Теорија вероватноће
Збирка задатака

др Милица Булајић
др Драган Вукмировић
др Зоран Радојичић
др Александар Ђоковић
мр Селена Тотић
др Марина Доброта

Београд, 2015.

Теорија вероватноће Збирка задатака

др Милица Булајић, др Драган Вукмировић,
др Зоран Радојичић, др Александар Ђоковић,
мр Селена Тотић, др Марина Доброта

Рецензент:
Срђан Богосављевић, професор

Издаје и штампа:
Факултет организационих наука
Јове Илића 154, Београд
http://www.fon.bg.ac.rs/

Треће - доштампано издање

Тираж: 300 примерака

ПРЕДГОВОР

Збирка задатака из Теорије вероватноће намењена је првенствено студентима друге године Факултета организационих наука и прилагођена је програму предмета Теорија вероватноће.

Збирка представља проширење претходног издања ″Решени задаци из вероватноће″. Већина задатака преузета је, уз сагласност проф. др Находа Вуковића, из збирке истих аутора ″Решени задаци из вероватноће и статистике″. У односу на претходну, у овој збирци су дата решења већег броја испитних задатака. Такође су додата нова поглавља, са решеним испитним задацима, као и поглавље са нерешеним задацима за вежбу. Решења задатака су детаљна, уз навођење дефиниција, тврђења и објашњења потребних за лакше разумевање и праћење описаног поступка.

Збирка је подељена у шест поглавља. У првом су дати задаци из области дескриптивне статистике, док друго садржи задатке из области вероватноће. Треће и четврто поглавље односе се на једнодимензионалне, односно дводимензионалне, случајне променљиве. У петом поглављу дати су разни испитни задаци из свих претходно наведених области. Шесто поглавље садржи разне нерешене испитне задатке који су студентима дати за вежбу.

Осим ове збирке, за квалитетно изучавање материје из области теорије вероватноће, препоручујемо књигу ″Основе вероватноће″ као и web адресу http://statlab.fon.bg.ac.rs

У нади да ће збирка бити од помоћи онима којима је намењена, захваљујемо се свима који су помогли у њеној припреми.

Аутори

У Београду,
октобра 2010. године

САДРЖАЈ

1. ДЕСКРИПТИВНА СТАТИСТИКА

Задатак 1. Ради провере тачности паковања дрваца у кутији шибица од по 100 комада, узето је на проверу 50 кутија и добијени су подаци о броју дрваца:

80	107	90	95	97	109	102	102	100	90
95	97	100	102	100	99	100	90	106	107
95	99	100	100	102	99	106	95	106	100
99	97	106	97	100	106	95	102	100	97
100	95	97	102	99	100	107	100	99	99

a) Формирати расподелу (апсолутних) фреквенција,
b) Формирати расподелу релативних фреквенција,
c) Одредити кумулативне (апсолутне) фреквенције,
d) Одредити кумулативне релативне фреквенције.

Решење:

Обележје X: "Број дрваца у кутији" - прекидни (дискретни) тип.

N=50

Формираћемо следећу табелу:

k	X_k	f_k	f_k/N	$\sum_{i=1}^{k} f_i$	$\sum_{i=1}^{k} \frac{f_i}{N}$
1	80	1	0.02	1	0.02
2	90	3	0.06	4	0.08
3	95	6	0.12	10	0.20
4	97	6	0.12	16	0.32
5	99	7	0.14	23	0.46
6	100	12	0.24	35	0.70
7	102	6	0.12	41	0.82
8	106	5	0.10	46	0.92
9	107	3	0.06	49	0.98
10	109	1	0.02	50	1.00
Σ	/	50	1.00	/	/

a) Расподела апсолутних фреквенција f_k:

$$X:\begin{pmatrix} 80 & 90 & 95 & 97 & 99 & 100 & 102 & 106 & 107 & 109 \\ 1 & 3 & 6 & 6 & 7 & 12 & 6 & 5 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

b) Расподела релативних фреквенција f_k/N:

$$X:\begin{pmatrix} 80 & 90 & 95 & 97 & 99 & 100 & 102 & 106 & 107 & 109 \\ 0.02 & 0.06 & 0.12 & 0.12 & 0.14 & 0.24 & 0.12 & 0.10 & 0.06 & 0.02 \end{pmatrix}$$

c) Кумулативне (апсолутне) фреквенције су дате у 5. колони табеле.

d) Кумулативне релативне фреквенције су дате у 6. колони табеле.

<u>Задатак 2.</u> Изабрано је 50 студената и измерене су им висине (у cm):

184	180	192	162	178	173	169	178	179	176
185	186	171	170	181	180	175	176	190	181
184	176	181	171	190	177	181	185	165	179
166	176	178	180	175	176	179	180	174	184
166	168	170	175	189	172	185	171	166	186

Формирати расподелу апсолутних и релативних фреквенција.

Решење:

Обележје X: "Висина студената" је непрекидног (континуалног) типа.

