C \Rightarrow f$ je strogo konveksna na *C*.
2) Ako je su svi glavni minori nenegativni a bar jedan je jednak nuli treba naći sve minore simetrične u odnosu na glavnu dijagonalu. Ako su svi simetrični minori nenegativni na $C \Rightarrow f$ je konveksna na *C*.

Navedena metodologija se zasniva na sledeće dve teoreme.

Teorema 2. Matrica $\nabla^2 f(x)$ je pozitivno definitna na $C \Rightarrow f$ je strogo konveksna na C.

Teorema 3. Matrica $\nabla^2 f(x)$ je pozitivno semidefinitna na $C \Rightarrow f$ je konveksna na C.

Napomena 1: Prema Silvestrovom kriterijumu pozitivna definitnost je ekvivalentna sa pozitivnošću glavnih minora. Važi i generalizacija Silvestrovog kriterijuma po kojoj je *pozitivna semidefinitnost* ($y^T \nabla^2 f(x) y \geq 0 \ \forall y$) ekvivalentna nenegativnosti svih simetričnih minora. Ova generalizacija nije od velike praktične važnosti jer je za veće dimenzije broj simetričnih minora ogroman i provera je neizvodljiva.

Primer 1.

$$f(x) = e^{x_1 + x_2},$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = e^{x_1+x_2}, \ \frac{\partial f}{\partial x_2} = e^{x_1+x_2}, \ \nabla^2 f(x) = \begin{bmatrix} e^{x_1+x_2} & e^{x_1+x_2} \\ e^{x_1+x_2} & e^{x_1+x_2} \end{bmatrix}$$

Simetrični minora reda 1: $\Delta_1 -$ presek vrste 1, kolone 1

$\Delta_2 -$ presek vrste 2, kolone 2

reda 2: $\Delta_3 = \det \nabla^2 f(x)$

$\Delta_1 = \Delta_2 = e^{x_1+x_2} > 0,\ \Delta_3 = 0 \Rightarrow \nabla^2 f(x)$ pozitivno semidefinitna $\Rightarrow f$ konveksna na R^2.

Primer 2. Linearne funkcije su konveksne, pa problem linearnog programiranja spada u klasu problema konveksnog programiranja.

Primer 3. Proveriti da se u primerima 1. u 3.1, 1. u 3.2 i 1. u 4.1 radi o problemima konveksnog programiranja

Regularnost

Najpoznatija su sledeća dva uslova regularnosti:

R1 (Sleterov uslov). Važi ako su u (NLP) funkcije ograničenja $g_1, ..., g_m$ konveksne i postoji $\hat{x}$ tako da je $g_i(\hat{x}) < 0,\ i = 1, ..., m$.

R2 . Važi u tački $\hat{x}$ ako su $\nabla g_i(\hat{x}),\ i \in I(\hat{x})$ linearno nezavisni, gde je $I(\hat{x}) = \{i \mid g_i(\hat{x}) = 0\}$ skup indeksa aktivnih ograničenja u $\hat{x}$.

Napomena 1: Uslov R1 važi ili ne za problem u celini. Uslov R2 može u nekim tačkama važiti, a u nekim ne.

Primer 4. a)

$$\min x_1$$
$$x_1^2 + x_2^2 \le 1$$

Funkcija ograničenja je konveksna (zašto?). R1 važi (npr. $\hat{x} = (0,0)$). R2 važi u svakoj dopustivoj tački.

b)

$$\min x_1$$
$$x_1^2 + x_2^2 \le 0$$

Jedina dopustiva tačka $x^* = (0,0)$, i u njoj je ograničenje aktivno. Ne važe ni R1 ni R2.

Napomena 2: Vektori $a_1, ..., a_n$ su linearno nezavisni ako važi implikacija

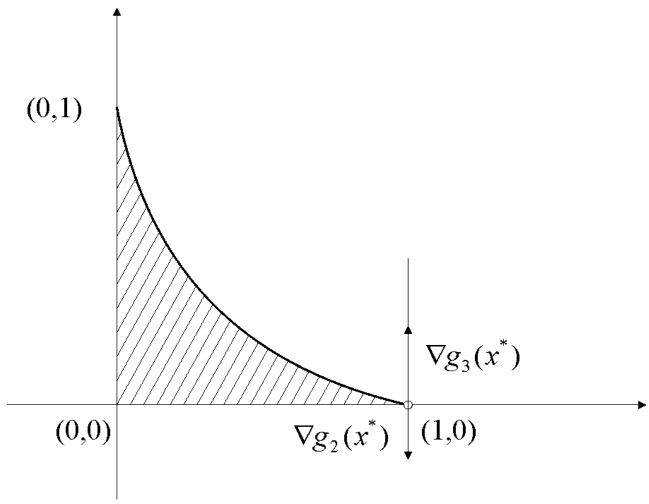
$$\lambda_1 a_1 + ... + \lambda_n a_n = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 0, ..., \lambda_n = 0$$

U slučaju $n = 1$ implikacija se svodi na $\lambda_1 a_1 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 0$, odakle sledi da nula vektor narušava uslov linearne nezavisnosti (iz $\lambda_1 0 = 0$ ne sledi $\lambda_1 = 0$). U prethodnom primeru je $\nabla g_1(x^*) = \begin{bmatrix} 2x_1 \\ 2x_2 \end{bmatrix}_{x=x^*} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, pa je uslov R2 u jedinoj dopustivoj tački narušen

Primer 5. Razmotrimo problem

$$\min -x_1$$
$$x_1 \geq 0$$
$$x_2 \geq 0$$
$$x_2 - (x_1 - 1)^2 \leq 0.$$

Dopustivi skup je prikazan na slici.



R2 ne važi u $(1,0)$

Grafičkom metodom dolazimo do zaključka da je optimalno rešenje $x^* = (1,0)$. Ograničenja problema su $g_1(x) = -x_1 \leq 0,\ g_2(x) = -x_2 \leq 0,\ g_3(x) = x_2 - (x_1 - 1)^2 \leq 0$. S obzirom da funkcija g_3 nije konveksna ($-g_3$ jeste) ima smisla govoriti samo o uslovu regularnosti R2. Imamo da je

$$\nabla g_1(x) = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix},\ \ \nabla g_2(x) = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix},\ \ \nabla g_3(x) = \begin{bmatrix} -2(x_1 - 1) \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Proverimo linearnu nezavisnost gradijenta aktivnih ograničenja u $x^*,\ x_a = (0,0),\ x_b = (0,1)$.

1. U tački x_a je $I(x_a)=\{1,2\}$,

$$\nabla g_1(x_a)=\begin{bmatrix}-1\\0\end{bmatrix}, \nabla g_2(x_a)=\begin{bmatrix}0\\-1\end{bmatrix}.$$

Kako se radi o linearno nezavisnim vektorima u x_a važi uslov R2

2. U tački x_b je $I(x_b)=\{1,3\}$,

$$\nabla g_1(x_b)=\begin{bmatrix}-1\\0\end{bmatrix}, \nabla g_3(x_b)=\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}$$

i opet se radi o linearno nezavisnim vektorima, tj. u x_b važi uslov R2

3. U tački x^* je $I(x^*)=\{2,3\}$,

$$\nabla g_2(x^*)=\begin{bmatrix}0\\-1\end{bmatrix}, \nabla g_3(x^*)=\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$$

i radi se o dva linearno zavisna vektora, tj. u x^* ne važi uslov R2.

Kun-Takerova teorema (Neophodni uslovi optimalnosti; Kuhn, Tucker, 1951). Poznata i kao Karuš-Kun-Takerova teorema.
Neka je x^* lokalni minimum problema (NLP) i neka važi R1 ili u x^* važi R2. Tada postoji $\lambda^* \in R^m$ tako da važi:

(i) $\nabla f(x^*) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^* \nabla g_i(x^*) = 0$

(ii) $\lambda_i^* g_i(x^*) = 0, \quad i = 1,...,m$

(iii) $\lambda^* \geq 0$

(iv) $g_i(x^*) \leq 0, \quad i = 1,...,m.$

Zaključak: Ako važi R1 ili u svim dopustivim tačkama važi R2 tada se svi kandidati za lokalni minimum nalaze medju rešenjima sistema:

(i) $\nabla f(x) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \nabla g_i(x) = 0$

(ii) $\lambda_i g_i(x) = 0, \quad i = 1,...,m$

(iii) $\lambda \geq 0$

(iv) $g_i(x) \leq 0, \quad i = 1,...,m.$

Napomena 3: λ^* se naziva vektor *Lagranžovih množilaca.*

Primer 6. Naći sve kandidate za lokalni minimum problema

$$\min e^{x_1+x_2}$$
$$x_1^2+x_2^2 \le 1.$$

Ovde je $g(x)=x_1^2+x_2^2-1$ i uslov R1 važi na osnovu Primera 4 a) (za svako dopustivo x važi i uslov R2; interesantno je uočiti da sada u tački (0,0) nije aktivno ni jedno ograničenje, pa je uslov linearne nezavisnosti trivijalno ispunjen- uporediti sa primerom 4 b)). Imamo da je

$$\nabla f(x)=\begin{bmatrix} e^{x_1+x_2} \\ e^{x_1+x_2} \end{bmatrix}, \quad \nabla g(x)=\begin{bmatrix} 2x_1 \\ 2x_2 \end{bmatrix},$$

i Kun-Takerovi uslovi se svode na

(i) $\begin{bmatrix} e^{x_1+x_2} \\ e^{x_1+x_2} \end{bmatrix}+\lambda\begin{bmatrix} 2x_1 \\ 2x_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

(ii) $\lambda(x_1^2+x_2^2-1)=0$

(iii) $\lambda \ge 0$

(iv) $x_1^2+x_2^2-1 \le 0$.

