Osnovni termini i vrste stabala

- **Stabla su nelinearne strukture podataka**
  - **Predstavljaju najvažnije nelinearne strukture koje se vrlo često koriste u računarstvu**
  - **Odnos između elemenata nije linearan**
  - **Imaju razgranatu ili hijerarhijsku strukturu elemenata**
  - **Njihov naziv implicira vezu sa stablima (drvećem) u prirodi ili porodičnim stablima**
  - **Većina terminologije potiče iz ovih izvora**

Definicije stabla

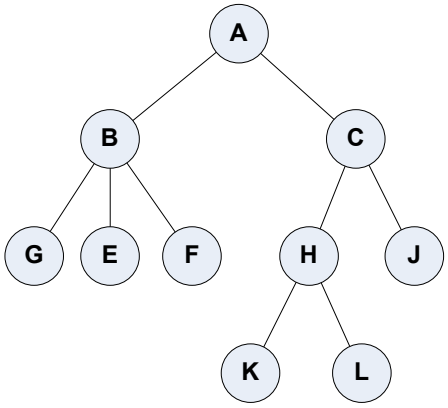
- **Definicija 1:**

  Struktura podataka B=(K,R); K-skup čvorova i
  R - binarna relacija prethođenja nad skupom K, predstavlja stablo ako R zadovoljava sledeće uslove:
  - Postoji samo jedan čvor r, koga nazivamo koren, kome ne prethodi ni jedan drugi čvor
  - Svaki čvor, izuzev korena, ima samo jednog prethodnika
  - Za svaki čvor k, k≠r, postoji niz čvorova
    $k_0 , k_1 , k_2 , \ldots k_n = k$ (n≥1 i=1,n) koji predstavljaju listu, tj.
    $(k_{i-1} , k_i) \in R$ i=1,n
- **Definicija 2:**
  - Stablo se može definisati kao poseban oblik nelinearnog grafa:
  - Linearni graf je skup čvorova i skup relacija (nazivaju se linije grafa) koji opisuju veze između čvorova. Linearni graf je povezan ako je svaki par čvorova u grafu povezan linijom.
  - Stablo se onda može definisati kao povezan graf koji ne sadrži petlje, odnosno ako važi:
  - Bilo koja dva čvora u stablu su povezana linijom
  - Stablo sa n čvorova ima n-1 linija
- **Definicija 3:**
  - Stablo se može rekurzivno definisati kao:

  Stablo sa korenom je konačan skup K od jednog ili više čvorova takvih da je:
  - Postoji jedan specijalni čvor koji se naziva koren stabla
  - Preostali čvorovi (isključujući koren) se mogu podeliti u m ≥ 0 skupova K_1, K_2, …K_m, čiji je presek prazvan skup, a koji svaki predstavlja stablo za sebe. Stabla K_1, K_2, …K_m se nazivaju podtsbla korena
  - Ova rekurzivna definicija je veoma pogodna za predstavljanje stabala u memoriji računara i obavljanje operacija nad stablima

Predstava stabla

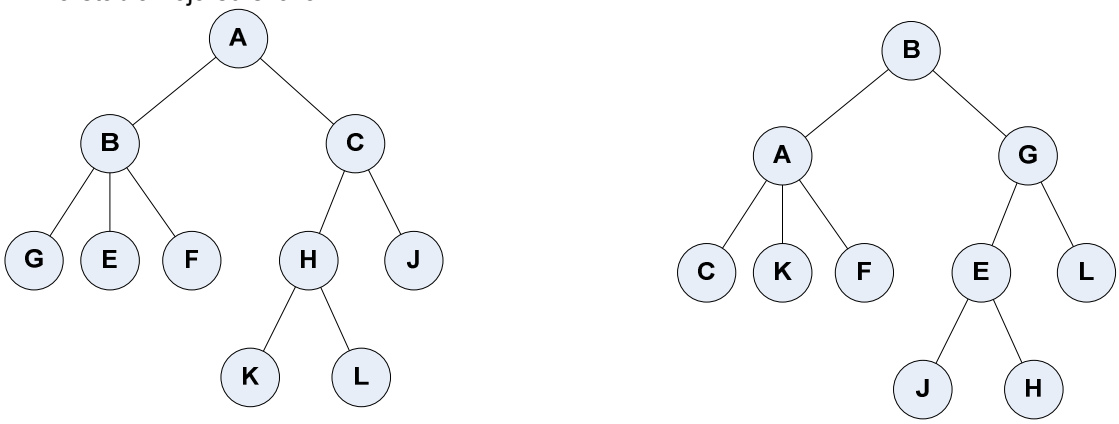
- Grafička predstava:



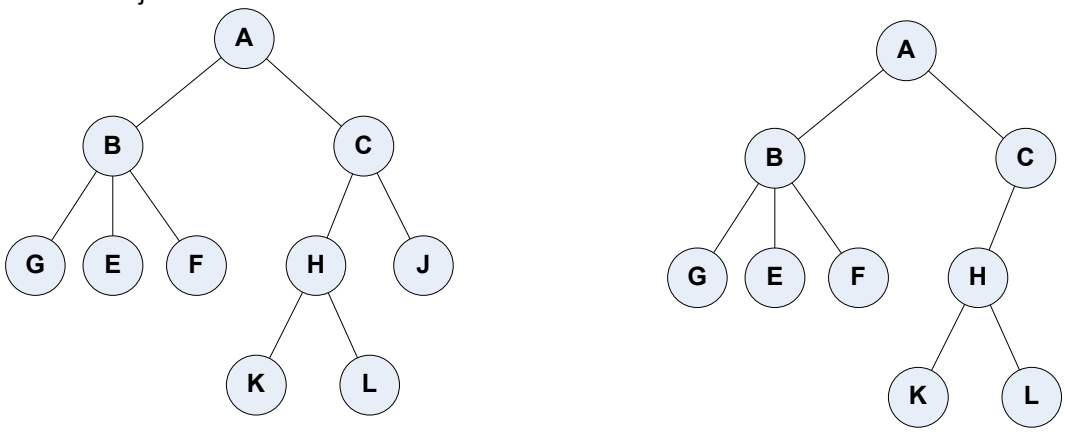
Slična i ekvivalenta stabla

- **Slična stabla**
  - Za dva stabla se kaže da su slična ako imaju istu strukturu, tj. tačnije ako su oba prazna ili su sva njihova podstabla slična
- **Ekvivalentna stabla**
  - Dva stabla su ekvivalentna ako su slična i imaju identičan informacioni sadržaj u odgovarajućim čvorovima

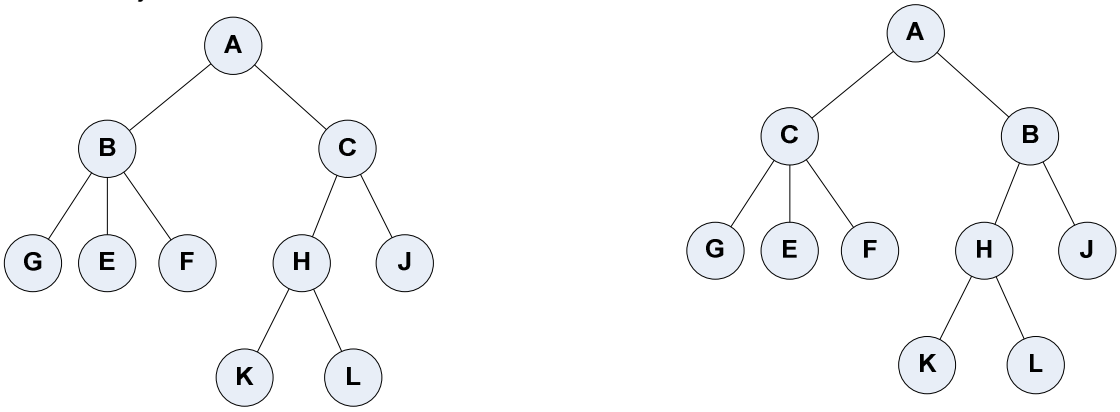
Dva stabla koja su slična



Dva stabla koja nisu slična

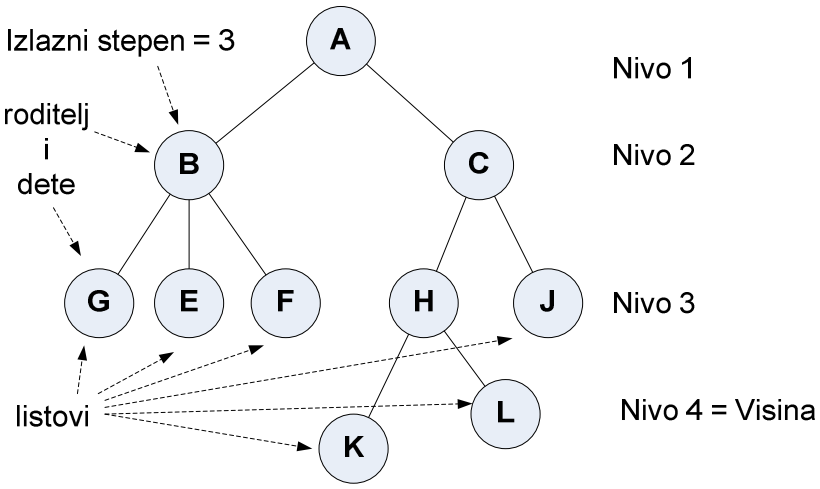


Dva stabla koja su slična, ali nisu ekvivalentna



Termini vezani za stabla

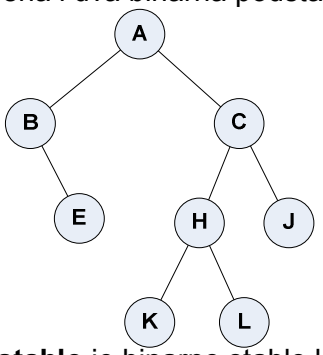
- Terminalni čvor ili list je čvor koji nema podstabla
- Čvor d je dete čvoru k ako je d koren podstabla od čvora k. Čvor k se naziva roditelj.
- Stepen čvora je broj podstabala datog čvora
- Šuma je skup stabala koja ne preklapaju
- Nivo čvora je 1 ako je koren ili jednak broju čvorova koji se prodju na putu od korena do datog čvora.
- Visina (ili dubina) stabla je maksimalni nivo na kome se nalazi neki čvor stabla



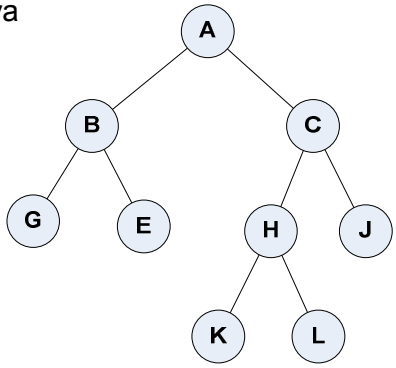
7.2 Binarna stabla i prolazi kroz stabla

Binarna stabla

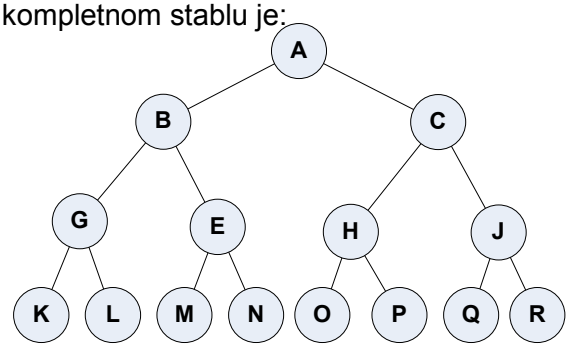
- **Binarno stablo** se rekurzivno definiše kao konačan skup elemenata koji je ili prazan ili se sastoji od korena i dva binarna podstabla koja se ne preklapaju (tzv. levo i desno podstablo).