N=50

Прво ћемо одредити број групних интервала (K) применом тзв. Стургес-овог правила:

$$K = 1 + 3.3 \cdot \log N$$
$$K = 1 + 3.3 \cdot \log 50 = 1 + 3.3 \cdot 1.7 = 6.61$$

Дужину интервала (d) одређујемо по формули:

$$d = \frac{X_{\max} - X_{\min}}{K}$$

где је: X_{max} - максимална вредност обележја X.
X_{min} - минимална вредност обележја X;

$$d = \frac{192 - 162}{6.61} = 4.53 \approx 5$$

Расподеле фреквенција приказаћемо у табели:

i	a_i-b_i	f_i	$p_i f_i/N$
1	[162 - 167]	5	0.10
2	(167 - 172]	8	0.16
3	(172 - 177]	11	0.22
4	(177 - 182]	14	0.28
5	(182 - 187]	8	0.16
6	(187 - 192]	4	0.08
Σ	/	50	1.00

<u>Задатак 3.</u> Израчунати аритметичку, геометријску и хармонијску средину за податке из табеле:

x_i	5	8	10	12	16
f_i	1	2	2	3	2

Решење:

N=10
k=5 (групних интервала)

i	x_i	f_i	$f_i \cdot x_i$	log x_i	$f_i \cdot \log x_i$	f_i/x_i
1	5	1	5	0.6990	0.6990	0.200
2	8	2	16	0.9031	1.8062	0.250
3	10	2	20	1.0000	2.0000	0.200
4	12	3	36	1.0792	3.2376	0.250
5	16	2	32	1.2041	2.4081	0.125
Σ	/	10	109	/	10.1510	1.025

$$\bar{x} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{k} X_i f_i = \frac{1}{10}\cdot 109 = 10.9$$

$$\log G = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{k} f_i \log X_i = \frac{1}{10}\cdot 10.1510 = 1.0151$$

$$G = 10^{1.0151} = 10.354$$

$$\frac{1}{H} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{k}\frac{f_i}{X_i} = \frac{1}{10}\cdot 1.025 = 0.1025$$

$$1 = 0.1025\cdot H$$

$$H = \frac{1}{0.1025} = 9.756$$

Задатак 4. На основу датих података

i	Оптерећење кабла	f_i
1	- 9.7	2
2	9.8 - 10,2	5
3	10.3 - 10.7	12
4	10.8 - 11.2	17
5	11.3 - 11.7	14
6	11.8 - 12.2	6
7	12.3 - 12.7	3
8	12.8 -	1

a) Израчунати средњу оптерећеност каблова,

b) Ако се зна да између обележја Y (век трајања каблова) и обележја X (оптерећеност каблова) постоји линеарна веза облика:

$$Y = 3.3X + 29.11$$

Израчунати средњу вредност посматраног обележја Y.

Решење:

X - Оптерећеност каблова, континуални тип,
Y - Век трајања каблова, континуални тип.
N=60
k=8 (групних интервала).

Потребно је одредити средину групних интервала тј. x_i. Проблем је што не знамо дужину првог интервала. По конвенцији се узима да су дужине интервала d_i, i=1, 2, ..., k међусобно једнаке, тј.

$$d_2 = d_3 = \ldots = d_7 = d = 0.4 \Rightarrow d_1 = d_8 = d = 0.4$$

i	Оптерећење кабла	f_i	x_i	$f_i \cdot x_i$
1	9.3 - 9.7	2	9.5	19
2	9.8 - 10.2	5	10.0	50
3	10.3 - 10.7	12	10.5	126
4	10.8 - 11.2	17	11.0	187
5	11.3 - 11.7	14	11.5	161
6	11.8 - 12.2	6	12.0	72
7	12.3 - 12.7	3	12.5	37.5
8	12.8 - 13.2	1	13.0	13
Σ	/	60	/	665.5

а)

$$\bar{x} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{k} x_i f_i = \frac{1}{60} \cdot 665.5 = 11.09$$

b) Из особина аритметичке средине имамо

ако је: $Y = aX + b$ тада је: $\overline{y} = a\overline{x} + b, \quad a, b \in R, a \neq 0$

па је:

$$Y = 3.3X + 29.11$$
$$\overline{y} = 3.3 \cdot 11.09 + 29.11 = 65.707$$

<u>Задатак 5.</u> За групу од 25 студената добијена је средња тежина од 71.2 kg, а за групу од 15 студенткиња је израчуната аритметичка средина која износи 54.2 kg. Колика је просечна тежина свих разматраних студената?