Vektorska jednačina (i) ekvivalentna je skalarnim jednačinama

$$e^{x_1+x_2}+2\lambda x_1=0$$
$$e^{x_1+x_2}+2\lambda x_2=0$$

odakle sledi $\lambda \neq 0$ i $x_1 = x_2$. Sledi i da je $x_1 < 0,\ x_2 < 0$ jer je zbog (iii) $\lambda > 0$. Zbog (ii) iz $\lambda \neq 0$ sledi $x_1^2 + x_2^2 - 1 = 0$, tj. $2x_1^2 = 1$, pa je $x_1 = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, $x_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\lambda = \frac{e^{-\sqrt{2}}}{\sqrt{2}}$. Jedini kandidat za lokalni minimum je $x^* = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

Sledeća dva primera ilustruju činjenicu da Kun-Takerova teorema ne mora važiti ako su uslovi R1 i R2 narušeni.

Primer 7. Razmotrimo problem

$$\begin{aligned} &\min x_1 \\ &x_1^2 + x_2^2 \leq 0. \end{aligned}$$

Ovde je $\nabla f(x) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \nabla g(x) = \begin{bmatrix} 2x_1 \\ 2x_2 \end{bmatrix}$. Na osnovu Primera 4 b) uslovi R1 i R2 ne važe.

Kun-Takerov uslov (i) u tački x^* se svodi na

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \lambda^* \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

a takvo λ^* ne postoji.

Primer 8. Razmotrimo ponovo problem iz Primera 5. U optimalnoj tački $x^* = (1,0)$ ne važi R2. Kako je

$$\nabla f(x^*) = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \nabla g_1(x^*) = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \nabla g_2(x^*) = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix},$$

$$\nabla g_3(x^*) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad g_1(x^*) = -1, \quad g_2(x^*) = 0, \quad g_3(x^*) = 0,$$

Kun-Takerovi uslovi (i) i (ii) glase

$$\text{(i)} \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} + \lambda_1^* \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} + \lambda_2^* \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} + \lambda_3^* \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{(ii)} \quad \lambda_1^*(-1) = 0$$

$$\lambda_2^* \cdot 0 = 0$$

$$\lambda_3^* \cdot 0 = 0$$

Iz (ii) je $\lambda_1^* = 0$, pa se (i) svodi na sistem od dve jednačine

$$-1 = 0$$

$$-\lambda_2^* + \lambda_3^* = 0$$

koji nema rešenja.

Ukoliko su sva ograničenja u (NLP) linearna mogu se izostaviti uslovi regularnosti:

Teorema (neophodni uslovi u slučaju linearnih ograničenja). Neka je u (NLP) $g_i(x) = a_i^T x - b_i$, $i=1,...,m$. Neka je x^* lokalni minimum. Tada postoji $\lambda^* \in R^m$ tako da važi (i)-(iv).

U konveksnom slučaju uslovi (i)-(iv) su istovremeno i dovoljni za optimalnost.

Teorema (dovoljni uslovi u konveksnom slučaju). Neka su funkcije $f, g_1, ..., g_m$ konveksne. Ako u tački (x^*, λ^*) važe uslovi (i)-(iv) tada je x^* globalni minimum problema (NLP).

Dokaz: Imamo:

$$f(x) - f(x^*) \geq \text{ (zbog konveksnosti funkcije } f \text{)}$$

$$\geq \nabla f(x^*)^T (x - x^*) = \text{ (zbog (i))}$$

$$= (-\sum_{i=1}^{m} \lambda_i^* \nabla g_i(x^*))^T (x - x^*) =$$

$$= \sum_{i=1}^{m} (-\lambda_i^*) \nabla g_i(x^*)^T (x - x^*) \geq \text{ (zbog (iii) i konveksnosti funkcija } g_i \text{)}$$

$$\geq \sum_{i=1}^{m} (-\lambda_i^*)(g_i(x) - g_i(x^*)) = \text{ (zbog (ii))}$$

$$= \sum_{i=1}^{m} (-\lambda_i^*) g_i(x) \geq 0 \text{ (zbog (iii) i } g_i(x) \leq 0 \text{)}$$

Primer 9. Razmotrimo ponovo Primer 6. Na osnovu Primera 1 funkcija cilja $f(x) = e^{x_1 + x_2}$ je konveksna. Konveksna je i funkcija ograničenja $g(x) = x_1^2 + x_2^2 - 1$. Tačka $x^* = (-1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2})$ zadovoljava uslove (i)-(iv) $\Rightarrow x^*$ je globalni minimum.

U slučaju da je dopustivi skup problema (NLP) zadat nejednačinama $g_i(x) \leq 0, i = 1, ..., m$ i jednačinama $h_i(x) = 0, i = 1, ..., r$ važi sledeća varijanta Kun-Takerove teoreme:

Kun-Takerova teorema (Neophodni uslovi optimalnosti za problem zadat nejednačinama i jednačinama)
Neka je x^* lokalni minimum problema (NLP) i neka su vektori $\nabla g_i(x^*), i \in I(x^*), \nabla h_i(x^*), i = 1,...,r$ linearno nezavisni.
Tada postoje $\lambda^* \in R^m, \psi^* \in R^r$ tako da važi:

(i) $\nabla f(x^*) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^* \nabla g_i(x^*) + \sum_{i=1}^{r} \psi_i^* \nabla h_i(x^*) = 0$

(ii) $\lambda_i^* g_i(x^*) = 0, \quad i = 1,...,m$

(iii) $\lambda^* \geq 0$

(iv) $g_i(x^*) \leq 0, \quad i = 1,...,m, h_i(x^*) = 0, i = 1,...,r$

Napomena 4: Lagranžovi množioci koji odgovaraju jednačinama nisu ograničeni po znaku. Uslov $\psi_i^* h_i(x^*) = 0, \quad i = 1,...,r$ je trivijalno ispunjen.

4.3. PRIMENA KUN-TAKEROVE TEOREME NA LP

Neka je dat problem linearnog programiranja (P) i njegov dual (D):

$$\begin{array}{llll} & \min c^T x & & \max b^T y \\ (P) & Ax \geq b & (D) & A^T y \leq c \\ & x \geq 0 & & y \geq 0 \end{array}$$

Neka su X i Y dopustivi skupovi problema (P) i (D).

Teorema (slaba dualnost). Neka $x_0 \in X,\ y_0 \in Y$. Tada je $c^T x_0 \geq b^T y_0$

Dokaz: Svodimo nejednačine na jednačine pomoću izravnavajućih promenljivih:
$Ax_0 - z_0 = b, z_0 \geq 0$, $A^T y_0 + w_0 = c, w_0 \geq 0$. Dalje imamo:

$c^T x_0 = (A^T y_0 + w_0)^T x_0 = y_0^T Ax_0 + w_0^T x_0 \geq y_0^T Ax_0$ (jer je $w_0^T x_0 \geq 0$)

$b^T y_0 = (A\ x_0 - z_0)^T y_0 = x_0^T A^T y_0 - z_0^T y_0 \leq x_0^T A^T y_0$ (jer je $z_0^T y_0 \geq 0$)

Kako je $y_0^T Ax_0 = x_0^T A^T y_0$ sledi zaključak.

Posledica: Ako je za neko x^*, y^* ispunjeno $x^* \in X, y^* \in Y$ i $b^T y^* = c^T x^*$ $\Rightarrow$
x^* je optimalno rešenje (P), y^* je optimalno rešenje (D).

Dokaz: Neka je $x \in X$ proizvoljno. Važi $c^T x \geq b^T y^* = c^T x^* \Rightarrow$ x^* je optimalno rešenje (P).

Neka je sada $y \in Y$ proizvoljno. Važi $b^T y \leq c^T x^* = b^T y^* \Rightarrow$ y^* je optimalno rešenje (D).

Neke algebarske činjenice potrebne u daljem izlaganju.