- **Striktno binarno stablo** je binarno stablo kod koga svaki čvor ili nema nijedno podstablo ili ima tačno dva

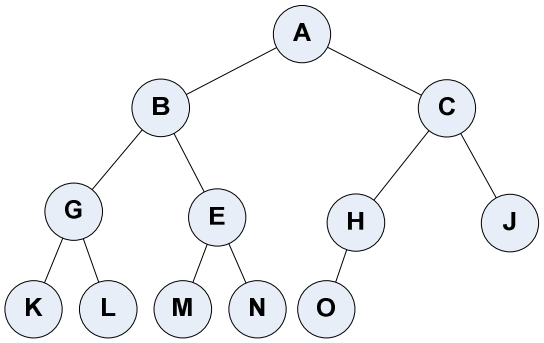


- **Kompletno binarno stablo** je striktno binarno stablo kod koga su svi listovi na istom nivou
- Broj čvorova u kompletnom stablu je:



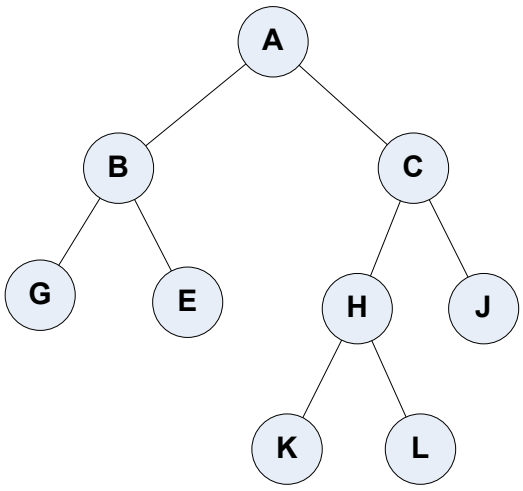
$n = 2^h-1$, gde je h visina stabla

- **Skoro kompletno binarno stablo** je binarno stablo za koga važi da su svi nivoi u stablu popunjeni, osim eventualno zadnjeg, i to tako da se popunjavanje vrši s leva u desno



Prolazi kroz stablo

- **Prolazi kroz stablo**
  - Način kako se mogu obići čvorovi datog stabla a da se pri tome posete tačno jednom
  - Postoji više načina kako se to može učiniti
- Tri su standardna načina
  - Prefiks prolaz
  - Infiks prolaz
  - Postfiks (sufiks) prolaz



- **Prefiks prolaz (K-L-D)**
- Prvo se poseti koren, zatim prefiks prolazom svi čvorovi levog podstabla, a zatim svi čvorovi desnog podstabla
  - A, B, G, E, C, H, K, L, J
- **Infiks prolaz (L-K-D)**

- Prvo se posete infiks prolazom svi čvorovi levog podstabla, zatim se poseti koren, a zatim svi čvorovi desnog podstabla

  – G, B, E, A, K, H, L, C, J

- **Postfiks prolaz (L-D-K)**
- Prvo se posete postfiks prolazom svi čvorovi levog podstabla, zatim svi čvorovi desnog podstabla, a zatim se poseti koren

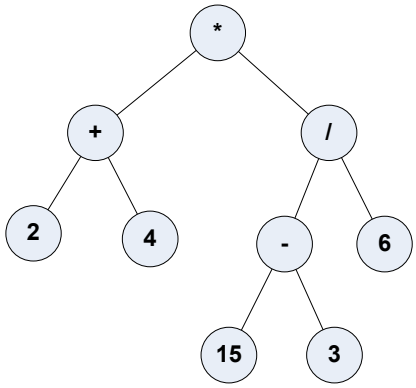
  – G, E, B, K, L, H, J, C, A

Predstavljanje izraza preko stabla

- **Matematički izrazi sa binarnim operatorima se mogu predstaviti preko striktnog binarnog stabla**
  – Listovi su operandi
  – Unutrašnji čvorovi su binarni operatori (operacije)

Notacije za zapisivanja izraza

- Korišćenjem pojedinih prolaza se dobijaju poznate notacije za predstavljanje izraza
- Prefiks prolaz: *, +, 2, 4, /, -, 15, 3, 6
  – Prefiks notacija
- Postfiks prolaz: 2, 4, +, 15, 3, -, 6, /, *
  – Postfiks (Inverzna poljska) notacija
- Infiks prolaz: 2,+,4, *, 15, -, 3, /, 6
  – Infiks notacija – uobičajena
  – Neophodne zagrade zbog prioriteta operatora (2+4)*(15-3)/6



Implementacija binarnih stabala

Definicija stabla kao ATP

- Binarno stablo se može definisati kao apstraktni tip na sledeći način:

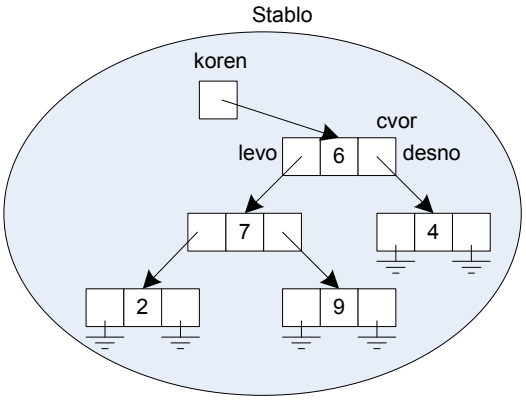
```
public interface binStablo {
    void ubaci(int a);
    void izbaci(int a);
    int visina();
    void prefiks();
    void postfiks();
    void infiks();
}
```

- Binarna stablo se mogu implementirati na dva načina:
  – Preko dinamički spregnute strukture

  - Preko niza
- Dinamička implementacija
  - Vrlo fleksibilna implementacija, lako dodavanje i izbacivanje
  - Nema ograničenja na broj čvorova i broj nivoa stabla
  - Moguća primena za sve slučajeve i oblike binarnih stabala
- Implementacija preko niza
  - Efikasna implementacija moguća samo za specijalni slučaj – skoro kompletno binarno stablo
  - Broj čvorova i nivo stabla ograničen dimenzijom niza

Dinamička implementacija

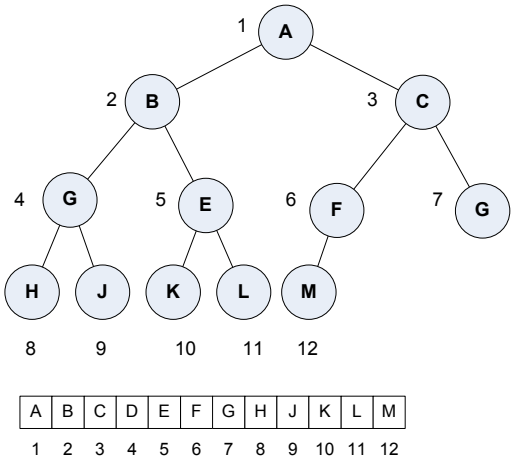
```
public class Stablo implements binStablo {

private class Cvor {
     Int info;
     Cvor levo;
     Cvor desno;

     void poseti() {..}
}
    private Cvor koren;

    int visina() {…}
    void prefiks() {…};
    void postfiks() {…};
    void infiks() {…};
}

public int visina() { return VisinaSt(koren); }

private int visinaSt(Cvor k) {
    if (k == null)
          return 0;
    else
          return  1+ max(visinaSt(k.levo), visinaSt(k.desno)
    }
}

public void prefiks() { return prefiksSt(koren); }

private void prefiksSt(Cvor k) {
    if (k == null)
          return;
    k.visit();
    prefiksSt (k.levo);
    prefiksSt (k.desno);
}

public int infiks() { return infiksSt(koren); }

private void infiksSt(Cvor k) {
```



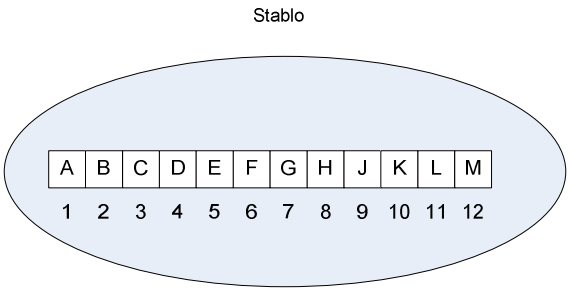
```
    if (k == null)
          return;
    infiks (k.levo);
    k.visit();
    infiks(k.desno);
}

public void postfiks() { return infiksSt(koren); }

private void postfiksSt(Cvor k) {
    if (k == null)
          return;
    postfiks (k.levo);
    posfiks(k.desno);
    k.visit();
}
```

Statička implementacija

- Efikasna implementacija preko niza moguća samo za skoro kompletno binarno stablo (SKBS)
- Kod SKBS je moguće numerisati čvorove da odgovaraju indeksima u nizu i to tako da za svaki čvor važi:
  - Indeks levog deteta = Indeks * 2
  - Indeks desnog deteta = Indeks * 2 + 1
  - Indeks roditelja = Indeks / 2




```
public class NizStablo implements binStablo {

private class Cvor {
     Int info;
     void poseti() {..}
}
    Cvor [] cvorovi;
     int n;

    int visina() {…}
    void prefiks() {…};
    void postfiks() {…};
    void infiks() {…};
}

public int visina() {
 return  floor (log(n)) + 1;  // n = 2^h-1
}

public void prefiks() {
    if (n > 0)
       return prefiksSt(0); // pocni prefiks prolaz od korena
}
```

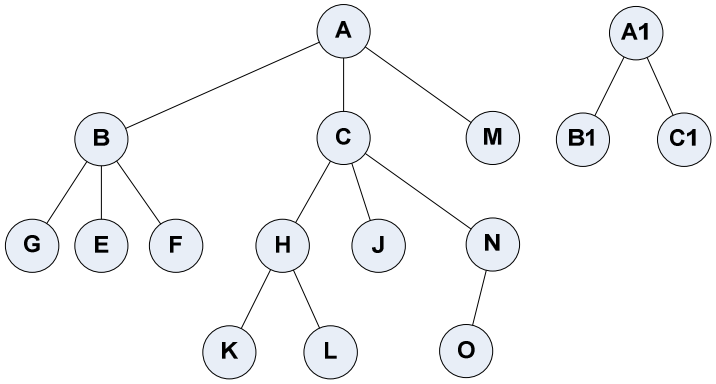


```
private void prefiksSt(int k) {
    if (k < 0 or k> n) return;
    cvorovi[k].visit();
    prefiksSt (k*2);  // prefiks levo
    prefiksSt (k*2+1); // prefiks desno
}
```

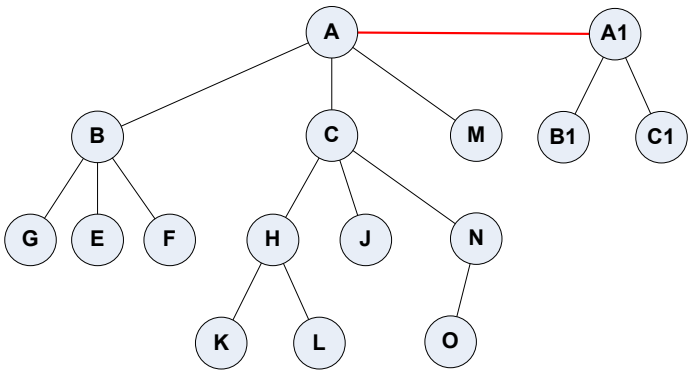
Transformacija višegranskih u binarna stabla

Knutova transformacija

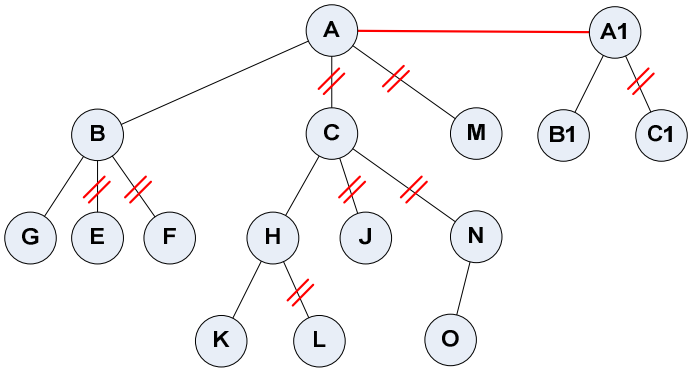
- Transformiše šumu stabala u jedno binarno stablo
- Koraci:
  1. Povežu se koreni svih stabala
  2. Prekinu se sve veze između roditelja i dece izuzev krajnje leve veze
  3. Povežu se sva deca istog roditelja
  4. Dobijena slika se rotira za 45 stepeni udesno
- Primer: šuma od 2 stabla