***Решење*:**

Студенти: $N_1 = 25, \quad \overline{X}_{N_1} = 71.2$

Студенткиње: $N_2 = 15, \quad \overline{X}_{N_2} = 54.2$

Заједно: $N = N_1 + N_2 = 40 \quad \overline{X}_N = ?$

Користимо особину аритметичке средине

$$\overline{X}_N = \frac{N_1 \overline{X}_{N_1} + N_2 \overline{X}_{N_2}}{N_1 + N_2} = \frac{25 \cdot 71.2 + 15 \cdot 54.2}{25 + 15} = 64.825$$

<u>Задатак 6.</u> Израчунати медијану и модус за добијене податке.

a)

X_i	110	111	112	113	114	115	116
f_i	1	2	4	8	7	5	3

b)

X_i	209	210	211	212	213	214	215	216	217
f_i	1	6	9	8	4	5	9	3	2

***Решење*:**

a) Модус је она вредност обележја X која има највећу фреквенцију у посматраном статистичком скупу.

f_{MAX}=8, па је Mo=113

Да би одредили медијану потребно је да су вредности обележја X уређене по растућем редоследу X'. Пошто је то овде учињено, остаје нам да одредимо N и применимо формулу.

$$Me = \begin{cases} X'_{\frac{N+1}{2}} & ; \quad за - N - непарно \\ \frac{1}{2}\left(X'_{\frac{N}{2}} + X'_{\frac{N}{2}+1} \right) & ; \quad за - N - парно \end{cases}$$

Како је

$$N = \sum_{i=1}^{7} f_i = 30 \text{ , и } \frac{N}{2} = 15$$

добијамо:

$$Me = \frac{X_{15} + X_{16}}{2} = \frac{113 + 114}{2} = 113.5$$

b)

$$f_{MAX}=9$$

па имамо две вредности за модус:

$$Mo_1=211 \quad \text{и} \quad Mo_2=215$$

$$N=47, \quad \frac{N+1}{2}=24$$

па за медијану добијамо:

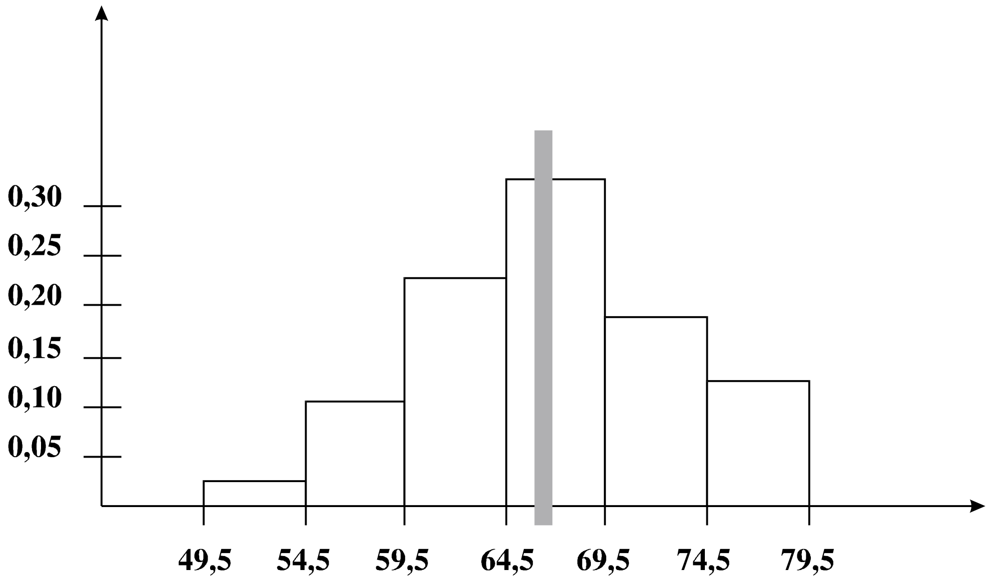
$$Me = X_{\frac{N+1}{2}} = X_{24} = 212$$

<u>Задатак 7.</u> На хистограму релативних фреквенција графички интерпретирати медијану, за податке дате табелом:

i	a_{i-1}-a_i	f_i
1	49.5 - 54.5	2
2	54.5 - 59.5	8
3	59.5 - 64.5	18
4	64.5 - 69.5	26
5	69.5 - 74.5	15
6	74.5 - 79.5	10

***Решење*:**

i	a_{i-1}-a_i	f_i	Σf_i	f_i/N
1	49.5 - 54.5	2	2	0.025
2	54.5 - 59.5	8	10	0.101
3	59.5 - 64.5	18	28	0.228
4	64.5 - 69.5	26	54	0.329
5	69.5 - 74.5	15	69	0.190
6	74.5 - 79.5	10	79	0.126
Σ	/	79	/	0.999



Хистограм релативних фреквенција

$$Me = a_s + \frac{a_{s+1} - a_s}{f_{s+1}}\left(\frac{N}{2} - \sum_{i=1}^{s} f_i\right)$$

N=79

$$\frac{N}{2} = 39.5$$

s=3

$$Me = 64.5 + \frac{5}{26}(39.5 - 28) = 66.7115$$

Задатак 8. Дате су тежине 100 случајно изабраних особа. Израчунати мере варијабилитета.