1. U vektorskim formulama se podrazumeva da je x=($x_1,\ldots,x_n$) vektor kolona, tj.

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

2.

$$c^T x = \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 & \cdots & c_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = c_1 x_1 + \cdots + c_n x_n$$

3. Ako je

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{m1} & \cdots & a_{mm} \end{bmatrix}$$

i ako obeležimo sa $a_1,...,a_m$ vektore vrsta matrice A,tj.

$$a_1 = \begin{bmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{1n} \end{bmatrix},...,a_m = \begin{bmatrix} a_{m1} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix}$$ matrica A se može napisati u obliku

$$A = \begin{bmatrix} a_1^T \\ \vdots \\ a_m^T \end{bmatrix}$$

4.

$$Ax = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}x_1 & +\cdots+ & a_{1n}x_n \\ \vdots & & \\ a_{m1}x_1 & +\cdots+ & a_{mn}x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1^T x \\ \vdots \\ a_m^T x \end{bmatrix}$$

5.

$$A^T = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{m1} \\ \vdots & & \\ a_{1n} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 & \cdots & a_m \end{bmatrix}$$

6.

$$A^T \lambda = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{m1} \\ \vdots & & \\ a_{1n} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_m \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} a_{11}\lambda_1 & +\cdots+ & a_{m1}\lambda_m \\ \vdots & & \\ a_{1n}\lambda_1 & +\cdots+ & a_{mn}\lambda_m \end{bmatrix} = \lambda_1 a_1 + \cdots + \lambda_m a_m$$

Primer 1.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, \quad a_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad a_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}, \quad Ax = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 + 2x_2 \\ 3x_1 + 4x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1^T x \\ a_2^T x \end{bmatrix},$$

$$A^T \lambda = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{bmatrix} = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2$$

Ekvivalentan zapis (P):

$$\begin{array}{lcl}
\min c^T x & & \min c^T x & & \min c^T x \\
Ax \geq b & \Leftrightarrow & a_i^T x \geq b_i, i=1,\dots,m & \Leftrightarrow & g_i(x) = b_i - a_i^T x \leq 0, i=1,\dots,m \\
x \geq 0 & & x_i \geq 0, i=1,\dots,n & & h_i(x) = -x_i \leq 0, i=1,\dots,n
\end{array}$$

Tražimo gradijente funkcija cilja i ograničenja:

$f(x) = c^T x \;\Rightarrow\; \nabla f(x) = c$

$g_i(x) = b_i - a_i^T x \;\Rightarrow$

$h_i(x) = -x_i \;\Rightarrow\; \nabla h_i(x) = -e_i$ (koordinatni vektor, i-ta koordinata 1, ostale 0)

Neka je x^* optimalno rešenje (P). Tada na osnovu Kun-Takerove teoreme postoje λ^*, α^* tako da je

(i) $c + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^* (-a_i) + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^* (-e_i) = 0$

(ii) $\lambda_i^* (b_i - a_i^T x^*) = 0, \quad i = 1,\dots,m$

$\alpha_i^* (-x_i^*) = \alpha_i^* (-e_i^T x^*) = 0, \quad i = 1,\dots,n$

(iii) $\lambda^* \geq 0, \quad \alpha^* \geq 0$

(iv) $x^* \in X$.

Pokazaćemo: Lagranžovi množioci $\lambda_1^*,\dots,\lambda_m^*$ su koordinate optimalnog rešenja duala (D).

a) Dopustivost:

$$\text{(i)} \Rightarrow c = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^* a_i + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^* e_i \Leftrightarrow \text{(jer je } \alpha_i^* e_i \geq 0 \text{ zbog (iii))}$$

$$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^* a_i \leq c \Leftrightarrow \text{(zbog činjenice 6.)}$$

$$\Leftrightarrow A^T \lambda^* \leq c \,.$$

Kako je uz to $\lambda^* \geq 0$ radi se o dopustivom rešenju problema (D).

b) Optimalnost:

$$c^T x^* = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^* a_i^T x^* + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^* e_i^T x^* = \text{ (zbog (ii))}$$

$$= \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^* b_i = b^T \lambda^*$$

Na osnovu Posledice $\Rightarrow$ λ^* je optimalno rešenje (D).

Time smo dokazali sledeću teoremu

Teorema (jaka teorema dualnosti). Ako (P) ima optimalno rešenje x^* $\Rightarrow$ (D) ima optimalno rešenje λ^* i važi $c^T x^* = b^T \lambda^*$

.

Napomena 1: Za par (P)-(D) postoje 4 mogućnosti:

1) (P) i (D) imaju optimalna rešenja
2) Funkcija $c^T x$ neograničena odozdo na X, $Y=\varnothing$
3) Funkcija $b^T y$ neograničena odozgo na Y, $X=\varnothing$
4) $X=\varnothing$, $Y=\varnothing$

4.4. METODE KAZNENIH FUNKCIJA

Ideja: Dat je problem

$$\text{(NLP)} \qquad \begin{array}{l} \min f(x) \\ g_i(x) \le 0,\ i = 1,\dots,m \end{array}$$

Ako se uvede beskonačna kazna za napuštanje dopustivog skupa X:

$$q(x) = \begin{cases} 0 & x \in X \\ +\infty & x \not\in X \end{cases}$$

problem (NLP) se može zameniti problemom bezuslovne optimizacije

$$\text{(BO)} \qquad \begin{array}{l} \min F(x) = f(x) + q(x) \\ x \in R^n \end{array}$$

S obzirom da se ne može računati sa ∞, $q(x)$ se aproksimira nizom kaznenih funkcija.

Spoljašnje kaznene funkcije: aproksimacija spolja

Unutrašnje kaznene funkcije: aproksimacija iznutra.

Napomena 1: Metoda kaznenih funkcija zamenjuje (NLP) nizom problema bezuslovne optimizacije. 1984. ovaj pristup primenjen je na LP. Rezultujuće metode (Interior Point Methods) su na primerima velikih dimenzija efikasnije od simpleks metode: simpleks metoda ima eksponencijalnu složenost, unutrašnje metode imaju polinomijalnu složenost.

a) Metoda spljašnjih kaznenih funkcija

Niz funkcija $q_k : R^n \to R,\ k = 1,2,...$ je *niz spoljašnjih kaznenih funkcija* za problem (NLP) ako za svako k važi

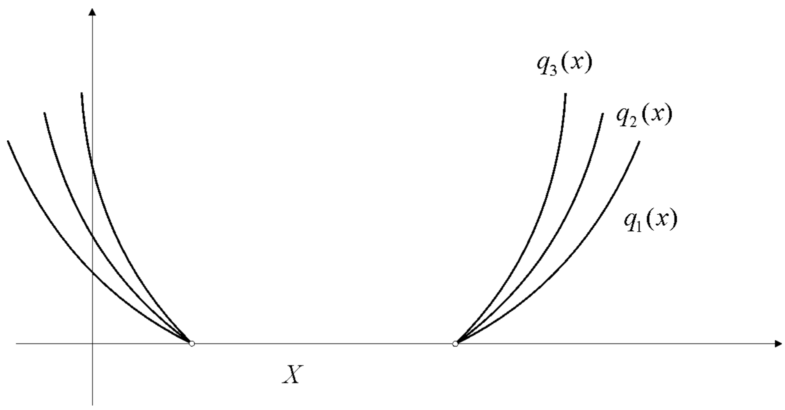
(i) $q_k(x) = 0,\ x \in X$

(ii) $q_k(x) > 0,\ x \notin X$

(iii) $q_{k+1}(x) > q_k(x),\ x \notin X$

(iv) $q_k(x) \to \infty,\ k \to \infty,\ x \notin X$

Geometrijska interpretacija niza spoljašnjih kaznenih funkcija $\{q_k(x)\}$ data je na slici:



Niz spoljašnjih kaznenih funkcija

Problemu (NLP) se pridružuje niz problema

$$(\mathrm{BO}_k)\qquad \begin{aligned} &\min F_k(x) = f(x) + q_k(x) \\ &x \in R^n \end{aligned}$$

Neka je sa x^k označeno rešenje problema (BO_k).
Pod odgovarajućim pretpostavkama se može pokazati da $x^k \to x^*,\ k \to \infty$, gde je x^* rešenje (NLP)

Napomena 2. Ako za neko k važi $x^k \in X$ tada je x^k rešenje problema (NLP), tj. $x^* = x^k$.

Sledi sledeći metodološki postupak: .

Algoritam 1 (Metoda spoljašnjih kaznenih funkcija).

Korak 0: Izabrati niz $\{q_k\}$

Korak 1: $k = 1$.

Korak 2: Rešiti (BO$_k$). Označiti rešenje sa x^k.

Korak 3: Ako $x^k \in X$ STOP ($x^* = x^k$).

U suprotnom, $k = k + 1$, ići na Korak 2

Izbor niza spoljašnjih kaznenih funkcija.

Najčešće: $q_k(x) = t_k \sum_{i=1}^{m} \max\{0, g_i(x)\}^2$
gde je $\{t_k\}$ monotono rastući niz, $t_k \to \infty$, $k \to \infty$.