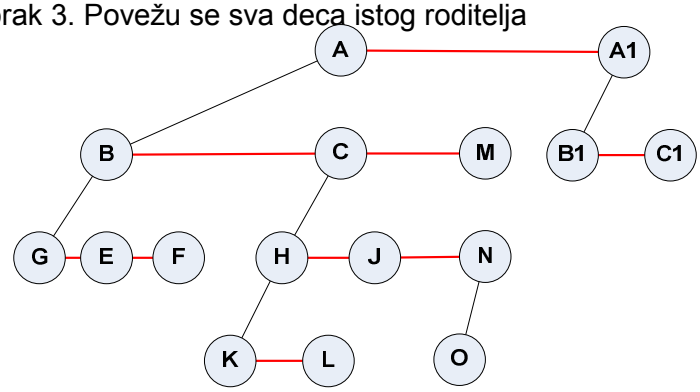
Korak 1. Povežu se koreni svih stabala



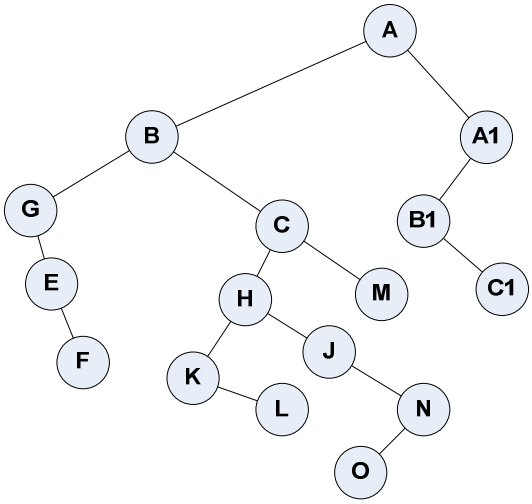
Korak 2. Prekinu se sve veze između roditelja i dece izuzev krajnje leve veze



Korak 3. Povežu se sva deca istog roditelja



- Konačni rezultat



- Rekonstrukcija stabla originalnog stabla
  - pokazivač nalevo je pokazivač na prvo dete
  - pokazivač na desno je pokazivač na brata

Transformacija u striktno binarno stablo

- **Transformiše bilo koje stablo u striktno binarno stablo**
- **Koraci:**
  1. Prekinu se sve veze između roditelja i dece izuzev krajnje leve veze
  2. Povežu se sva deca ista roditelja
  3. Dobijena slika se zarotira za 45st udesno

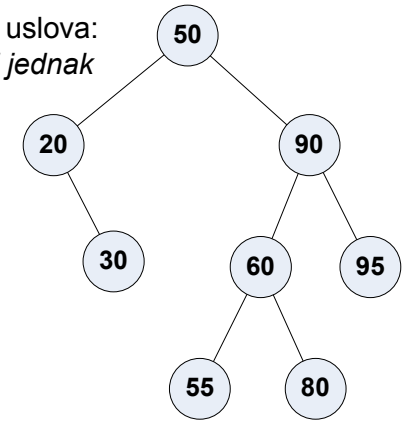
Stablo za binarno pretraživanje i AVL stablo

Stablo za binarno pretraživanje (BST)

- Kod običnog binarnog stabla pretraživanje se zasniva na nekom od prolaza i ima O(n) efikasnost.
- BST se zasniva se na ideji da se binarno stablo organizuje tako da omogući pretraživanje slično binarnom pretraživanju niza

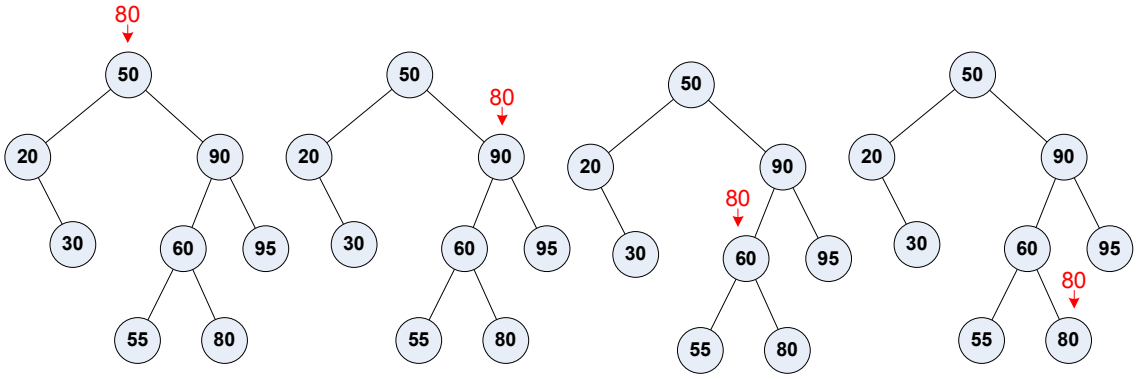
Definicija BST

- BST je binarno stablo kod koga za svaki čvor važe sledeća 2 uslova:
- *1. Svi čvorovi u levom podstablu imaju sadržaj koji je manji ili jednak sadžaju datog čvora*
- *2. Svi čvorovi u desnom podstablu imaju sadržaj koji je veći ili jednak sadžaju datog čvora*



Pretraživanje BST

- Postupak pretraživanja BST
  - Ako je sadžaj korena veći od traženog ključa onda se pretražuje levo podstablo rekurzivno
  - Ako je sadžaj korena manji od traženog ključa onda se pretražuje desno podstablo rekurzivno
  - Ako je jednak po sadržaju onda je koren traženi čvor



Rekurzivni algoritam za pretraživanje BST

```
public Cvor pretrazi (Cvor k, int v) {
    if (k == null)
          return null;
    if (k.info > v)
          return pretrazi(k.levo, v)
    if (k.info < v)
          return pretrazi(k.desno, v)
   else
      return k;
```

```
}
```

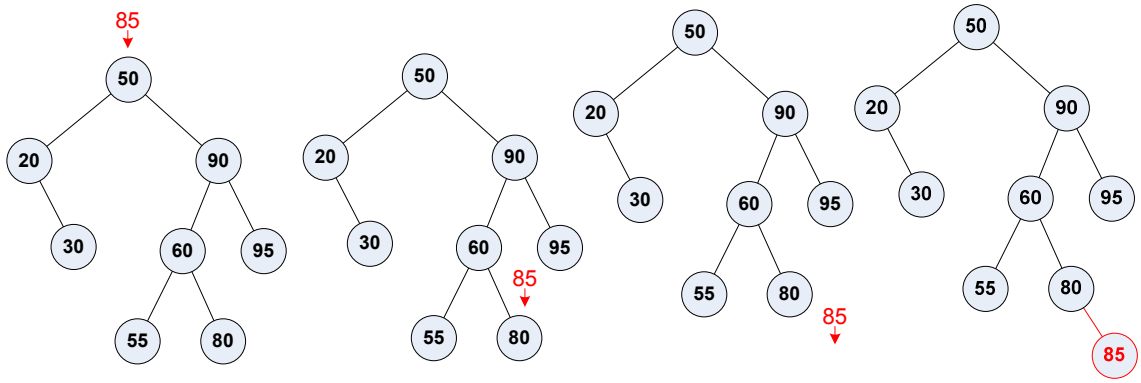
Iterativni algoritam za pretraživanje BST

- Iterativni algoritam za pretraživanje BST

```
public Cvor pretrazi (Cvor k, int v) {
   while(k != null) {
         if (k.info > v)
           k = k.levo;
         else if (k.info < v)
           k = k.desno;
         else if (k.info == v)
           return k;
   }
   return null;
}
```

Ubacivanje u BST

- Postupak ubacivanja u BST
  - Prvo se pretraži BST
  - Ubaci se novi čvor na mesto nula pokazivača gde se pretraživanje završilo

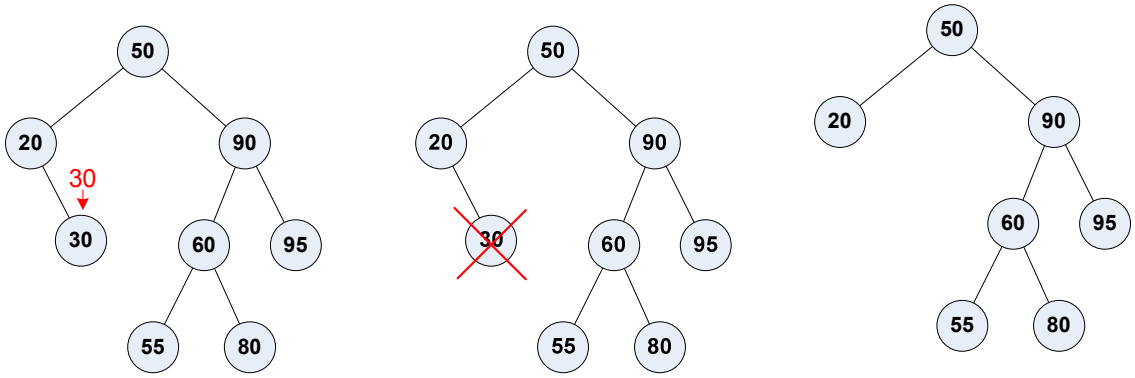


Izbacivanje u BST

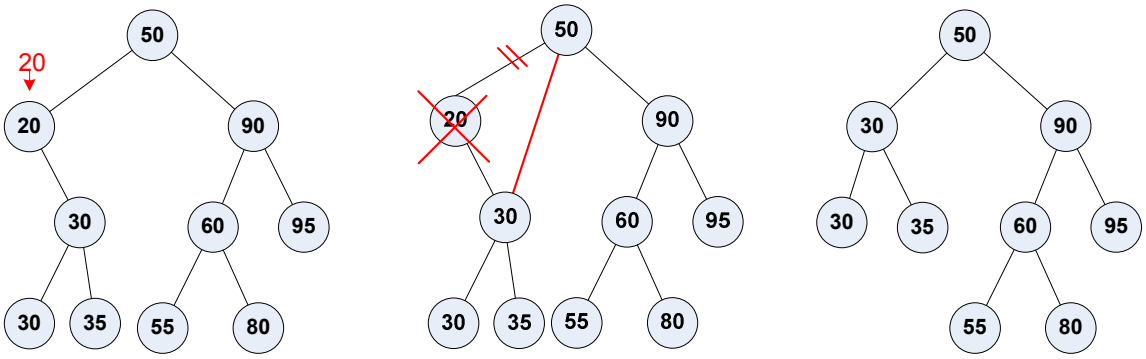
- Postupak izbacivanja u BST
  - Prvo se pretraži BST da bi se našao traženi čvor za izabacivanje
  - zatim se nadjeni čvor izbucuje na nači koji zavisi od njegove pozicije
  - Moguće su tri situacije gde se nalazi čvor:

•Čvor je list
•Čvor je polu-list (Ima samo jedno dete)
•Čvor je unutrašnji (Ima oba deteta)

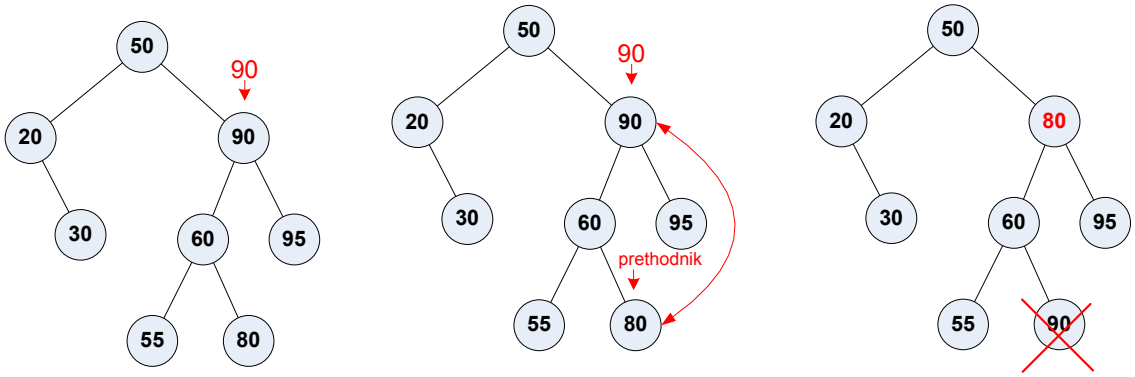
- Situacija 1: Čvor je **list**
  - prosto se izbaci čvor iz stabla i ažurira pokazivač njegovog roditelja da sadrži null vrednost
- Primer: izbaciti 30