тежина (kg)	f_i
60 - 63	5
63 - 66	18
66 - 69	42
69 - 72	27
72 - 75	8

Решење:

X	f_i	x_i	$\sum_{k=1}^{i} f_k$	$x_i \cdot f_i$	$\lvert x_i - \bar{x}\rvert f_i$	$x_i^2 \cdot f_i$
60 - 63	5	61.5	5	307.5	32.25	18911.25
63 - 66	18	64.5	23	1161.0	62.10	74884.50
66 - 69	42	67.5	65	2835.0	18.90	191362.50
69 - 72	27	70.5	92	1903.5	68.85	134196.75
72 - 75	8	73.5	100	588.0	44.40	43218.00
Σ	100	/	/	6795.0	226.50	462573.00

$$\overline{X} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{k} x_i f_i = \frac{1}{100} \cdot 6795 = 67.95$$

$$\overline{x}^2 = 4617.2025$$

1. $R = \max X - \min X = 75 - 60 = 15$

2. $Q = \dfrac{X_{0.75} - X_{0.25}}{2}; \quad \dfrac{N}{4} = 25; \quad 3 \cdot \dfrac{N}{4} = 75$

$$X_{0.25} = a_s + \frac{a_{s+1} - a_s}{f_{s+1}} \left(\frac{N}{4} - \sum_{i=1}^{s} f_i \right)$$

$s = 2$

$$X_{0.25} = 66 + \frac{3}{42}(25 - 23) = 66.143$$

$$X_{0.75} = a_p + \frac{a_{p+1} - a_p}{f_{p+1}} \left(\frac{3N}{4} - \sum_{i=1}^{p} f_i \right)$$

$p = 3$

$$X_{0.75} = 69 + \frac{3}{27}(75 - 65) = 70.1111$$

$$Q = \frac{70.111 - 66.143}{2} = 1.99$$

3. $e_m = \dfrac{1}{N} \sum_{i=1}^{k} |x_i - \overline{x}| \cdot f_i = \dfrac{226.5}{100} = 2.265$

4. $S^2 = \dfrac{1}{N} \sum_{i=1}^{k} x_i^2 f_i - \overline{x}^2 = \dfrac{462573}{100} - 4617.2025 = 8.527$

5. $S = +\sqrt{8.5275} = 2.92019$

6. $V = 100 \cdot \dfrac{S}{\overline{x}} = 100 \cdot \dfrac{2.920}{67.95} = 4.297\%$

<u>Задатак 9.</u> Дати су подаци:

x	110-	100-110	90-100	80-90	70-80	60-70	-60
f_i	17	5	10	14	16	10	8

Израчунати мере варијабилитета.

Решење:

X	f_i	x_i	c_i	$\lvert x_i - \overline{x}\rvert f_i$
50 - 60	8	55	8	251
60 - 70	10	65	18	213.75
70 - 80	16	75	34	182
80 - 90	14	85	48	19.25
90 - 100	10	95	58	86.25
100 - 110	5	105	63	93.125
110 - 120	17	115	80	486.625
Σ	80	/	/	1332.0

$$N = 80;\ \sum_{i=1}^{k} x_i f_i = 6910;\quad \sum_{i=1}^{k} x_i^2 f_i = 627800;$$

$$\overline{x} = 86.375$$

1. $R = X\max - X\min = 120 - 50 = 70$

2. $Q = \dfrac{X_{0.75} - X_{0.25}}{2};\quad \dfrac{N}{4} = 20;\quad 3\cdot\dfrac{N}{4} = 60$

$$X_{0.25}=a_s+\frac{a_{s+1}-a_s}{f_{s+1}}\left(\frac{N}{4}-\sum_{i=1}^{s}f_i\right)$$

$$s=2$$

$$X_{0.25}=70+\frac{10}{16}(20-18)=71.25$$

$$X_{0.75}=a_p+\frac{a_{p+1}-a_p}{f_{p+1}}\left(\frac{3N}{4}-\sum_{i=1}^{p}f_i\right)$$

$$p=5$$

$$X_{0.25}=100+\frac{10}{5}(60-58)=104$$

$$Q=\frac{104-71.25}{2}=16.375$$

3. $e_m=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{k}|x_i-\overline{x}|\cdot f_i=\frac{1332}{80}=16.65$

4. $S^2=386.859$

5. $S=19.669$

6. $V=100\cdot\frac{S}{\overline{x}}(\%)=22.772(\%)$

<u>Задатак 10.</u> За податке из претходног задатка израчунати:

a) Први и други обични моменат,

b) Први, други, трећи и четврти централни моменат,

c) Испитати спљоштеност.

Решење:

a)

$$m_r = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{k} x_i^r f_i;\ r = 1,2$$

$$m_1 = \overline{x} = 86.375$$

$$m_2 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{k} x_i^2 f_i = \frac{1}{80}\cdot 627800 = 7847.5$$

b)

$$\mu_r = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{k}\left(x_i - \overline{x}\right)^r \cdot f_i; r = 1,2,3,4$$

$$\mu_1 = 0$$

$$\mu_2 = S^2 = 386.859$$

$$\mu_3 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{k}\left(x_i - \overline{x}\right)^3 \cdot f_i = \frac{1}{80}\cdot 69128.44 = 864.106$$

$$\mu_4 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{k}\left(x_i - \overline{x}\right)^4 \cdot f_i = \frac{1}{80}\cdot 22178433 = 277230.41$$