Ako u (NLP) učestvuju i jednačine $h_i(x) = 0, i = 1,...,r$ može se uzeti

$$q_k(x) = t_k(\sum_{i=1}^{m} \max\{0, g_i(x)\}^2 + \sum_{i=1}^{r} (h_i(x))^2)$$

Primer 1. Dat je problem

$$\min x^2 - 6x$$
$$x \le 2.$$

Lako se može videti da je rešenje $x^* = 2$. Potražimo to rešenje metodom spoljašnjih kaznenih funkcija. Neka je $q_k(x) = t_k \max\{0, x-2\}^2$, i neka $t_k \to +\infty$, $k \to \infty$. Tada je

$$F_k(x) = x^2 - 6x + t_k \max\{0, x-2\}^2.$$

Potražimo x^k kao rešenje problema bezuslovne minimizacije funkcije $F_k(x)$. Problem ćemo rešiti analitički. Razlikujemo dva slučaja:

1. $\max\{0, x-2\} = 0$, tj. $x - 2 \le 0$. Tada je

$$F_k(x) = x^2 - 6x,\ F_k'(x) = 2x - 6 = 0,$$

odakle je $x = 3$, što odbacujemo jer ne zadovoljava uslov $x \le 2$.

2. $\max\{0, x-2\} = x - 2$, tj. $x - 2 \ge 0$. Tada je

$$F_k(x) = x^2 - 6x + t_k(x-2)^2,\ F_k'(x) = 2x - 6 + +2t_k(x-2) = 0,$$

odakle je $x = \dfrac{4t_k + 6}{2t_k + 2}$. Kako ovo rešenje zadovoljava uslov $x \ge 2$, usvajamo ga, odnosno $x^k = \dfrac{4t_k + 6}{2t_k + 2}$.

S obzirom da je $\lim\limits_{k\to\infty} t_k = \infty$ imamo $\lim\limits_{k\to\infty} x^k = \lim\limits_{k\to\infty} \dfrac{4 + \frac{6}{t_k}}{2 + \frac{2}{t_k}} = 2$.

b) Metoda unutrašnjih kaznenih funkcija

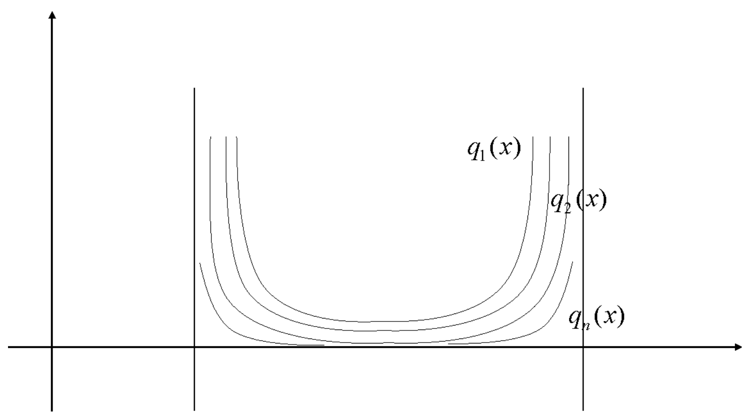
Neka je sa $\overset{O}{X}$ označena unutrašnjost dopustivog skupa X (oko svake tačke u $\overset{O}{X}$ postoji sferna okolina koja je čitava sadržana u $\overset{O}{X}$), a sa ∂X njegova granica $(\partial X = X \setminus \overset{O}{X})$. Niz funkcija $q_k(x) : \overset{O}{X} \to R,\ k = 1, 2, ...$ je *niz unutrašnjih kaznenih funkcija* za problem (NLP) ako važi

(i) $|\, q_{k+1}(x) \,| < |\, q_k(x) \,|,\ x \in \overset{O}{X}$

(ii) $q_k(x) \to 0,\ k \to \infty,\ x \in \overset{O}{X}$

(iii) $q_k(x_j) \to \infty,\ j \to \infty,$ za svaki niz $\{x_j\} \subset \overset{O}{X}$ takav da $x_j \to \hat{x} \in \partial X,\ j \to \infty$.

Geometrijska interpretacija niza unutrašnjih kaznenih funkcija $\{q_k\}$ data je na slici.



Niz unutrašnjih kaznenih funkcija

Problemu (NLP) se pridružuje niz problema

$$(\mathrm{P}_k) \quad \begin{array}{l} \min F_k(x) = f(x) + q_k(x) \\ x \in \overset{O}{X} \end{array}$$

Neka je sa x^k označeno rešenje problema (P_k). Pod odgovarajućim pretpostavkama se opet može pokazati da $x^k \to x^*$, $k \to \infty$, gde je x^* rešenje (NLP)

Napomena 3: (P_k) se može rešavati približnim metodama bezuslovne optimizacije jer se izlazak iz dopustivog skupa sprečava "barijerom"- kaznena funkcija raste pri približavanju granici.

Sledi sledeći metodološki postupak:

Algoritam 2 (Metoda unutrašnjih kaznenih funkcija).

Korak 0: Izabrati niz $\{q_k(x)\}$.

Korak 1: $k = 1$

Korak 2: Rešiti (P_k) i sa x^k označiti rešenje.

Korak 3: $k = k + 1$, ići na Korak 2.

Izbor niza unutrašnjih kaznenih funkcija. Najčešće:

$$q_k(x) = -\frac{1}{t_k}\sum_{i=1}^{m}\ln(-g_i(x))$$

gde je $\{t_k\}$ monotono rastući niz, $t_k \to \infty$, $k \to \infty$. Ako u definiciji (NLP) učestvuju i jednačine metoda unutrašnjih kaznenih funkcija nije primenljiva osim u slučaju kada se radi o linearnim jednačinama (na primer, u slučaju (LP)).

Primer 2. Razmotrimo zadatak iz Primera 1:

$$\min x^2 - 6x$$
$$x \leq 2.$$

Uzmimo sada $q_k(x) = -\dfrac{1}{t_k}\ln(2-x)$. Biće

$F_k(x) = x^2 - 6x - \dfrac{1}{t_k}\ln(2-x),\ \overset{O}{X} = (-\infty, 2)$. Ponovo zadatak rešavamo analitičkim putem:

$$F_k'(x) = 2x - 6 + \frac{1}{t_k(2-x)} = 0.$$

Odavde sledi kvadratna jednačina

$$2t_k x^2 - 10t_k x + 12t_k - 1 = 0$$

odakle je

$$x_{1,2} = \frac{10t_k \pm \sqrt{4t_k^2 + 8t_k}}{4t_k} = \frac{10 \pm \sqrt{4 + 8/t_k}}{4}.$$

S obzirom da je $x_1 > 2,\ x_1 \notin \overset{O}{X}$ pa ga odbacujemo i imamo $x^k = x_2$, tj.

$$x^k = \frac{10 - \sqrt{4 + \dfrac{8}{t_k}}}{4} \to 2,\ k \to \infty.$$

5. PRIBLIŽNE METODE ZA NELINEARNO PROGRAMIRANJE

5.1. BEZUSLOVNA OPTIMIZACIJA

Problem:

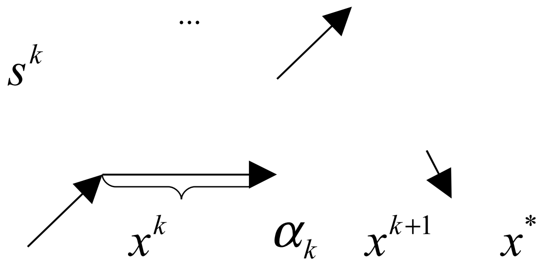
$$\text{(BO)} \qquad \begin{array}{l} \min f(x) \\ x \in R^n \end{array}$$

Tipična svojstva metoda:

* Generišu niz $\{x^k\}$ po formuli

$$x^{k+1} = x^k + \alpha_k s^k, \quad k = 0,1,...$$

gde je $\{s^k\}$ niz pravaca, a $\{\alpha_k\}$ niz koraka:



* Svaka tačka nagomilavanja x^* niza $\{x^k\}$ zadovoljava $\nabla f(x^*) = 0$. Ako je f konveksna funkcija tada je x^* rešenje problema.

a) Metoda koordinatnog pretraživanja (Hooke-Jeeves)

Pravci pretraživanja: koordinatni pravci $\pm e_1,...,\pm e_n$

Ideja: Koračaj istim korakom duž koordinatnih pravaca dok ima napretka. Zatim smanji korak.

Algoritam 1 (Hooke-Jeeves).

Korak 0: Izabrati $x^0 \in R^n$, $\alpha_0 > 0$, $\varepsilon > 0$. Staviti $k = 0$.

Korak 1: Ispitati da li postoji $s^k \in \{\pm e_1, ..., \pm e_n\}$ tako da je $f(x^k + \alpha_k s^k) < f(x^k)$.

Ako postoji ići na Korak 2. U suprotnom ići na Korak 3.

Korak 2: $x^{k+1} = x^k + \alpha_k s^k$, $\alpha_{k+1} = \alpha_k$, $k = k+1$ i ići na Korak 1.

Korak 3: $\alpha_k = \alpha_k / 2$ i ići na Korak 1.

Kriterijum zaustavljanja: STOP ako je $\alpha_k < \varepsilon$.