- Situacija 2: Čvor je **polu-list**
  - izbaci čvor iz stabla, a pokazivač njegovog roditelja se ažurira da sadrži pokazivač na dete čvora koji se izbacuje
- Primer: izbaciti 20



- Situacija 3: Čvor je **unutrašnji**
  - Pronađe se njegov prvi sledbenik (ili prethodnik) koji mora biti na krajnjoj levoj (tj. desnoj) poziciji u desnom (tj. levom) podstablu. Sledbenik (tj. prethodnik) mora biti ili list ili polu-list
  - Zameni se sadržaj sledbenik (tj. prethodnik) sa sadržajem traženog čvora.
  - Izbacuje se čvor sa pozicije sledbenika (tj. prethodnika). Ovo se svodi na slučajeve 1. i 2. izbacivanja
- Primer: Izbaciti 90

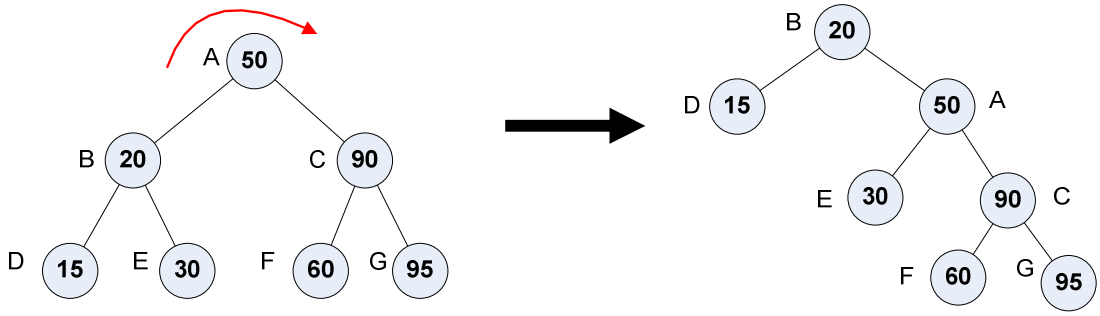


Efikasnost pretraživanja BST

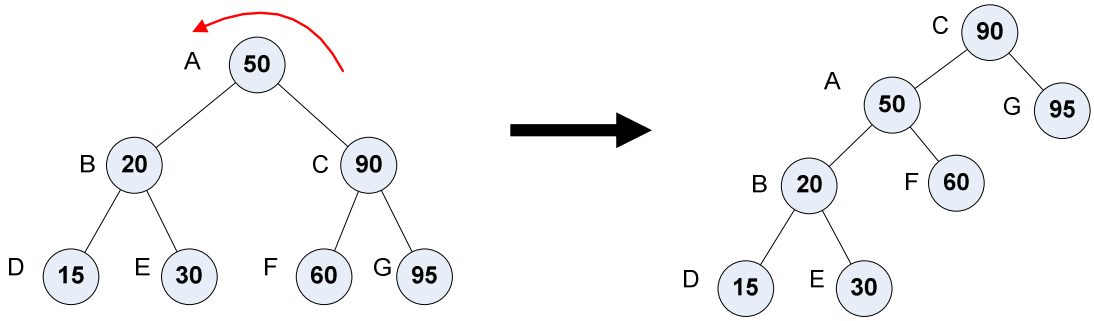
- Ako je stablo dobro balansirano efikasnost je O(log n)
- Ako stablo nije balansirano, tada je efikasnost lošija.
- Najgori slučaj je O(n)
  - kada se ubacuje sortirani niz brojeva, BST se degeneriše u listu

Visinski balansirana stablo - AVL

- BST stablo kod koga za svaki čvor važi da se visina njegovog levog i desnog podstabla ne razlikuje za više od 1 se naziva visinski balansirano stablo ili AVL stablo
  - AVL po imenima naučnika Addison, Velsky i Landin koji su predložili ovakvo stablo
- Rešava problem najgoreg slučaja kod BST
- Pretraživanje garantovano ima efikasnost O(log n)
- U odnosu na BST ima modifikovani algoritme za ubacivanje i izbacivanje
  - Zasniva se na rotacijama
  - Rotacije mogu biti na levo i na desno
- **Rotacije na desno**



- **Rotacije na levo**



Balansiranje stabla

- Rotacije menjaju visinski balans stabla
  - Rotacija na desno povećava debalans u korist desnog podstabla
  - Rotacija na levo povećava debalans u korist levog podstabla
- Ovo se koristi kod algoritama za ubacivanje i izbacivanje
  - Kada operacija naruši visinski balans, tj. stvori se debalans na jednoj strani, primenjuje se odgovarajuća rotacija da koriguje debalans

– Rotacije je uvek suprotna debalansu kako bi izjednačila balans.
– Npr, ako je debalans na desno, koristi se leva rotacija i obrnuto

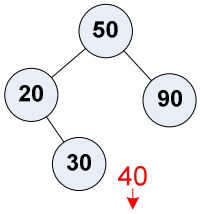
Ubacivanje u AVL

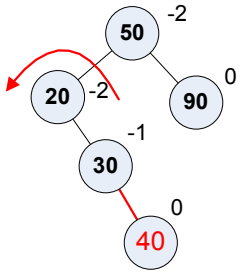
- Ubacuje se čvor na isti način kao u slučaju BST
- Proveri se za svaki čvor u stablu njegov debalans, tj. razlika visina između levog i desnog podstabla
- Ako postoji debalns, onda se vrši odgovarjuća rotacija oko čvora k koji je najbliži mestu ubacivanja
- Ako je oznaka debalansa deteta čvora k suprotna, onda se pre rotacije iz koraka 3, vrši suprotna rotacija oko tog deteta čvora k.
  - U ovom slučaju su potrebne dve rotacije!

Primeri ubacivanja

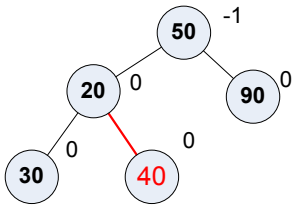
- Ubacuje se broj 40:

Debalans = Visina Levo – Visina Desno



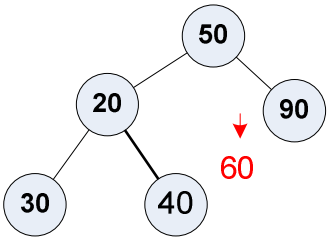


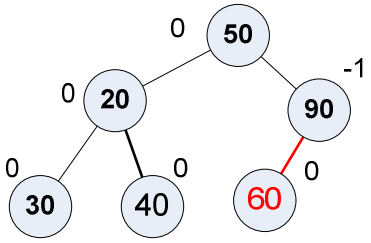
Potrebna jedna rotacija u levo oko 20



Rezultat nakon rotacije

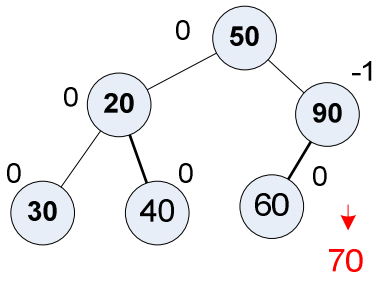
- Ubacuje se broj 60:

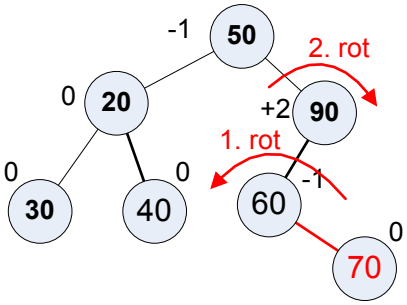




Nema debalansa, nisu potrebne rotacije

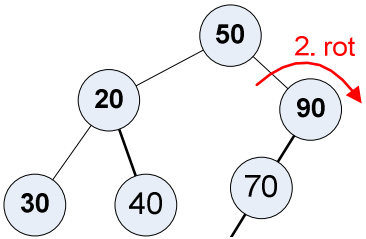
- Ubacuje se broj 70:



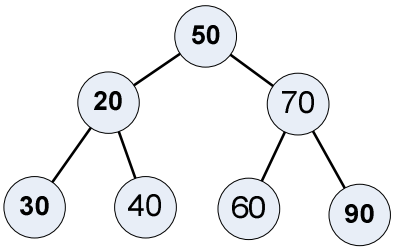


Postoji debalans, suprotni znaci, potrebne 2 rotacije

- Nakon 1. rotacije



- Nakon 2. rotacije



Izbacivanje iz AVL stabla

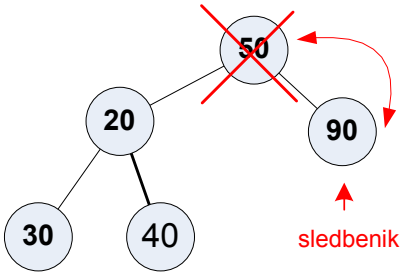
- Izbacivanje iz AVL stabla se vrši na sledeći način:
- 1. Izbaci se čvor na isti način kao kod BST
  - 3 slučaja:

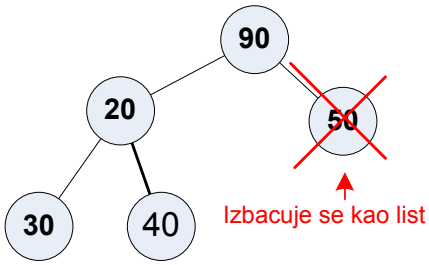
•Čvor list – samo se izbaci
•Čvor polu-list – preveže se dete na roditelja
•Čvor unutrašnji – vrši se zamena sa prethodnikom (sledbenikom) i svodi se na prva dva slučaja

- 2. Proveri se debalans i vrše potrebne (jedna ili dve) rotacije kao i kod ubacivanja

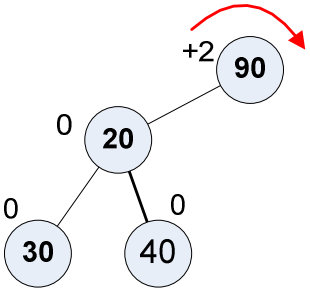
Primer izbacivanja

- Izbacuje se broj 50:



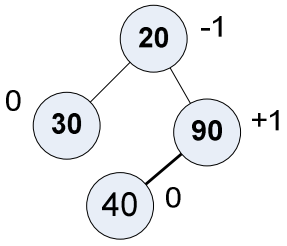


- Nakon izbacivanja 50



Postoji debalans, potrebna 1 rotacija

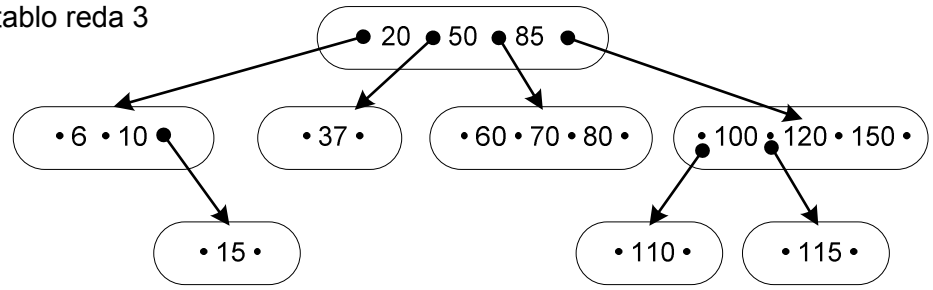
- Nakon rotacije



B, B* i B+ stabla

Višegranska stabla

- Uopštenje binarnih stabala pretraživanja
- Postoji više ključeva u čvoru
- Svakom ključu pridružena dva podstabla
  - jedno podstablo je istovremeno levo desno za dva susedna ključa
- Svi ključevi u levom podstablu su manji, a u desnom podstablu veći od datog ključa.
- Red stabla određuje koliko može svaki čvor imati maksimalno ključeva
  - Maximalni broj podstabala je n+1
- Stablo reda 3