c)

$$\beta_2 = \frac{\mu_4}{S^4} = \frac{277230.41}{149668.06} = 1.85$$

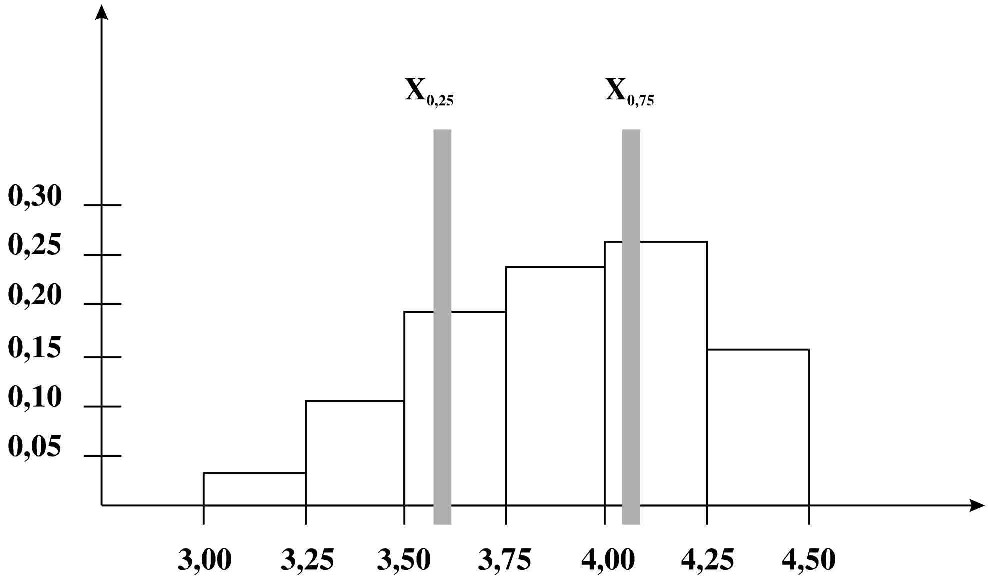
$\beta_2 < 3 \Rightarrow$ расподела има спљоштеност мању од нормалне.

Задатак 11. На хистограму релативних фреквенција графички приказати квартиле, за дате податке.

i	a_{i-1}-a_i	f_i
1	3.00 - 3.25	6
2	3.25 - 3.50	19
3	3.50 - 3.75	35
4	3.75 - 4.00	44
5	4.00 - 4.25	47
6	4.25 - 4.50	29

Решење:

i	a_{i-1}-a_i	f_i	p_i	Σf_i
1	3.00 - 3.25	6	0.033	6
2	3.25 - 3.50	19	0.105	25
3	3.50 - 3.75	35	0.194	60
4	3.75 - 4.00	44	0.244	104
5	4.00 - 4.25	47	0.261	151
6	4.25 - 4.50	29	0.161	180
Σ	/	180	0.998	/



Хистограм релативних фреквенција

$$X_{0.25} = a_s + \frac{a_{s+1} - a_s}{f_{s+1}} \left(\frac{N}{4} - \sum_{i=1}^{s} f_i \right)$$

$$\frac{N}{4} = 45 \quad s = 2$$

$$X_{0.25} = 3.50 + \frac{0.25}{35}(45 - 25) = 3.64$$

$$X_{0.75} = a_p + \frac{a_{p+1} - a_p}{f_{p+1}} \left(\frac{3N}{4} - \sum_{i=1}^{p} f_i \right)$$

$$\frac{3N}{4} = 135 \quad p = 4$$

$$X_{0.75} = 4 + \frac{0.25}{47}(135 - 104) = 4.16$$

<u>Задатак 12.</u> Дати су подаци о обележју X

x_i	(-5,0)	(0,5)	(5,10)	(10,15)
f_i	22	33	44	55

Одредити коефицијент асиметрије K*a*.

Решење:

X	f_i	x_i	Σf_i
(-5,0)	22	-2.5	22
(0,5)	33	2.5	55
(5,10)	44	7.5	99
(10,15)	55	12.5	154
Σ	154	/	/

$$N=154; \qquad \sum_i x_i f_i = 1045; \qquad \sum_i x_i^2 f_i = 11412,5$$

$$\bar{x}=6.79 \qquad S^2=28.003 \qquad S=5.292$$

$$Ka=\frac{3\left(\bar{x}-Me\right)}{S}$$

$$Me=a_S+\frac{a_{s+1}-a_s}{f_{s+1}}\left(\frac{N}{2}-\sum_{i=1}^{s} f_i\right)$$

$$\frac{N}{2}=77; \qquad s=2$$

$$Me=5+\frac{5}{44}\left(77-55\right)=7.5$$

$$Ka = \frac{3 \cdot (6.79 - 7.5)}{5.297} = -0.40$$

$Ka < 0 \quad \Rightarrow$ Расподела је асиметрична у десно.