Primer 1. $f(x) = x^2$, $\alpha_0 = 2.5$, $x^0 = 1$, $\pm e_1 = \pm 1$

$k = 0$: $f(x^0 + \alpha_0 e_1) = f(1 + 2.5) = 3.5^2 > f(1)$

$f(x^0 - \alpha_0 e_1) = f(1 - 2.5) = (-1.5)^2 > f(1)$

$\alpha_0 = 1.25$

$f(1 + 1.25) = (2.25)^2 > f(1)$

$f(1 - 1.25) = (-0.25)^2 < f(1)$

$x^1 = -0.25$, $\alpha_1 = 1.25$, $k = 1$, itd.

Teorema 1. Ako je x^0 takvo da je skup $X = \{x \in R^n \mid f(x) \le f(x_0)\}$ ograničen i f je diferencijabilna na X_0 tada svaka tačka nagomilavanja x^* niza $\{x^k\}$ generisanog Algoritmom 1 zadovoljava uslov $\nabla f(x^*) = 0$.

b) Gradijentna metoda (Metoda najbržeg spusta, Košijeva metoda)

Ideja: funkcija najbrže opada u pravcu antigradijenta

$\frac{\partial f}{\partial s} = \nabla f^T s_0 = \| \nabla f \| \cos\varphi \Rightarrow$ minimalna vrednost $\frac{\partial f}{\partial s}$ dobija se za $\varphi = \pi \Rightarrow s^k = -\nabla f(x^k)$.

Algoritam 2 (Koši).

Korak 0: Izabrati $x^0 \in R^n$, $\varepsilon > 0$, $k = 0$.

Korak 1: Izračunati $s^k = -\nabla f(x^k)$

Korak 2: Naći α_k kao rešenje jednodimenzionog problema $\min\limits_{\alpha > 0} f(x^k + \alpha s^k)$

Korak 3: $x^{k+1} = x^k + \alpha_k s^k$, $k = k+1$, ići na Korak 1.

Kriterijum zaustavljanja: STOP ako je $\| \nabla f(x^k) \| < \varepsilon$.

Teorema 2. Neka je skup X_0 ograničen, f diferencijabilna na X_0. Tada svaka tačka nagomilavanja x^* niza $\{x^k\}$ generisanog Algoritmom 2 zadovoljava $\nabla f(x^k) = 0$.

Primer 2. Neka je $f(x) = 2x_1^2 + x_2^2 - 2x_1 x_2 + 12x_1 - 8x_2$.

Imamo da je $\nabla f(x) = (4x_1 - 2x_2 + 12,\ \ 2x_2 - 2x_1 - 8)$

(s obzirom da ovde $\nabla f(x)$ nećemo koristiti u matričnim formulama možemo ga zapisati kao n-torku).

$k = 0$:

$x^0 = (0,0),\ \nabla f(x^0) = (12,-8),\ s^0 = (-12,8),\ x^0 + \alpha s^0 = (-12\alpha, 8\alpha)$,

$f(x^0 + \alpha s^0) = 2(-12\alpha)^2 + (8\alpha)^2 - 2(-12\alpha)(8\alpha) + 12(-12\alpha) - 8(8\alpha)$

$= 544\alpha^2 - 208\alpha$,

α_0 je rešenje problema

$$\min_{\alpha \geq 0} \varphi(\alpha) = 544\alpha^2 - 208\alpha$$

Iz $\varphi'(\alpha) = 1088\alpha - 208 = 0$ sledi $\alpha_0 = 13/68$.

Sada je $x^1 = (0,0) + 13/68(-12,8) = (-2.29, 1.83)$.

Slično se nastavlja dalje računanje.

c) Njutnova metoda

Ideja:

$$f(x) \approx f(x^k) + \nabla f(x^k)^T (x - x^k) + \frac{1}{2}(x - x^k)^T \nabla^2 f(x^k)(x - x^k) = Q_k(x)$$

x^{k+1} – tačka minimuma funkcije $Q_k(x)$. Tražimo je iz uslova:

$$\nabla Q_k(x) = \nabla f(x^k) + \nabla^2 f(x^k)(x - x^k) = 0 \Rightarrow$$

$$\nabla^2 f(x^k)(x - x^k) = -\nabla f(x^k) \quad \Rightarrow x^{k+1} = x^k - (\nabla^2 f(x^k))^{-1} \nabla f(x^k) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow s^k = -(\nabla^2 f(x^k))^{-1} \nabla f(x^k)$$

Algoritam 3 (Njutn).

Korak 0: Izabrati $x^0 \in R^n$, $\varepsilon > 0$, $k = 0$.

Korak 1: Izračunati $s^k = -(\nabla^2 f(x^k))^{-1} \nabla f(x^k)$

Korak 2: Kao u Algoritmu 2.

Korak 3: Kao u Algoritmu 2.

Kriterijum zaustavljanja: Kao u Algoritmu 2.

Teorema 3. Neka je skup X_0 ograničen, f dvaput diferencijabilna na X_0, $\nabla^2 f(x)$ pozitivno definitna matrica na X_0. Neka je niz $\{x^k\}$ generisam Algoritmom 3. Tada $x^k \to x^*$, $k \to \infty$ (x^* jedinstveno rešenje (BO)).

Napomena 1: Ako je $f(x) = q_0 + c^T x + x^T Q x$ (Q pozitivno definitna matrica) tada Njutnova metoda nalazi minimum u jednom koraku.

Primer 3. Razmotrimo ponovo problem iz Primera 2. Imamo:

$$\nabla f(x) = (4x_1 - 2x_2 + 12,\ 2x_2 - 2x_1 - 8).$$

$$\nabla^2 f(x) = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix},\quad (\nabla^2 f(x))^{-1} = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1 \end{bmatrix}.$$

$k = 0:\ x^0 = (0,0),\ \nabla f(x^0) = (12,-8),$

$$s^0 = -\nabla^2 f(x_0)^{-1} \nabla f(x_0) = -\begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 12 \\ -8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \end{bmatrix},$$

$x^0 + \alpha s^0 = (-2\alpha, 2\alpha),$

$$f(x^0 + \alpha s^0) = 2(-2\alpha)^2 + (2\alpha)^2 - 2(-2\alpha)(2\alpha) + 12(-2\alpha) - 8(2\alpha) = \\ = 20\alpha^2 - 40\alpha,$$

α_0 je rešenje problema

$$\min_{\alpha \geq 0} \varphi(\alpha) = 20\alpha^2 - 40\alpha.$$

Iz $\varphi'(\alpha) = 40\alpha - 40 = 0$ sledi $\alpha_0 = 1$.

Sada je $x^1 = (0,0) + (-2,2) = (-2,2)$.

Kako je $\nabla f(x^1) = (0,0)$, optimalno rešenje je $x^* = x^1$.

5.2. USLOVNA OPTIMIZACIJA

Mnoštvo metoda:

- ograničenja linearne jednačine (metoda zamene)
- ograničenja linearne nejednačine
- funkcija cilja kvadratna, ograničenja linearna (kvadratno programiranje)
- ograničenja nelinearne jednačine i/ili nejednačine

Približna metoda kaznenih funkcija ima univerzalnu primenu, tj. može se primeniti na većinu navedenih problema.

Algoritam približne metode kaznenih funkcija.

Korak 0: Izabrati niz kaznenih parametara $\{t_k\}$ i niz spoljašnjih ili unutrašnjih kaznenih funkcija $\{q_k\}$, x^0, $\varepsilon > 0$, $k = 1$. (Ako je izabrana unutrašnja kaznena funkcija mora biti $x \in \overset{o}{X}$.)

Korak 1: Staviti $\varepsilon_k = 1/t_k$ (preciznost sa kojom se rešava *k*-ti problem)

Korak 2: Polazeći od x^{k-1} kao početne tačke naći približno rešenje x^k problema

$$\min F_k(x) = f(x) + q_k(x)$$

nekim od algoritama bezuslovne optimizacije sa kriterijumom zaustavljanja:

$$\text{STOP ako je } \|\nabla F_k(x^k)\| < \varepsilon_k.$$

Korak 3: $k = k + 1$, ići na Korak 1.

Kriterijum zaustavljanja: STOP ako je $\varepsilon_k < \varepsilon$.

Napomena 1. Problemi u Koraku 2 rešavaju se sa rastućom tačnošću nekim od algoritama bezuslovne minimizacije, koji je sa gledišta ovog algoritma "crna kutija". Rešenje prethodnog problema je početna tačka za sledeći problem.

6. KVADRATNO PROGRAMIRANJE

Problem:

$$\text{(QP)} \qquad \begin{aligned} &\min f(x) = \frac{1}{2} x^T Q x + c^T x \\ &Ax \le b, \;\; x \ge 0 \end{aligned}$$

1. Bez umanjenja opštosti može se pretpostaviti da je Q simetrična matrica jer se svaka kvadratna forma može izraziti preko simetrične matrice

$$(x_1^2 + 6x_1x_2 + 3x_2^2 = [x_1 \; x_2]\begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = [x_1 \; x_2]\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix})$$

2. $\nabla f(x) = Qx + c, \;\; \nabla^2 f(x) = Q$.