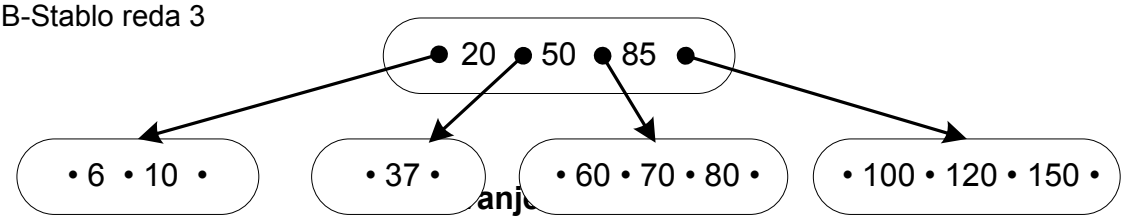


Pretraživanje višegranskog stabla

```
• TreeNode PretVST(TreeNode Root, int kljuc)
  {
    TreeNode node = RootVST;
    if (node == null)
    {
     Poz = 0;
     return null;
    }
  int i = PretCvor(node, kljuc);
  if (kljuc == k(node, i))
  {
    Poz = i;
    return node;
  }
  return PretVST(s(node, i), kljuc);
  }
```

B-stabla

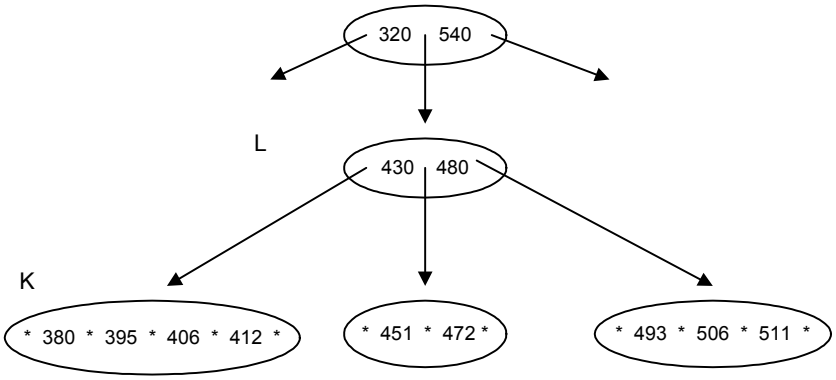
- B-Stablo reda n je višegransko stablo reda n kod koga važi:
  - Svi listovi su na istoj visini
  - Svaki čvor, izuzev korena, ima minimalno n/2 ključeva
- B-Stablo reda 3



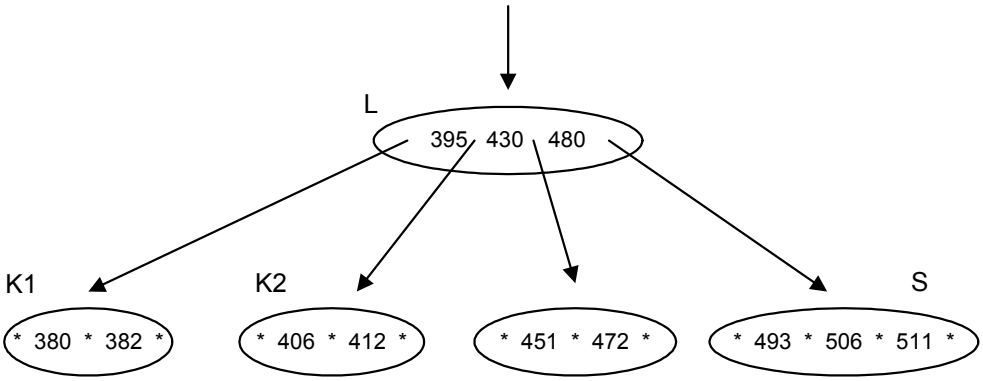
anj

- Pronaći čvor gde se vrši ubacivanje
  - Koristi se algoritam za pretraživanje

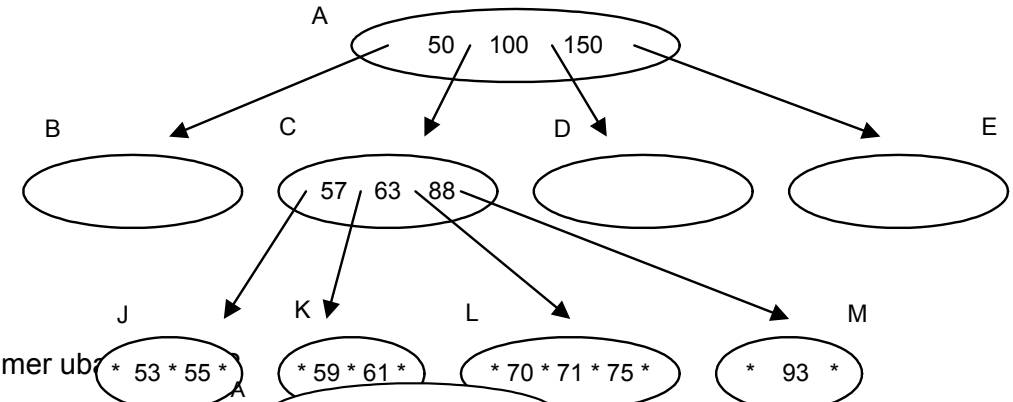
- Ubaciti novi ključ
  - Ako ima mesta, ključ se prosto ubaci
  - Ako nema mesta, onda:
    - **Pocepa se dati čvor na dva, i sortirani niz postojećih ključeva (uključujući i novi), osim srednjeg ključa (sredina sortiranog niza) se raspodeljuje u nove čvorove**
    - **Srednji ključ se ubacuje u nadređeni čvor**
    - **Postupak ubacivanja se rekurzivno ponavlja**
- Primer ubacivanja 382



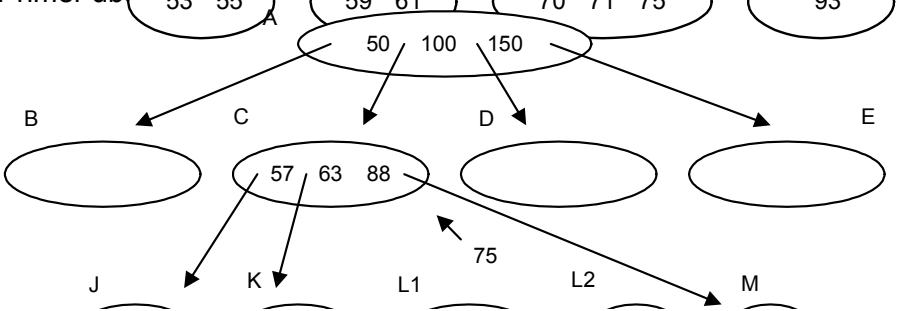
- Posle ubacivanja 382 (čvor K se pocepao)



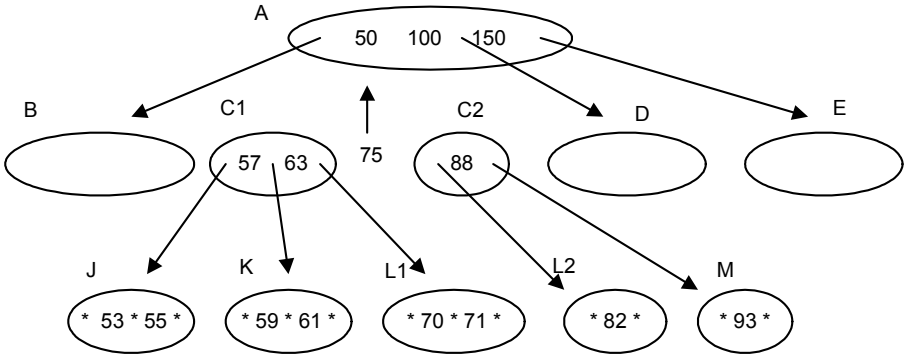
- Primer ubacivanja 82



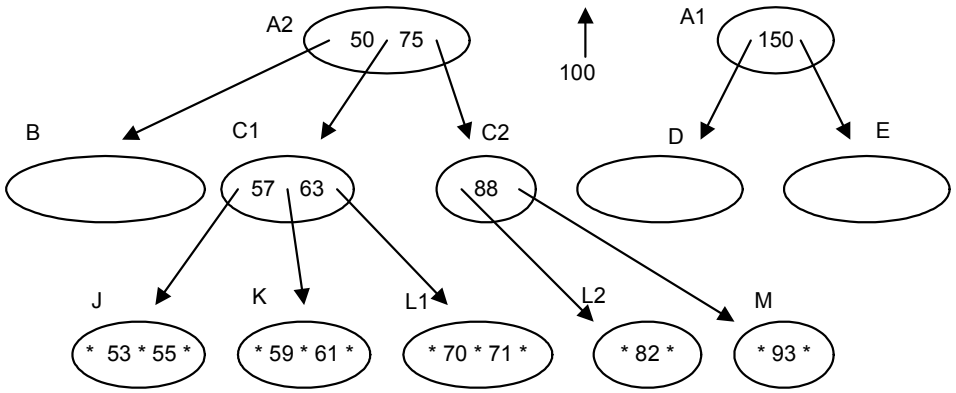
- Primer ub



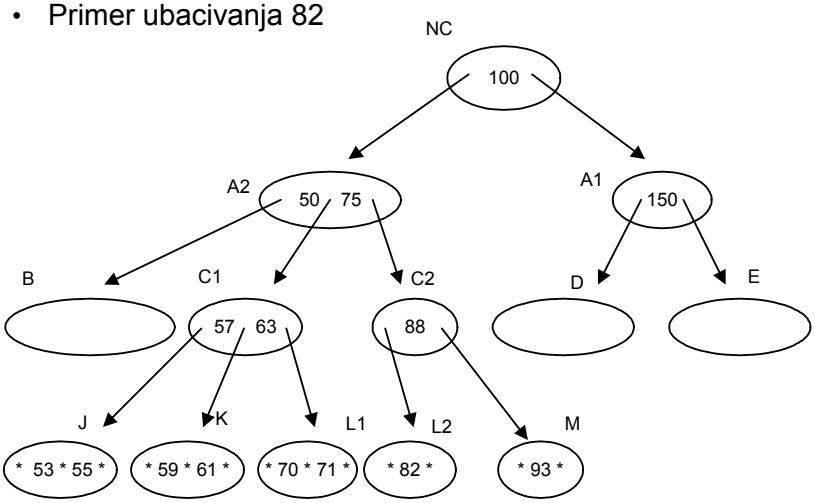
- Primer ubacivanja 82



- Primer ubacivanja 82



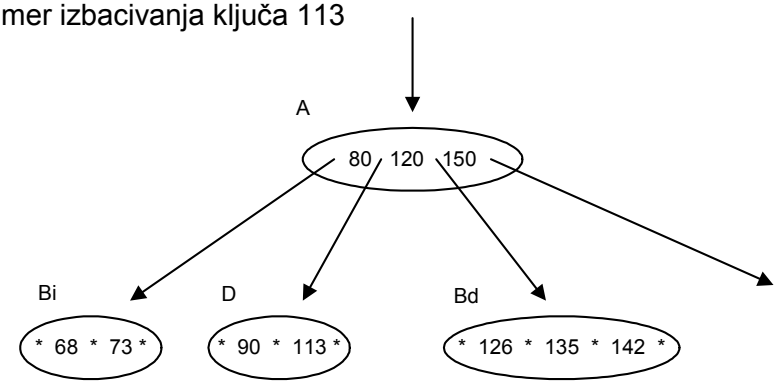
- Primer ubacivanja 82



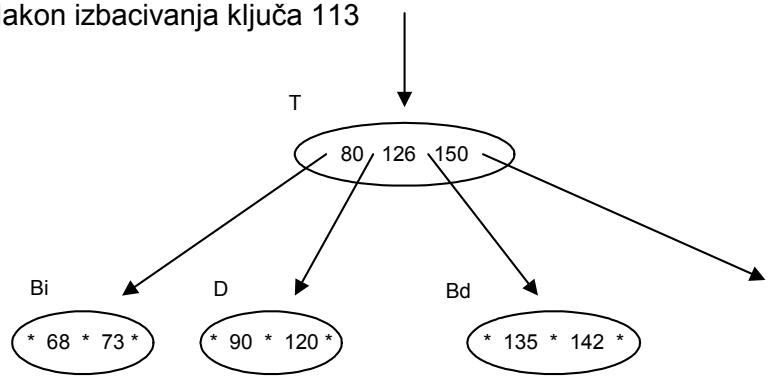
Izbacivanje iz B-Stabla

- Dva slučaja izbacivanja:
  - kada se ključ koji se izbacuje nalazi u čvoru koji nije list i
  - kada taj čvor list.