<u>Задатак 13.</u> Дати су резултати испитивања обележја X (температура у °C) и линеарна веза иамеђу обележја X и Y (висина воденог стуба у mm)

$$Y = 11X + 202.$$

X	(a,63)	(63,66)	(66,69)	(69,72)	(72,b)
f	5	18	42	27	8

a) Одредити непознате крајеве групних интервала,
b) Израчунати средњу вредност обележја Y,
c) Да ли је коефицијент варијације обележја X већи од коефицијента веријације обележја Y?

Решење:

a) Види се да је дужина групних интервала иста. Зато је логично да и први и последњи интервал буду исте дужине, па је због тога

$$63 - a = 3$$
$$b - 72 = 3,$$

тако да је

$$a = 60, \quad b = 75.$$

b) Из линеарне везе обележја X и Y следи и линеарна веза њихових средњих вредности, тако да је средина за Y дата изразом

$$\overline{Y} = 11\overline{X} + 202.$$

Средњу вредност за X добићемо из табеле

X	f	X·f	X^2·f
61.5	5	307.5	18911.25
64.5	18	1161.0	74884.50
67.5	42	2835.0	191362.50
70.5	27	1903.5	134196.75
73.5	8	588.0	43218.00
	100	6795	462573.00

$$\overline{X} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{k} X_i \cdot f_i = \frac{6795}{100} = 67.95$$

$$\overline{Y} = 11 \cdot 67.95 + 202 = 949.45$$

c)

$$S_x^2 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{k} X_i^2 \cdot f_i - \overline{X}^2 = \frac{1}{100} \cdot 462573.00 - 67.95^2 = 8.52$$

Коефицијент варијације за обележје X има вредност

$$V_x = \frac{S_x}{\overline{X}} \cdot 100 = 4.928(\%)$$

Варијансу обележја Y ћемо добити преко варијансе обележја X и линеарне везе:

$$S_y^2 = 11^2 \cdot S_x^2 = 1031.827$$

а коефицијент варијације за Y је

$$V_y = \frac{S_y}{\overline{Y}} \cdot 100 = 3.368(\%)$$

па се може констатовати да је коефицијент варијације већи код обележја X. Уосталом, то смо могли утврдити и из линеарне везе. Коефицијент варијације за обележје Y је једнак:

$$V_y = \frac{11 \cdot S_x}{11\overline{X} + 202} \cdot 100 = \frac{S_x}{\overline{X}} \cdot 100 \cdot \left(\frac{11}{11 + \frac{202}{\overline{X}}} \right)$$

односно

$$V_y = V_x \cdot \frac{11}{11 + \frac{202}{\overline{X}}}$$

У овом изразу, разломак има вредност мању од један (јер је $\overline{X}$ позитивно), па ће према томе, коефицијент варијације за Y бити мањи од коефицијента варијације обележја X.

Задатак 14. За обележја X и Y се зна да су линеарно зависна, тј.

$$Y = 2.17X + 74.56$$

Дати су подаци за облежје X:

X_k	7	8	11	13	19	22
f_k	14	12	16	12	34	12

a) Израчунати медијану обележја X,
b) Израчунати аритметичку средину обележја Y,
c) Донети закључак да ли је варијабилитет већи код обележја X или Y.

Решење:

a)

X_k	f_k	Σf_k	$X_k \cdot f_k$	$X_k^2 \cdot f_k$
7	14	14	98	686
8	12	26	96	768
11	16	42	176	1936
13	12	54	156	2028
19	34	88	646	12274
22	12	100	264	5808
Σ	100	/	1436	23500

$$N = 100 \qquad \frac{N}{2} = 50$$

$$Me = 13$$

b)

$$\overline{X} = \frac{1436}{100} = 14.36$$

$$\overline{Y} = 2.17 \cdot 14.36 + 74.56 = 105.72$$

c)

$$S_x^2 = \frac{23500}{100} - 14.36^2 = 28.7904$$
$$S_y^2 = 2.17^2 \cdot S_x^2 = 135.57$$

па је јасно да је варијанса обележја Y већа од варијансе обележја X. Уосталом, из линеарне везе Y=aX+b и релације

$$S_y^2 = a^2 \cdot S_x^2$$

следи да је варијанса обележја X већа од варијансе обележја Y, кад год је a<1 , што је тачно за овај пример.

Међутим, ако одредимо коефицијенте варијације, добићемо следеће резултате:

$$V_x = \frac{S_x}{\overline{X}} \cdot 100 = 37(\%)$$
$$V_y = \frac{S_y}{\overline{Y}} \cdot 100 = 11(\%)$$

Сад можемо закључити да је варијабилитет обележја X већи од варијабилитета обележја Y.

<u>Задатак 15.</u> Вредности обележја X на статистичком скупу су следеће:

38.5	19.8	16.2	2.64	2.5	13.6	42.3	21.3	18.3
14.4	36.2	19.7	16.2	10.7	3.15	13.42	19.5	3.3

a) Одредити вредност обележја X која представља најпогоднију меру централне тенденције,

b) Колика је квартилна девијација, а колика је стандардна девијација?

c) Који од параметара под b) представља бољу меру варијабилитета и зашто?