3. Ako je Q pozitivno definitna matrica (svi glavni minori su pozitivni) $\Rightarrow f(x)$ je strogo konveksna funkcija, pa je (QP) problem konveksnog programiranja i Kun-Takerovi uslovi su potrebni i dovoljni za globalni minimum.

4. Ako je Q pozitivno semidefinitna matrica (svi simetrični minori su nenegativni) $\Rightarrow f(x)$ je konveksna funkcija i važi isto kao pod 3.

5. Ako je Q negativno definitna (f je strogo konkavna) i dopustivi skup je ograničen tada se svi globalni (i lokalni) minimumi postižu u ekstremnim tačkama dopustivog skupa ("kišobran"). S obzirom da su kandidati za globalne minimume ekstremne tačke, dovoljno je pretražiti konačan skup ekstremnih tačaka i naći one sa najmanjom vrednošću funkcije cilja. Kod primera malih dimenzija to je jednostavnije nego rešavanje sistema jednačina i nejednačina koji proističu iz Kun-Takerovih uslova. Slično se može postupiti u slučaju da je Q negativno semidefinitna.

6. Ako Q nije definitna kandidati za lokalne minimume se traže preko Kun-Takerovih uslova, koji su potrebni ali ne i dovoljni za optimalnost.

6.1. PRIMENA KUN-TAKEROVIH USLOVA

Ekvivalentan zapis QP:

$$\min f(x) = \frac{1}{2}x^T Qx + c^T x$$
$$g_i(x) = a_i^T x - b_i \le 0, \quad i = 1,\dots,m$$
$$h_i(x) = -x_i \le 0, \quad i = 1,\dots,n.$$

Kun-Takerovi uslovi:

(i)

$$\nabla f(x) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \nabla g_i(x) + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \nabla h_i(x) = 0 \quad \Leftrightarrow Qx + c + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i a_i + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i(-e_i) = 0$$
$$\Leftrightarrow Qx + c + A^T\lambda - \alpha = 0$$

(ii)

$$\begin{matrix} \lambda_i g_i(x) = 0, \quad i = 1,\dots,m \\ \alpha_i h_i(x) = 0, \quad i = 1,\dots,n \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{matrix} \lambda_i(a_i^T x - b_i) = 0, \ i = 1,\dots,m \\ \alpha_i x_i = 0, \ i = 1,\dots,n \end{matrix}$$

(iii) $\lambda \ge 0, \ \alpha \ge 0$

(iv)

$$\begin{matrix} a_i^T x - b_i \le 0, \ i = 1,\dots,m \\ -x_i \le 0, \ i = 1,\dots,n \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{matrix} a_i^T x - b_i + y_i = 0, \ i = 1,\dots,m \\ x \ge 0, \ y \ge 0 \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{matrix} Ax + y = b \\ x \ge 0, \ y \ge 0 \end{matrix}$$

(ii) se može zapisati kao

$\lambda_i(a_i^T x - b_i) = \lambda_i(-y_i) = 0 \Leftrightarrow \lambda^T y = 0$ (jer je $\lambda_i \ge 0, \ y_i \ge 0, \ i = 1,\dots,m$)

$\alpha_i x_i = 0 \Leftrightarrow \alpha^T x = 0$ (jer je $\alpha_i \ge 0, \ x_i \ge 0, \ i = 1,\dots,n$)

Kun-Takerovi uslovi u izmenjenom redosledu:

$$Ax + y = b$$
$$-Qx - A^T\lambda + \alpha = c$$
$$\lambda^T y = 0, \quad \alpha^T x = 0$$
$$\lambda \ge 0, \ \alpha \ge 0, \ x \ge 0, \ y \ge 0$$

Nove oznake:

$$M=\begin{bmatrix} O & -A \\ A^T & Q \end{bmatrix},\ \ q=\begin{bmatrix} b \\ c \end{bmatrix},\ \ w=\begin{bmatrix} y \\ \alpha \end{bmatrix},\ \ z=\begin{bmatrix} \lambda \\ x \end{bmatrix}$$

Kun-Takerovi uslovi u novim oznakama:

$$\underset{w}{\begin{bmatrix} y \\ \alpha \end{bmatrix}}-\underset{M}{\begin{bmatrix} 0 & -A \\ A^T & Q \end{bmatrix}}\underset{z}{\begin{bmatrix} \lambda \\ x \end{bmatrix}}=\underset{q}{\begin{bmatrix} b \\ c \end{bmatrix}}$$

$$\begin{bmatrix} y^T & \alpha^T \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \lambda \\ x \end{bmatrix}=0 \ \ tj.\ y^T\lambda+\alpha^T x=0$$

$$y\geq 0,\ \alpha\geq 0,\ \lambda\geq 0,\ x\geq 0$$

Dobijen je tzv. linearni problem komplementarnosti

$$\text{(LCP)}\qquad \begin{aligned} w-Mz&=q \\ w^T z&=0 \\ w\geq 0,\ \ z&\geq 0. \end{aligned}$$

Rešenja (LCP) daju kandidate za lokalni minimum (QP). Ako je Q pozitivno definitna matrica, rešenje (LCP) daje globalno rešenje (QP).

6.2. REŠAVANJE PROBLEMA KOMPLEMENTARNOSTI

Pretpostavka: Q pozitivno definitna matrica

Ideja: Ako je $q\geq 0$ može se uzeti $w=q, z=0\Rightarrow$ rešenje (QP) je $x=0, (z=(\lambda,x)=(0,0))\Rightarrow x=0$

U suprotnom, uvodi se veštačka promenljiva $z_0\geq 0$:

$W - MZ - z_0 e = q$

Odgovarajuća matrica je:

$$\begin{array}{cccc} W & Z & z_0 & \\ \end{array}$$
$$\left[I \mid -M \mid -e \mid q \right]$$

I faza: Pivotiranjem u koloni z_0 postiže se $q \geq 0 \Rightarrow z_0$ ulazi u bazu, jedan w_i izlazi.

II faza: Uzastopno se pivotira dok se z_0 ponovo ne izbaci iz baze.

Pravilo izbora pivota: čuva se veza $w_i z_i = 0,\ i = 1,...,n$ (tzv. *komplementarnost*) i pozitivnost desne strane (kao u simpleks algoritmu).

Pravilo za očuvanje komplementarnosti:
a) ako iz baze izadje w_i u bazu ulazi z_i
b) ako iz baze izadje z_i u bazu ulazi w_i

Primer 1. Rešiti problem

$$\min \frac{1}{2}x_1^2 - x_1 x_2 + x_2^2 - x_1 - 2x_2$$
$$3x_1 + 2x_2 \leq 3$$
$$x_1 + 4x_2 \leq 4$$
$$x_1 \geq 0,\ \ x_2 \geq 0$$

komplementarnim algoritmom. Parametri pridruženog problema komplementarnosti dati su sa

$$M = \begin{bmatrix} O & -A \\ A^T & Q \end{bmatrix}, \quad Q = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix},$$

$$q = \begin{bmatrix} b \\ c \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}, \quad c = \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

Matrica Q je pozitivno definitna $(D_1 = 1,\ D_2 = 1)$

Matrica $[I \quad -M \quad -e \mid q]$ ovde glasi

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccccccccc} w_1 & w_2 & w_3 & w_4 & z_1 & z_2 & z_3 & z_4 & z_0 \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccc|cccc|c|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -3 & -1 & -1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & -4 & 1 & -2 & \boxed{-1} & -2 \end{array}\right] \end{array}$$

I faza: $\min\{3,4,-1,-2\} = -2 \Rightarrow$ pivot je u preseku četvrte vrste i kolone z_0. Posle pivotiranja se dobija nova matrica:

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccccccccc} w_1 & w_2 & w_3 & w_4 & z_1 & z_2 & z_3 & z_4 & z_0 \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccc|cccc|c|c} 1 & 0 & 0 & -1 & 2 & 4 & 2 & 4 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 2 & 4 & 0 & 6 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 3 & -2 & \boxed{3} & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & 4 & -1 & 2 & 1 & 2 \end{array}\right] \end{array}$$

U bazu je ušla kolona z_0, iz baze je izašla kolona w_4. Sledeća promenljiva koja postaje bazična je z_4.

II faza: • $\min\left\{\frac{5}{4}, \frac{6}{6}, \frac{1}{3}, \frac{2}{2}\right\} = \frac{1}{3} \Rightarrow$ pivot je u preseku vrste 3 i kolone z_4.

Posle pivotiranja dobija se matrica

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cccccccccc} w_1 & w_2 & w_3 & w_4 & z_1 & z_2 & z_3 & z_4 & z_0 & \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccc|cccc|c|c} 1 & 0 & -4/3 & 1/3 & 10/3 & 0 & \boxed{14/3} & 0 & 0 & 11/3 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 4 & -2 & 4 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1/3 & -1/3 & -1/3 & 1 & -2/3 & 1 & 0 & 1/3 \\ 0 & 0 & -2/3 & -1/3 & 8/3 & 2 & 1/3 & 0 & 1 & 4/3 \end{array}\right] \end{array}$$

U bazu je ušla kolona z_4, iz baze je izašla kolona w_3. Sledeća bazična promenljiva je z_3.