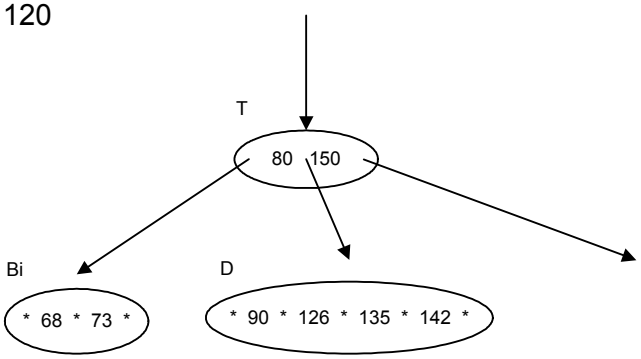
- 1. Izbacivanje iz čvor koji nije list
  - Svodi se na izbacivanje iz čvora koji jeste list
  - Pronalazi se prethodnik (ili sledbenik) datog ključa
  - Prethodnik (sledbenik) se nalazi na krajnjoj desnoj (levoj) poziciji u krajnjem desnom (levom) čvoru u levom (desnom) podstablu datog ključa
- 2. Izbacivanje iz čvor koji je list
  - Problem se javlja ako nakon izbacivanja u listu ostaje manje od n/2 ključeva
- Ako manje od n/2 ključeva
  - Pozjmjuje se od levog ili desnog brata ključevi
  - Ako nijedan brat nema dovoljno ključeva tada se dati čvor spaja sa nekim od svoje braće. Tom prilikom se spušta njihov nadređeni ključ iz nadređenog čvora
  - Ako spuštanje nadređenog ključa narušava integritet onda se postupak izbacivanja rekurzivno ponavlja
- Primer izbacivanja ključa 113



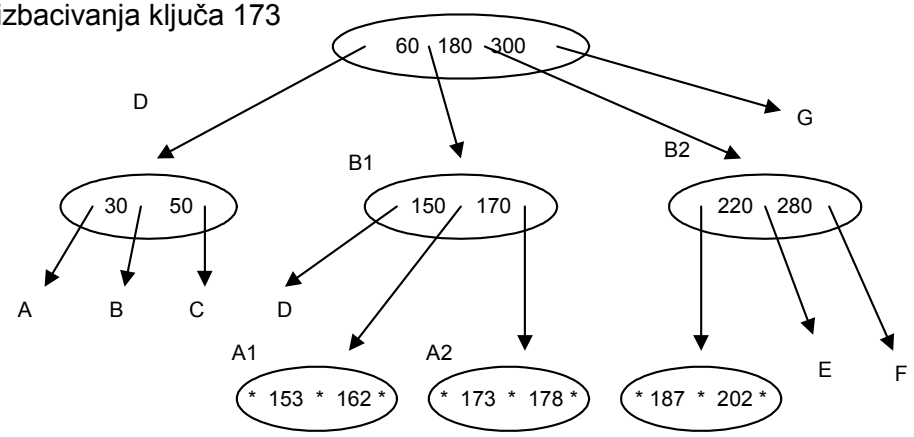
- Nakon izbacivanja ključa 113



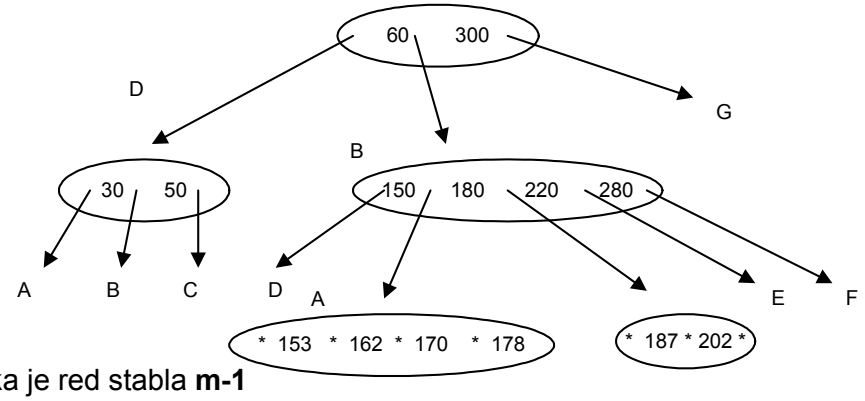
- Nakon izbacivanja ključa 120



- Primer izbacivanja ključa 173



- Nakon izbacivanja ključa 173



- Neka je red stabla **m-1**
- **n** je ukupan broj ključeva u stablu.
- Svaki čvor sadrži najmanje **q = (m-1) div 2** ključeva.

Visina B-stabla	Minimum		Maksimum	
	čvorova	ključeva	čvorova	ključeva
1	1	1	1	m-1
2	2	2q	m	(m -1)m
3	2(q+1)	2q(q+l)	m^2	(m -l)m^2
• • •	• • •	• • •	• • •	*. • •
i	$2(q+1)^{i-2}$	$2q(q+1)^{i-2}$	m^{i-1}	(m -i)m^{i-1}
• • •	• • •	• • •	• • •	• • •
ukupno za visinu d	$\frac{2(q+1)^{d-1}-1}{q}+1$	$2(q+1)^{d-1}$	$\frac{m^d-1}{m-1}$	m^d-1

-

Efikasnost B-stabala

- Iz minimalnog broja ključeva pronalazimo da je maksimalna visina (d) B-stabla:

$n = 2(q+1)^{d-1}$.

- Logaritmujući levu i desnu stranu dobijamo:

$\log_{q+1} n = \log_{q+1} 2(q+1)^{d-1}$.

- Sređivanjem dobijamo:

$\log_{q+1} n - \log_{q+1} 2 = (d-1) \log_{q+1}(q+1)$,

- a iz toga sledi

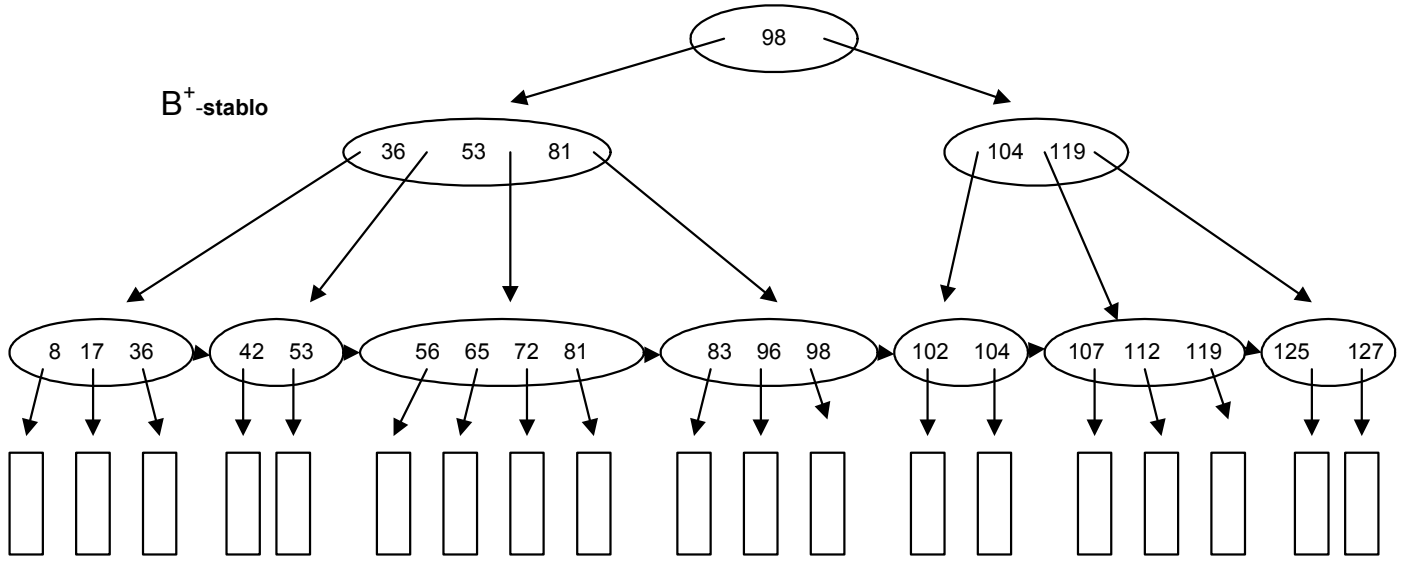
$d = \log_{q+1}(n/2) + 1$

B* stablo

- B* - Poboljšan algoritam ubacivanja
  - Umesto da se čvor u kome nema mesta za novi ključ odmah cepa, vrše se prethodno pozajmica viška ključeva njegovoj braći
  - Tek ako pozajmica nije moguća (ako su braća popunjena) se vrši cepanje

B+ stablo

- Omogućava i sekvencijalni pristup



Pretraživanje transformacijom ključa u adresu

Skupovi kao strukture podataka

- Skup kao struktura podataka
  - Ne postoji uređenje elemenata u skupu, tj.operacije *sledeći*, *prethodni*, *prvi*, *zadnji* nemaju smisla
  - Samo se zna da je dati element član skupa, tj. *nadjiPoKljuču* jedino ima smisla
  - Potrebne operacije *ubaci* i *izbaci*

Specifikacija skupa

- Definicija preko ATP

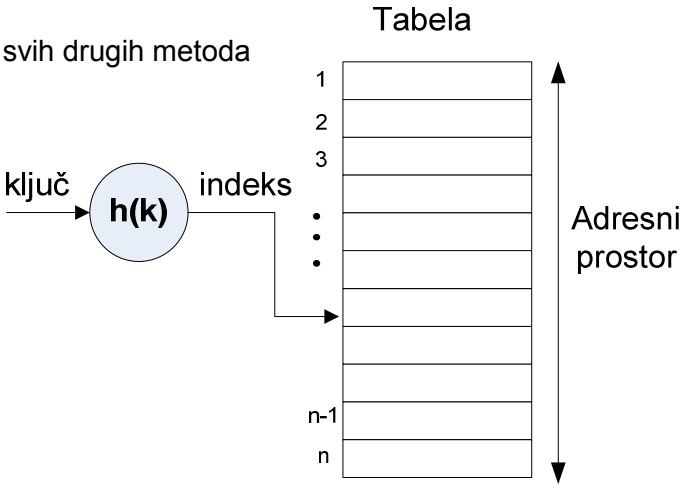
```
public interface ISkup
{
  void izbaci(int obj);
  void ubaci(int obj);
   int nadjiPoKljucu(int k);
...
}
```

Implementacija skupa pomoću transformacije ključa u adresu (hashing-a)

- Niz (tabela) može da pamti elemente skupa
- Transformacijom ključa u adresu (indeks) se određuje pozicija elementa u nizu
  - Funkcija koja vrši transformaciju se haziva **hash** funkcija, a ceo ovaj pristup **hashing**
  - Potrebno je da hash funkcija generiše jedinstvene adrese
- Prilikom ubacivanje se pomoću hash funkcije odredi adresa i element se smešta na datu adresu
- Prilikom pretraživanja po ključu hash funkcijom se određuje adresa gde se on nalazi

Organizacija zasnovana na hashingu

- Teoretski dovoljan samo 1 pristup
- Efikasnost O(1), potencijalno brže od svih drugih metoda pretraživanja