Решење:

a) Најпогоднија мера је аритметичка средина. Имаће вредност:

$$\overline{x} = \frac{1}{N} \cdot \sum_{i=1}^{N} X_i = \frac{1}{18} \cdot 311.71 = 17.317$$

b) Да би одредили квартилну девијацију, посматране вредности обележја X ћемо поређати у неопадајући низ. Биће то низ

2.5	2.64	3.15	3.3	10.70	13.42	13.6	14.4	16.2
16.2	18.3	19.5	19.7	19.8	21.3	36.2	38.5	42.3

Сад се види да је доњи квартил средина између четврте и пете вредности, тј.

$$X_{0.25} = \frac{1}{2} \cdot \left(X'_4 + X'_5 \right) = \frac{3.3 + 10.70}{2} = 7.00$$

На сличан начин ћемо одредити и горњи квартил. Биће то вредност

$$X_{0.75} = \frac{1}{2} \cdot \left(X'_{13} + X'_{14} \right) = \frac{19.7 + 19.8}{2} = 19.75$$

па је квартилна девијација:

$$Q = \frac{19.75 - 7.00}{2} = 6.375$$

Варијанса обележја X је једнака:

$$S^2 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i^2 - \overline{x}^2 = \frac{7776.7585}{18} - 17.317^2 = 132.164.$$

Стандардна девијација ће имати вредност:

$$S = 11.496$$

c) Боља мера варијабилитета је стандардна девијација, јер њена вредност зависи од одступања сваке вредности обележја X од његовог просека, док квартилна девијација зависи само од одступања прве и последње четвртине елемената од осталих елемената статистичког скупа.

<u>Задатак 16.</u> У циљу испитивања структуре радне снаге у трговини тражени су подаци о структури запослених. Добијени су следећи подаци за 10 продавница:

број мушкараца	4	8	9	11	7	3	2	7	5	7
број жена	6	8	10	9	8	3	3	8	6	7

Израчунати просечан број и варијансу запослених у трговини.

Решење:

X - Број мушкараца запослених у трговини; N_1=10;
Y - Број жена запослених у трговини, N_2=10
W - Број запослених (мушкараца и жена) у трговини

$$\overline{X} = \frac{1}{10}\sum_{i=1}^{10} X_i = \frac{63}{10} = 6.3$$

$$S_x^2 = \frac{1}{10}\sum_{i=1}^{10} X_i^2 - \overline{X}^2 = \frac{467}{10} - 6.3^2 = 7.01$$

$$\overline{Y} = \frac{1}{10}\sum_{i=1}^{10} Y_i = \frac{68}{10} = 6.8$$

$$S_y^2 = \frac{1}{10}\sum_{i=1}^{10} Y_i^2 - \overline{Y}^2 = \frac{512}{10} - 6.8^2 = 4.96$$

$$\overline{W} = \frac{N_1 \cdot \overline{X} + N_2 \cdot \overline{Y}}{N_1 + N_2} = \frac{10 \cdot 6.3 + 10 \cdot 6.8}{10 + 10} = 6.55$$

$$S_w^2 = \frac{N_1 \cdot S_x^2 + N_2 \cdot S_y^2}{N_1 + N_2} + \frac{N_1 \cdot N_2}{N_1 + N_2}\left(\overline{X} - \overline{Y}\right)^2$$

$$S_w^2 = \frac{10 \cdot 7.01 + 10 \cdot 4.96}{10 + 10} + \frac{10 \cdot 10}{10 + 10}(6.3 - 6.8)^2 = 7.235$$

<u>Задатак 17.</u> Дати су подаци о вредности обележја X

X	210-	200-210	190-200	180-190	170-180	160-170	-160
f_k	17	15	10	14	16	10	18

Израчунати мере варијабилитета.

Решење:

$$N = 100; \quad \sum_{i=1}^{k} x_i f_i = 18510; \quad \sum_{i=1}^{k} x_i^2 f_i = 3470300;$$
$$\overline{x} = 185.1$$

1. $R = X_{\max} - X_{\min} = 220 - 150 = 70$

2. $Q = \dfrac{204.66667 - 167}{2} = 18.83$

3. $e_m = 18.116$

4. $S^2 = 440.99$

5. S=20.999

6. $V = 11.345\,(\%)$

<u>**Задатак 18.**</u> За податке из претходног задатка израчунати:
a) Први и други обични моменат,
b) Први други трећи и четврти централни моменат,
c) Испитати спљоштеност.

Решење:

a)

$$m_1 = \overline{x} = 185.1$$
$$m_2 = 34703$$

b)

$$\mu_1 = 0$$
$$\mu_2 = S^2 = 440.99$$
$$\mu_3 = -62.3$$
$$\mu_4 = 326098.46$$

c)

$$\beta_2 = \frac{\mu_4}{S^4} = 1.68$$

$\beta_2 < 3 \Rightarrow$ расподела има спљоштеност мању од нормалне

Задатак 19. Дати су подаци о обележју X

X_i	(-5,0)	(0,5)	(5,10)	(10,15)
f_i	20	35	27	18

Одредити коефицијент асиметрије Ka.