- $\min\left\{\frac{11/3}{14/3}, \frac{4}{4}, \frac{4/3}{1/3}\right\} = \frac{11}{14} \Rightarrow$ pivot je u preseku vrste 1 i kolone z_3. Posle pivotiranja dobija se matrica

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cccccccccc} w_1 & w_2 & w_3 & w_4 & z_1 & z_2 & z_3 & z_4 & z_0 & \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccc|cccc|c|c} 3/14 & 0 & -2/7 & 1/14 & 5/7 & 0 & 1 & 0 & 0 & 11/14 \\ -6/7 & 1 & -6/7 & 5/7 & 8/7 & -2 & 0 & 0 & 0 & 6/7 \\ 1/7 & 0 & 1/7 & -2/7 & 1/7 & 1 & 0 & 1 & 0 & 6/7 \\ -1/14 & 0 & -4/7 & -5/14 & \boxed{17/7} & 2 & 0 & 0 & 1 & 15/14 \end{array}\right] \end{array}$$

U bazu je ušla kolona z_3, iz baze je izašla kolona w_1. Sledeća bazična promenljiva je z_1.

- $\min\left\{\frac{11/14}{5/7}, \frac{6/7}{8/7}, \frac{6/7}{1/7}, \frac{15/14}{17/7}\right\} = \frac{15}{36} \Rightarrow$ pivot je u preseku vrste 4 i kolone z_1. Nova matrica je

$$
\begin{array}{cccccccccc}
w_1 & w_2 & w_3 & w_4 & z_1 & z_2 & z_3 & z_4 & z_0 & \\
\end{array}
$$

$$
\left[\begin{array}{cccc|cccc|c|c}
4/17 & 0 & -2/17 & 3/17 & 0 & -10/17 & 1 & 0 & -5/17 & 8/17 \\
-14/17 & 1 & -10/17 & 15/17 & 0 & -52/17 & 0 & 0 & -8/17 & 6/17 \\
5/34 & 0 & 3/17 & -8/34 & 0 & 15/17 & 0 & 1 & -1/17 & 27/34 \\
-1/34 & 0 & -4/17 & -5/34 & 1 & 14/17 & 0 & 0 & 7/17 & 15/34
\end{array}\right]
$$

U bazu je ušla kolona z_1, iz baze je izašla kolona z_0 i postupak se zaustavlja.

Optimalno rešenje problema komplementarnosti je $w = (0, 6/17, 0, 0)$, $z = (15/34, 0, 8/17, 27/34)$.

Optimalno rešenje polaznog problema je $x = (8/17, 27/34)$.

7. PRIMENA NELINEARNOG PROGRAMIRANJA NA LP

Primalni problem:

$$
\text{(P)} \qquad \begin{aligned} &\min c^T x \\ &Ax = b \\ &x \geq 0 \end{aligned}
$$

a) Simpleks metoda (Dantzig, 1947)

Ideja: Obilazi temena dopustivog skupa dok ne dodje do optimalnog . Broj temena T eksponencijalno raste sa dimenzijom problema:

$$
T \leq \binom{n}{m}, \quad A = [a_{ij}]_{m \times n}.
$$

Važi ocena: $\displaystyle \binom{n}{m} \leq \frac{n(n-1)\cdots(n-m+1)}{m(m-1)\cdots 1} \geq \left(\frac{n}{m}\right)^m$

Ako je, npr. $n = 1000,\ m = 500,\ \displaystyle \binom{n}{m} \geq \left(\frac{n}{m}\right)^m = 2^{500}$.

Naravno, simpleks ne obilazi sva temena, tako da se ova pesimistička prognoza ne mora ostvariti. Klee i Minty 1972 konstruišu klasu primera kod kojih simpleks mora da obidje sva temena, čime je pokazano da simpleks nije polinomijalan algoritam. Ipak, u praksi dobro radi.

b) Unutrašnje metode (Interior Point Methods, Karmarkar, 1984)

Ideja: Pažljiva primena metode unutrašnjih kaznenih funkcija na LP dovodi do polinomijalnih algoritama za LP (broj elementarnih računskih operacija potrebnih za rešavanje problema ograničen je stepenom funkcijom po dimenziji problema; stepene funkcije rastu mnogo sporije od eksponencijalnih!). Umesto po granici ide se kroz unutrašnjost dopustivog skupa.

Broj različitih unutrašnjih metoda veliki. Jednostavan primer- Gonzagina metoda.

Dualni problem:

$$\text{(D)}\qquad \begin{aligned} &\max b^T y \\ &A^T y \le c \\ &\overset{o}{Y} = \{y \in R^m \mid A^T y < c\} \neq \emptyset \end{aligned}$$

Logaritamska kazna za problem maksimizacije

$$q_k(y) = \frac{1}{t_k} \sum_{i=1}^{m} \ln(c_i - A_i^T y) = \alpha_k \sum_{i=1}^{m} \ln(c_i - A_i^T y)$$

gde $t_k \to \infty$, tj. $\alpha_k \to 0$, a sa A_i su označene kolone matrice A (tj. vrste matrice A^T).
Maksimizuje se nova funkcija cilja: $F_k(y) = b^T y + q_k(y)$.

Algoritam (Gonzaga, 1991)
Korak 0: Naći $y^0 \in \overset{o}{Y}$, $\alpha_0 > 0$, $k = 0$.
Korak 1: $\alpha_{k+1} = \left(1 - \dfrac{1}{41\sqrt{n}}\right)\alpha_k$

Korak 2: $y^{k+1} = y^k + [\nabla^2_{yy} F_{k+1}(y^k)]^{-1} \nabla_y F_{k+1}(y^k)$
(jedan korak Njutnove metode za maksimizaciju funkcije $F_{k+1}(y)$ polazeći iz y^k)

Korak 3: $k = k + 1$, ići na Korak 1.

Posle $O(n^{0.5} \times L)$ koraka dobija se približno rešenje y^k sa koga se može "skočiti" na tačno rešenje y^*. Ukupan broj računskih operacija za dobijanje y^* je manje ili jednako od $const \times n^{3.5} \times L$
(L je ukupna dužina ulaznih podataka A, b, c u bitovima).

Nove metode su efikasnije od simpleksa za probleme velikih dimenzija. Novi softveri: simpleks + unutrašnje metode

Poredjenja sa simpleksom:

			Simpleks		Unutrašnje metode	
Problem	*m*	*n*	br. iteracija	vreme (sec)	br. iteracija	vreme (sec)
1	5831	7689	16041	664	41	132
2	2030	4883	11578	1459	42	621
3	6507	13610	27257	2017	30	133
4	3352	16298	8938	309	44	69
5	8335	21200	104687	12417	41	418
6	43387	106908	19935	7430	56	632
7	18800	38540	95857	19889	64	3688

8. CELOBROJNO PROGRAMIRANJE

Problem:

$$
\text{(CP)} \qquad \begin{aligned} &\min c^T x \\ &Ax = b \\ &x \geq 0,\ x \in Z^n \end{aligned}
$$

gde su svi koeficijenti u A, c, b celobrojni.

Karakteristike:

1. Ne postoji kriterijum optimalnosti
2. Dopustivi skup konačan, potpuna pretraga nemoguća ako je problem većih dimenzija

Važan specijalni slučaj *binarno programiranje*:

$$
\begin{aligned} &\min c^T x \\ &Ax = b \\ &x \in \{0,1\}^n \end{aligned}
$$

Mešovito celobrojno programiranje: uslov celobrojnosti nametnut samo na neke od promenljivih.

Prva ideja: 1. zanemariti celobrojnost, 2. rešiti LP, 3. zaokružiti koordinate rešenja na najbliže cele brojeve. Može se dobiti nedopustivo rešenje, koje je na velikom odstojanju od optimalnog.

Primer 1:

$$\max\ x+y$$
$$2003x-2001y\le 0$$
$$-4004x+4002y\le 2001$$
$$x\ge 0,\ y\ge 0,\ x,y\in Z$$

Ako se izostavi uslov celobrojnosti i reši LP dobija se $x^{*}=(2001/2,\ 2003/2):\ (1000,1001)-$ nedopustivo rešenje.
Jedina celobrojna dopustiva tačka je (0,0), i ona predstavlja rešenje problema.

Druga ideja: Prevodjenje problema na NLP.

1. uslov $x\in Z$ zamenjuje se uslovom $\sin(\pi x)=0$
LP se na taj način prevodi na NLP, nekonveksan problem, mora se primeniti globalna optimizacija.

2. U slučaju binarnog programiranja uslov $x\in\{0,1\}$ zamenjuje se uslovom $x(x-1)=0$. Opet dobijamo nekonveksan NLP.

Treća ideja: *Problem ranca* ima oblik:

$$\max c_1x_1+\cdots+c_nx_n$$
$$a_1x_1+\cdots+a_nx_n=b$$
$$x_i\ge 0,\ x_i\in Z,\ i=1,..,n$$

Pokazuje se da se svaki problem (CP) može svesti na problem ranca postupkom zvanim *agregacija*. Dimenzije problema se uvećavaju.