Problemi hashing organizacije

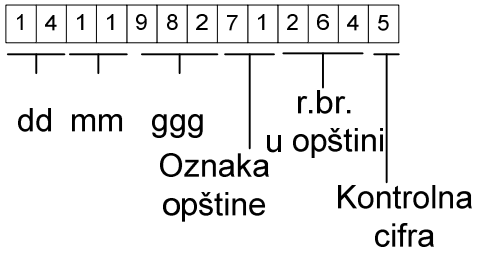
- 1. Kako pronaći idealnu hash funkciju h(k)
  - Treba da bude jednoznačna transformacija, tj. bez kolizije (sudaranja) ključeva
    Za svako k1 ≠ k2 → h(k1) ≠ h(k2)
- 2. Ako se dogodi kolizija kako je rešiti
  - Problem ubacivanja: šta uraditi sa elementom koji dobiju adresu koja je već zauzeta
  - Problem pretraživanja: kako naći traženi element ako nije na adresi dobijenoj pomoću hash funkcije

Hashing funkcija h(k)

- Idealna (perfektna) h(k)
  - Moguće je konstruisati samo ako se unapred znaju svi mogući ključevi i adrese
  - U praksi ovaj uslov često nije ispunjen
- Dobre osobine h(k)
  - Da se brzo računa
  - Da ima skoro slučajnu (uniformnu) raspodelu adresa, tj. da nema tačke nagomilavanja (sudaranja)
    - **Mnogo zapisa dobija istu adresu**
- Metode za realizaciju neperfektne h(k)
  - Selekcija cifara
  - Ostatak od celobrojnog deljenja

h(k) -Selekcija cifara

Struktura MLB



  - Obično je ključ numerički, pa se mogu neke cifre iz ključa uzeti kao adresa
    - **Važan odabir cifara**
  - Npr. skup od 50.000 studenata
  - Adresni prostor je 0-50.000
    - **Potrebno je da indeks ima pet cifara**
  - Ključ studenta je MLB – 13 cifara
    - **Npr. 1411981712645**
    - **Odabrati pet cifara od 13**
- Ako se uzmu dd,mm,g svi rodjeni istog dana i meseca u istom veku će imati istu adresu
- Bolje je ako se uzmu 2 cifre opštine i tri cifre rednog broja

h(k) - Ostatak od celobrojnog deljenja

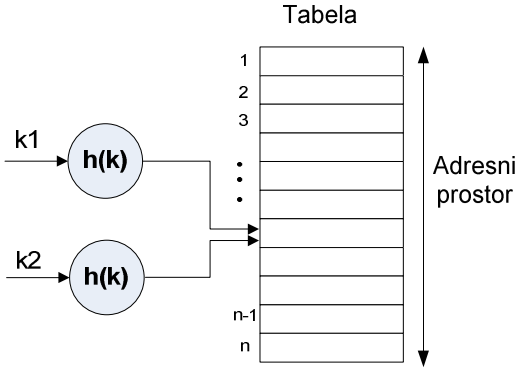
- h(k) = k mod m = b
  0<= b <= m

Adresni prostor od 0 – m

- Generiše iste adrese ako je k faktor od m
  - Npr. ako je m = 25, svi ključevi koji su deljivi sa 5 će se preslikavati na adrese 0, 5, 10, 15 i 20
- Bolje ako k i m nemaju zajednički faktor
- Stoga za m treba uzeti prost broj blizak veličini adresnog prostora
  - Npr. ako je n = 100, m = 103

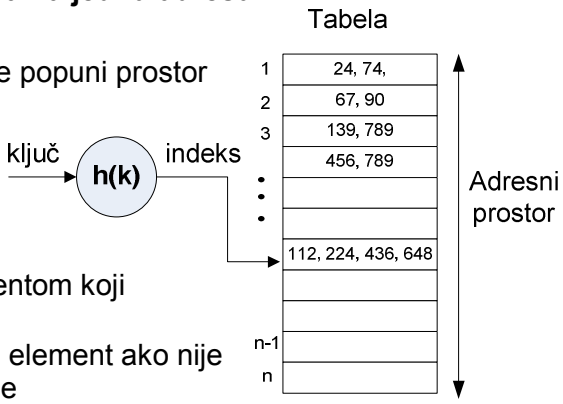
Problem kolizija

- Transformacijom ključa u adresu (indeks) se određuje pozicija elementa u nizu
  h(k) = a
- Problem kolizije
  - **k1 ≠ k2, h(k1) = h(k2)**



Prihvatanje više zapisa na jednu adresu

- Jedna adresa može da prihvati više
- Problem smeštanja ne postoji sve dok se ne popuni prostor na jednoj adresi



- Ako se dogodi kolizija kako je rešiti
  - Problem ubacivanja: šta uraditi sa elementom koji dobiju adresu koja je već zauzeta
  - Problem pretraživanja: kako naći traženi element ako nije na adresi dobijenoj pomoću hash funkcije
- Prihvatanje više zapisa na jednu adresu
  - Ublažava se problem kolizije, tj. problem smeštanja
- Dva standardna načina rešavanja kolizije
  - Otvoreno adresiranje
  - Metod olančavanja

Otvoreno adresiranje

- Otvoreno adresiranje se bazira na ideji da se primeni druga hash funkcija r(k) na adresu dobijenu originalnom h(k)
- Uzastopna primena r(k) dok se ne dobije slobodna adresa

$a_0 = h(k)$

$a_1 = r(a_0) \bmod n$

$a_2 = r(a_1) \bmod n$

….

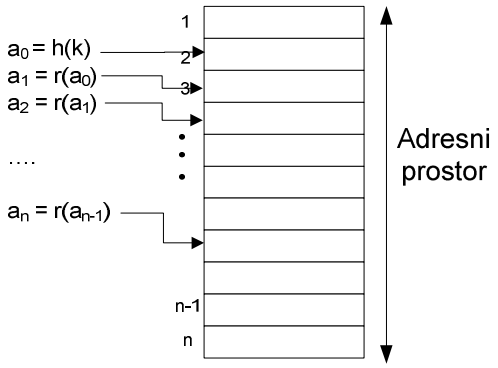
$a_n = r(a_{n-1}) \bmod n$

n – veličina tabele

Linearno probanje

- Problem izbora r(k)
- Linearno probanje
  - Uvećati prethodno dobijenu adresu za 1

$r(a_{i+1}) = r(a_i) \bmod n$



Sekundarna kolizija

- Primarna kolizija je kada različiti ključevi imaju istu adresu
- Sekundarna kolizija se javlja kada se sudare ključevi koji imaju različite h(k)
- Otvoreno adresiranje generiše sekundarnu koliziju
  - Uvećava se broj kolizija

Kvadratno probanje

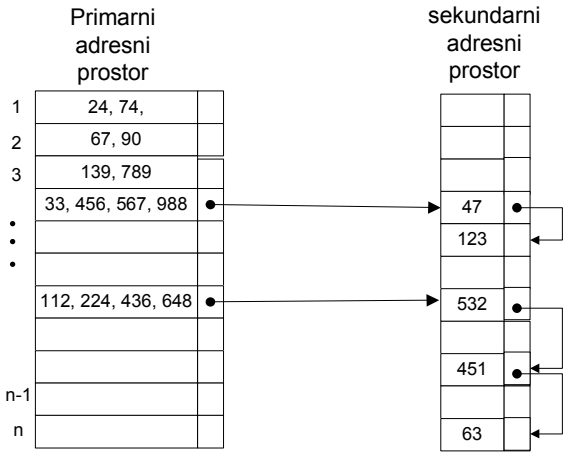
- Problem izbora r(k)
- Kvadratno probanje
  - Sukcesivno uvećati prethodno dobijenu adresu za kvadrat prethodnog rastojanja

$r(a_{i+1}) = r(a_i) \pm j^2; j=1,2,\ldots n$

- Delimično se rešava problem sekundarne kolizije

Metoda olančavanja

- Problem primarne kolizije se rešava uvođenjem posebne zone za zapise koji dobiju istu adresu
- Zapisi koji su u koliziji se olančavaju



–Poređenje metoda rešavanja kolizije

Metoda	Prednost	Nedostatak
Otvoreno adresiranje	• Nema dodatnog memorijskog prostora	• Problem sekundarne kolizije
Metoda olančavanja	• Nema sekundarne kolizije	• Potreban dodatan memorijski prostor • Sekvencijalno pretraživanje jednostruko spregnute liste

Grafovi i mreže – osnovni termini

- **Grafovi** su nelinearne strukture podataka
  - Predstavljaju najopštije strukture podataka
  - Odnos između elemenata nije linearan; jedna element može imati više sledbenika i više prethodnika
  - Nema ograničenja u pogledu povezivanja elemenata
  - Elementi grafa se nazivaju **čvorovi**
  - Veze između čvorova se nazivaju **lukovi**

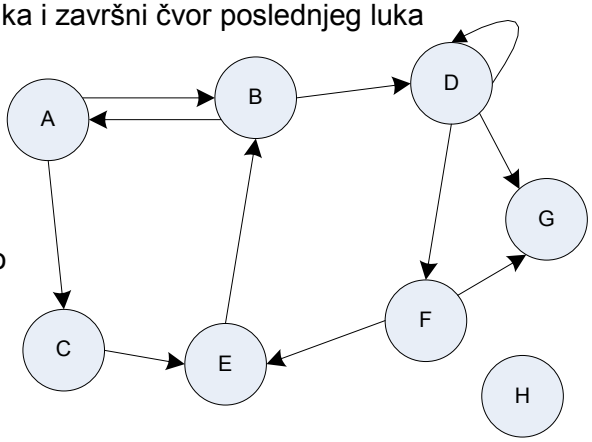
Definicija

- Struktura podataka B=(K,R); K-skup čvorova i R - binarna relacija nad skupom K i to tako da svaki par čvorova $(k_1 , k_2) \in R$ kažemo da obrazuje luk grafa
- Luk $l = (k_1 , k_2)$ povezuje čvor k_1 sa čvorom k_2 i to tako da čvor k_1 prethodi čvoru k_2 binarna;
- Ovo je definicija tzv. <u>orijentisanih</u> grafova
- Za graf kažemo da je <u>neorjentisan</u> ukoliko važi
- $(k_1 , k_2) \in R \rightarrow (k_2,k_1) \in R$

Osnovni termini

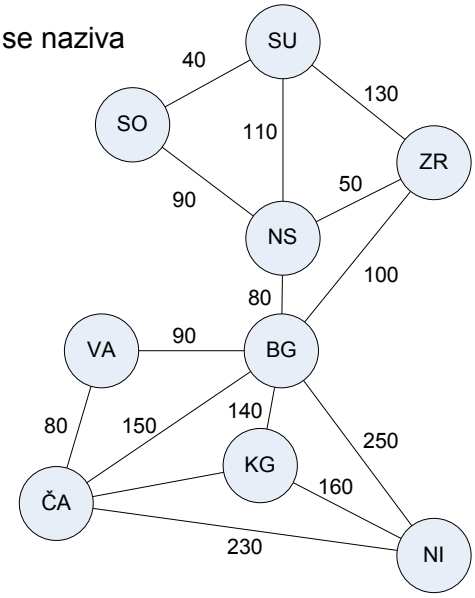
- Za luk $l = (k_1 , k_2)$ kažemo da je k_1 početni čvor luka l, a za k_2 da je završni čvor luka
  - Kaže se i da luk izlazi iz čvora k_1 i da ulazi u čvor k_2
- Za dva čvora se kaže da su susedni ukoliko postoji luk koji ih spaja
- Za dva luka se kaže da su susedni ukoliko imaju jedan zajednički čvor
- Čvor koji nema susednih čvorova se naziva izolovani čvor
  - U prethodnom primeru čvor E je izolovani čvor
- Luk kod koga su identični završni i početni čvor se naziva petljom
  - U prethodnom primeru luk nad čvorom B je petlja
- Lukovi čiji završni čvor jednog je identičan početnom čvoru drugog se naziva put grafa

- Put kod koga su početni čvor prvog luka i završni čvor poslednjeg luka identični se naziva ciklus
- Broj lukova koji obrazuje put se naziva dužinom puta
  - Kod petlje dužina puta je 1!
- Kod neorjentisanog grafa se umesto termina put koristi termin lanac
- Za graf kažemo da je povezan ukoliko između svaka dva čvora postoji lanac
- Za graf kažemo da je stogo povezan ukoliko između svaka dva čvora postoji put



Mreže

- Grafovi kod kojih se likovima pridružuje neki podatak se naziva mreža
- Primer: putna mreža
  - Neorijentisan graf