Metode celobrojnog programiranja.

Nijedna od navedenih ideja nema praktični značaj. Metode celobrojnog programiranja se uglavnom zasnivaju na inteligentnoj pretrazi dopustivog skupa (za razliku od totalne pretrage, koja je nemoguća). Najvažnije klase metoda:

a) metode odsecanja
b) metode implicitne enumeracije
c) metode grananja i ograničavanja
d) metode grananja i odsecanja
e) heuristike (ne garantuju nalaženje optimalnog rešenja)

Celobrojni poliedri.

U nekim specijalnim slučajevima do rešenja problema celobrojnog programiranja se može doći metodama LP. Naime, ako je skup dopustivih rešenja tzv. *celobrojni poliedar* (sva njegova temena imaju celobrojne koordinate) tada se do optimalnog celobrojnog rešenja može doći simpleks metodom.

Primer 2. Može se dokazati da je skup dopustivih rešenja *transportnog problema*

$$\min \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = p_j, \; j = 1,...,n$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = q_i, \; i = 1,...,m$$

$$x_{ij} \geq 0, \; x_{ij} \in Z, \; i = 1,...,m, \; j = 1,...,n.$$

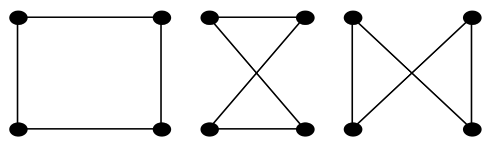
celobrojni poliedar, pa je ovaj problem rešiv simpleks metodom. Zahvaljujući specijalnoj strukturi problema za njega postoje posebno prilagodjene verzije simpleks metode.

Problem trgovačkog putnika

Neka je dato n koje treba da obiđe trgovački putnik tako da troškovi puta budu minimalni. Data je matrica $C=\left[c_{ij}\right]_{n\times n}$, gde c_{ij} označava trošak puta od grada i do grada j. Pretpostavićemo da je problem *zatvoren* (putnik mora da se vrati u grad iz koga je pošao) i *simetričan* (cena puta od grada i do grada j je ista u oba smera). Takođe ćemo pretpostaviti da su svaka dva grada povezana putem. Ovo je najpoznatija varijanta problema.

Problem trgovačkog putnika spada u klasu NP-teških problema i za njega nije poznat polinomijalni algoritam. Zatvoren put koji obilazi sve gradove zvaćemo *tura*. Broj različitih tura je (n-1)!/2 jer cena ne zavisi od smera obilaska.

Primer 3. n=4



Problem trgovačkog se može modelirati na razne načine.

Formulacija 1.

Neka je $x_{ij}=\begin{cases}1 & ako\ \ tura\ \ spaja\ \ grad\ \ i\ \ i\ \ grad\ \ j\\ 0 & inače\end{cases}$

S obzirom da je u ovoj interpretaciji $x_{ij}=x_{ji}$ dovoljno je raditi sa $n(n-1)/2$ promenljivih $x_{ij}, i<j$.

Celobrojni model M1:

$$\min \sum_{i=1}^{n} \sum_{j>i} c_{ij} x_{ij}$$

$$(1.1) \quad \sum_{j<i} x_{ji} + \sum_{j>i} x_{ij} = 2,\ i = 1,\dots,n$$

$$(1.2) \quad \sum_{i\in S} \sum_{j\in S} x_{ij} \le |S| - 1,\ S \subset X,\ S \ne \emptyset,\ S \ne X$$

$$i < j$$

$$x_{ij} \in \{0,1\},\ 1 \le i < j \le n$$

Ovde je $X = \{1,\dots,n\}$, $|S|$ označava kardinalnost skupa *S*.
Prva grupa ograničenja garantuje da tura izlazi i ulazi iz svakog grada. Druga grupa ograničenja sprečava da se tura raspadne na više disjunktnih pod-tura. Broj ovih ograničenja raste eksponencijalno sa dimenzijom problema. Obično se dodaju postepeno, samo ona koja su narušena.

Primer 4. $n = 6$.

Broj promenljivih $x_{ij}, i < j$: 15

Funkcija cilja: $c_{12}x_{12} + \dots + c_{56}x_{56}$.

Ograničenja (1.1):

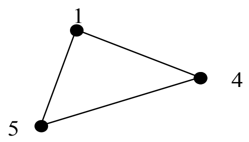
$$\begin{aligned}
x_{12} + x_{13} + x_{14} + x_{15} + x_{16} &= 2 \\
x_{12} + x_{23} + x_{24} + x_{25} + x_{26} &= 2 \\
x_{13} + x_{23} + x_{34} + x_{35} + x_{36} &= 2 \\
x_{14} + x_{24} + x_{34} + x_{45} + x_{46} &= 2 \\
x_{15} + x_{25} + x_{35} + x_{45} + x_{56} &= 2 \\
x_{16} + x_{26} + x_{36} + x_{46} + x_{56} &= 2
\end{aligned}$$

Ograničenja (1.2): Lako je videti da se u drugoj grupi bez umanjenja opštosti može pretpostaviti $|S| \ge 3$, $|S| \le |X| - 3$

U našem slučaju je dovoljno razmatrati tročlane podsupove skupa {1,...,6}, kojih ima 20. Npr. skupu $S = \{1,4,5\}$ odgovara ograničenje:

$x_{14} + x_{15} + x_{45} \leq 2$

koje sprečava pod-turu



LP relaksacija modela M1 dobija se kada se ograničenja $x_{ij} \in \{0,1\}$ zamene sa $0 \leq x_{ij} \leq 1$.

Metodološki postupak

1. Reši se LP relaksacija sa ograničenjima (1.1). Postepeno se dodaju ograničenja (1.2) dok se ne dobije tura.
2. Ako sve promenljive u optimalnom rešenju LP relaksacije imaju celobrojnu vrednost dobijena je optimalna tura. U suprotnom ide se na 3.

3. Primenjuju se tehnike grananja i ograničavanja (grananja i odsecanja) dok se ne dobije optimalna tura.

Formulacija 2.

Neka je $x_{ij} = \begin{cases} 1 & ako \;\; putnik \;\; ide \;\; iz \;\; grada \;\; i \;\; u \;\; grad \;\; j \\ 0 & inače \end{cases}$

U ovoj formulaciji x_{ij} i x_{ji} nemaju isto značenje. Podrazumava se da je $i \neq j$ pa je broj promenljivih $n(n$-1)

Celobrojni model M2:

$$\min \sum_{i=1}^{n} \sum_{j \neq i} c_{ij} x_{ij}$$

$$(2.1) \quad \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{n} x_{ij} = 1, \; j = 1, \ldots, n$$

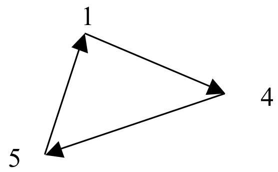
$$(2.2) \quad \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} x_{ij} = 1, \; i = 1, \ldots, n$$

$$(2.3) \quad u_i - u_j + n x_{ij} \leq n - 1, \; i \neq j, \; i, j = 2, \ldots, n$$

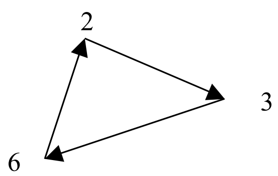
$$x_{ij} \in \{0, 1\}, \; i \neq j, \; i, j = 1, \ldots, n$$

$$u_j \geq 0, \; j = 1, \ldots, n$$

Uslovi (2.1) i (2.2) garantuju da putnik ulazi i izlazi iz svakog grada. Uslovi (2.3) sprečavaju pod-ture. Npr. ukoliko postoji pod-tura iz primera 4, orijentisana, na primer na način 1-4-5-1:



mora postojati i podtura koja ne sadrži grad 1. U ovom slučaju to je podtura koja spaja preostala tri grada, orijentisana, na primer na način 2-3-6-2:



Ovde je $x_{23} = 1, x_{36} = 1, x_{46} = 1$, što je nemoguće jer iz

$u_2 - u_3 + 6x_{23} \leq 5$
$u_3 - u_6 + 6x_{36} \leq 5$
$u_6 - u_2 + 6x_{62} \leq 5$

sledi $6(x_{23} + x_{36} + x_{62}) \leq 15$.

LP relaksacija modela M2 se kao i ranije dobija kada se ograničenja $x_{ij} \in \{0,1\}$ zamene sa $0 \leq x_{ij} \leq 1$.

LP relaksacija M2 lakša je za primenu na problemima malih dimenzija. Za primera velikih dimenzija koristi se LP relaksacija M1 jer daje bolju donju ocenu optimalne vrednosti funkcije cilja. Programski paketi za egzaktno rešavanje problema trgovačkog putnika zasnivaju se na LP relaksaciji M1 kombinovanoj sa metodama odsecanja i grananja. Najveći do sad egzaktno rešen problem ima oko 75000 gradova (ali postoje problemi od 3000 gradova koji nisu reseni). Postoje i vrlo efikasne heuristike.