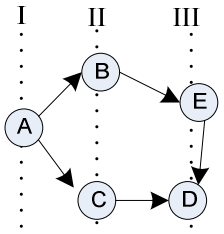


Prolazi kroz graf

- Obilazak svih čvorova grafa tačno jednom
- Potrebni za rešavanje raznih problema
  - Da li su dva čvora povezana
  - Nalaženje najkraćeg rastojanja
- Postoji više algoritama za obilazak grafa
  - Prolaz po širini
  - Prolaz po dubini

Prolaz po širini

- Čvorovi se obilaze po slojevima (nivoima)
  - Kada se jedna čvor obiđe, onda se obilaze svi njegovi susedi, pa tek onda susedi njegovih suseda, itd.
- Primer:
  - A, B, C, E, D



Prolaz po širini- pseudo kod

- Algoritam za prolaz po širini
  - zahteva korišćenje ATP Red (queue)
  - Svaki čvor ima status
    - **Čeka, spreman i obrađen**
  - Obilaze se svi čvorovi grafa i ubacuju u red ako već nisu posećeni ili ubačeni u red (tj. one sa statusom da čekaju)
  - Uzima čvorove iz reda, posećuje ih i menja status da su posećeni, a zatim ubacuje sve njihove susede u red ako već nisu posećeni ili ubačeni u red i menja im status u speman (tj. da su ubačeni u red)

Prolaz po širini

```
public void prolazPoSirini(Graf g)
{
   // inicijalizacija
```

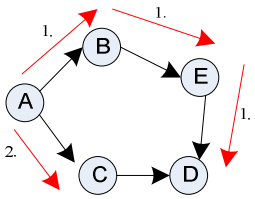
```
        for_each (cvor c u grafu g) {
                c.status = čeka;
        }
    // glavna obrada
     for_each (cvor c u grafu g) {
        if (c.status == čeka)
                        posetiCvor(c);
        }
}
```

Prolaz po širini – psuedo kod

```
private void posetiCvor(Cvor c)
{
    static Red r = new Red();  // red u kome se ubacuju cvorovi grafa

    r. Enqueue(c); // ubaci cvor u red
    while (!r.Empty()) {
        k = r.Uzmi();  // uzmi cvor iz reda
        k.visit(); // poseti ga
        k.status == obradjen;  // promeni mu status
        // ubaci u red sve susede od k koji čekaju
        for_each (cvor s koji je sused cvora k) {                    if
    (s.status = čeka)
                        r. Enqueue(s);
                        s.status == spreman;
    }
}
```

Prolaz po dubini

- Čvorovi se obilaze po dubini
  - Kada se jedna čvor obiđe, onda se obilazi jedna njegov sused, pa tek kad se on i njegovi susedi obiđu rekurzivno po dubini, prelazi se na obilazak ostalih suseda
- Primer:
  - A, B, E, D, C



Prolaz po dubini - pseudo kod

- Algoritam za prolaz po dubini
  - zahteva korišćenje ATP Stek (stack)
  - Svaki čvor ima status
    - **Čeka, spreman i obrađen**
  - Obilaze se svi čvorovi grafa i ubacuju u stak ako već nisu posećeni ili ubačeni u red (tj. one sa statusom da čekaju)
  - Uzima čvorove iz staka, posećuje ih i menja status da su posećeni, a zatim ubacuje sve njihove susede u stak ako već nisu posećeni ili ubačeni u stak i menja im status u speman (tj. da su ubačeni u red)

Prolaz po dubini

```
public void prolazPoDubini(Graf g)
{
    // inicijalizacija
        for_each (cvor c u grafu g) {
                c.status = čeka;
```

```
        }
    // glavna obrada
     for_each (cvor c u grafu g) {
        if (c.status == čeka)
            posetiCvor(c);
        }
}

private void posetiCvor(Cvor c)
{
    static Red s = new Stak();  // stak u kome se ubacuju cvorovi grafa

    s.Push(c); // ubaci cvor u stak
    while (!sEmpty()) {
        k = r.Uzmi();  // uzmi cvor iz reda
        k.visit(); // poseti ga
        k.status == obradjen;  // promeni mu status
        // ubaci u stak sve susede od k koji čekaju
        for_each (cvor q koji je sused cvora k) {
            if (q.status = čeka) {
                q.Push(s);
                // označi da je spreman, tj. da je ubacen u stak
                q.status == spreman;
            }
        }
}
```

Implementacija grafova

- Standardno se koriste dve tehnike za realizaciju grafova:
  - Matrice susedstva (statička implementacija)
  - Liste susedstva (dinamička implementacije)

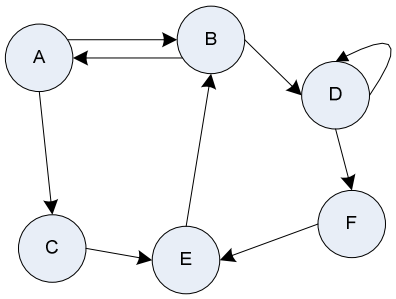
Matrice susedstva

- Matrica susedstva grafa G sa n čvorova je kvadratna matrica A [i, j] reda n čiji elementi:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ ako je čvor i susedan čvoru j} \\ 0, \text{ ako čvor i i j nisu susedni} \end{cases}$$

- Ako je graf neorijentisan tada je njegova matrica susedstva simetrična
  $A = A^T$

Primer matrice susedstva



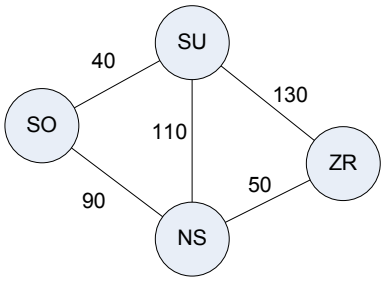
	A	B	C	D	E	F
A	0	1	1	0	0	0
B	1	0	0	1	0	0
C	0	0	0	0	1	0
D	0	0	0	1	0	1
E	0	1	0	0	0	0
F	0	0	0	0	1	0

Implementacija matrice susedstva

- Matrica je dvodimenzioni niz
  - Prostorna kompleksnost $O(n^2)$
- Ako je broj čvorova grafa veliki, a sadrži mali broj lukova, onda se dobija tzv. retko posednuta matrica, tj. matrica sa mnogo 0
  - Neefikasno korišćenje memorije
  - Koristi se bit-matrice
  - Za pamćenje elementa Aij se koristi samo jedan bit
  - Potrebno je manipulisati bitovima

Predstavljanje mreže

- Matrica susedstva se može iskoristiti za predstavljanje mreža
- Elementi a_{ij} matrice A sadrže vrednost luka

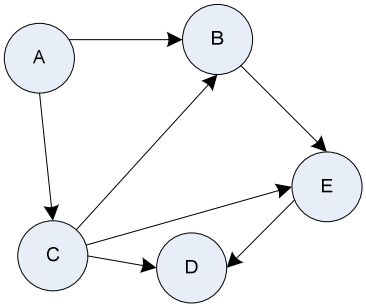


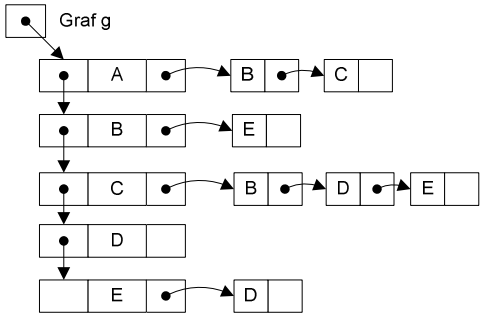
	SO	SU	NS	ZR
SO	0	40	90	
SU	40	0	110	130
NS	90	110	0	50
ZR		130	50	0

Liste susedstva

- Lista susedstva je multi-lista
  - Lista listi, tj. lista čiji elementi su liste
- Lista čvorova grafa od kojih svaki sadrži listu svojih suseda
- Prostorna kompleksnost O(n)
  - Za broj čvorova O(n)
  - Za broj lukova O(n)
  - Efikasno korišćenje memorije

Primer liste susedstva





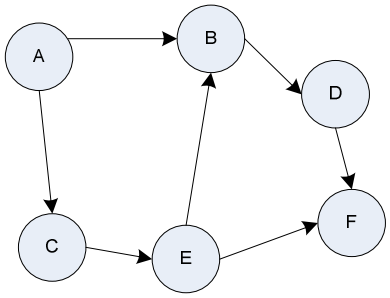
Poređenje metoda

- Matrice susedstva
  - Jednostavnije za manipulaciju
  - Prostorna kompleksnost $O(n^2)$
  - Neefikasno korišćenje memorije kod retko posednutih matrica
- Liste susedstva
  - Složenije za manipulaciju
  - Prostorna kompleksnost O(n)
  - Efikasnije korišćenje memorije

Algoritmi nad grafovima

Topologijski sort

- Linearno uređenje čvorova grafa tako da nijedan čvor i koji prethodi nekom čvoru j ne bude u lineranoj listi posle čvora j
- Primenljivo samo na orijentisane aciklične grafove
- Toplogijski sort: A, C, E, B, D, F



Topologijski sort - algoritam

- Topologijski sort:
  - Nadji čvor bez sledbenika
  - Ubaci ga na listu
  - Izbaci iz grafa nađeni čvor i sve njegove lukove
  - Ponovi korake 1-3 sve dok graf ne ostane prazan
- Topologijski sort zahteva dve osnovne procedure:
  - Nalaženje čvora koji nema sledbenika
  - Izbacivanje čvora i svih njegovih lukova
- Primer za realizaciju grafa preko matrice susedstva

```
public int NoSuccessors() {
```

```
        bool isEdge;
        for(int row = 0; row <= numVertices-1; row++) {
                isEdge = false;
                for(int col = 0 col <= numVertices-1; col++)
                        if (adjMatrix[row, col] > 0) {
                                isEdge = true;
                                break;
                        }
                }
                if (!(isEdge))
                return row;
        }
return -1;
}
public void DelVertex(int vert)
        if (vert ! = numVertices-1) {
        for(int j = vert; j <= numVertices-1; j++)
                vertices[j] = vertices[j+1];
        for(int row = vert; row <= numVertices-1; row++)
                moveRow[row, numVertices];
        for(int col = vert; col <= numVertices-1; col++)
                moveCol[row, numVertices-1];
        }
}

private void MoveRow(int row, int length) {
        for(int col = 0; col <= length-1; col++)
        adjMatrix[row, col] = adjMatrix[row+1, col];
}

private void MoveCol(int col, int length) {
        for(int row = 0; row <= length-1; row++)
        adjMatrix[row, col] = adjMatrix[row, col+1];
}
                                        Topologijski sort - algoritam
public void TopSort() {
        int origVerts = numVertices;
        while(numVertices > 0) {
                int currVertex = noSuccessors();
                if (currVertex == -1) {
                        Console.WriteLine("Error: graph has cycles.");
                return;

                }
        gStack.Push(vertices[currVertex].label);
        DelVertex(currVertex);
        }
        Console.Write("Topological sorting order: ");
        while (gStack.Count > 0)
                Console.Write(gStack.Pop() + " ");
}
```

Tranzitivni zatvarač

- Tranzitivni zatvarač
  - Graf T je tranzitivni zatvarač grafa G akko postoji luk (i,j) u grafu T ako postoji puitanja bilo koje dužine u grafu G između čvorova i i j.
- P – matrica susedstva
  - Putanje duzine 1
- P^2=PxP
  - Putanje dužine 2
- P^n=PxPx ..P
  - Putanje dužine n
- Algoritam koji stepenuje matricu susedstva na n-ti stepen nije efikasan
- Warshall-ov algoritam
  - Pk(i,j) = 1 ako postoji putanja od i do j koja prolazi kroz čvorove koji su numerisani do k
  - Pk+1(i,j) = 1 akko

•P(i,j) = 1

•Pk(i,k+1) and Pk(k+1,j)

  - Efikasnost je $O(n^3)$

Warshall-ov algoritam

```
void Warshal() {
   for(int k = 0; k<= numVertices-1; k++) {
   for(int i = 0; i<= numVertices-1; i++) {
     if (adjMatrix[i, k]) {
              for(int j= 0; j<= numVertices-1; j++)
               adjMatrix[i, j] = adjMatrix[i, k] || adjMatrix[i, k]
             }
     }
 }
}
```