Решење:

$$N = 100; \quad \sum_i x_i f_i = 465; \quad \sum_i x_i^2 f_i = 4675$$
$$\bar{x} = 4,65 \quad S^2 = 25,13 \quad S = 5,013 \quad M_e = 4.286$$

$$K_a = \frac{3(4.65 - 4.286)}{5.013} = 0.22$$

$Ka > 0 \Rightarrow$ Расподела је асиметрична у лево.

<u>Задатак 20.</u> Дате су вредности обележја X

21	22	34	34	15	21	12	23	33	34	15	22
23	34	12	33	33	25	22	26	26	21	22	20

Израчунати средње вредности.

Решење:

$$\bar{x} = 24.29$$
$$M_{o1} = 22$$
$$M_{o2} = 34$$
$$M_e = 22.5$$
$$G = 23.2$$
$$H = 22.1$$

<u>Задатак 21</u>. Ако су за неку расподелу фреквенција обични моменти:

$$m_1=1;\ m_2=2;\ m_3=3$$

a) Испитати (преко Пирсоновог коефицијента) тип асиметрије полигона фреквенција,

b) Одредити четврти обични моменат (m_4), тако да дати полигон фреквенција има нормалну спљоштеност.

Решење:

$$m_1=m=1$$
$$m_2=2$$
$$m_3=3$$

a) $\beta_1 = \dfrac{\mu_3}{S^3}$ први Пирсонов коефицијент

$$S^2 = \mu_2 = m_2 - m^2 = 1$$
$$\mu_3 = m_3 - 3m_2 m + 2m^3 = -1$$
$$S = +\sqrt{S^2}$$
$$S^3 = 1$$
$$\beta_1 = \frac{-1}{1}$$
$$\beta_1 = -1 < 0$$

Расподела је асиметрична удесно.

b) $\beta_2 = \dfrac{\mu_4}{S^4}$ други Пирсонов коефицијент

Да би дати полигон фреквенција имао нормалну спљоштеност треба да важи:

$$\beta_2 = 3$$
$$S = 1$$
$$\mu_4 = \beta_2$$

Следи да треба да буде:

$$\mu_4 = 3$$
$$\mu_4 = m_4 - 4m_3 m + 6m_2 m^2 - 3m^4$$
$$3 = m_4 - 4 \cdot 3 + 6 \cdot 2 \cdot 1 - 3 \cdot 1$$
$$m_4 = 6$$

<u>Задатак 22.</u> Одредити варијабилитет, асиметрију и спљоштеност обележја X, које је дато вредностима:

X: 10, 0, 5, 0, 10, 0, 10

Користећи:

a) Размак варијације,
b) Коефицијент варијације,
c) Средње апсолутно одступање у односу на аритметичку средину,
d) Први Пирсонов коефицијент асиметрије,
e) Други Пирсонов коефицијент спљоштености.

Решење:

$$\overline{X} = \frac{1}{n}\sum X_i f_i = \frac{1}{7}35 = 5$$

$$S_x^2 = \frac{1}{n}\sum X_i^2 f_i - \overline{X}^2 = \frac{1}{7}325 - 25 = 21.4$$

$$S_x = \sqrt{S_x^{\ 2}} = 4.6$$

a) R=X_{max}-X_{min}=10-0=10

b) $V = \frac{S}{\overline{X}}100(\%) = \frac{4.6}{5}100 = 92\%$

c) $e_m = \frac{1}{n}\sum \left|X_i - \overline{X}\right| f_i = 4.3$

d) $\beta_1 = \frac{\mu_3}{S^3} = \frac{0}{4.6^3} = 0$ Расподела обележја X је симетрична.

е)

$$\mu_4 = \frac{1}{n}\sum\left(X_i - \bar{X}\right)^4 = 535.7$$

$$\beta_2 = \frac{\mu_4}{S^4} = \frac{535.7}{457.96} = 1.17 \Rightarrow \beta_2 < 3$$

Спљоштеност је мања од нормалне.

<u>Задатак 23.</u> У групи од 150 посматраних уређаја марке А добијен је средњи век трајања од 17 месеци са варијансом од 3,2 месеца. У групи од 70 уређаја марке В средњи век трајања износи 19 месеци, а варијанса 2.8, док у групи од 100 уређаја марке С средњи век трајања рада износи 21, а варијанса 4.3 месеца. Колико износи средњи век рада свих посматраних уређаја, а колико варијанса без обзира на марку?

Решење:

Користе се особине средње вредности и варијансе за стратификоване скупове.

$$\begin{array}{lll} N_1 = 150 & N_2 = 70 & N_3 = 100 \\ \bar{X}_1 = 17 & \bar{X}_2 = 19 & \bar{X}_3 = 21 \\ S_1^2 = 3.2 & S_2^2 = 2.8 & S_3^2 = 4.3 \end{array}$$

$$\bar{X} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{k} N_i \bar{X}_i = \frac{1}{320}\left(150\cdot 17 + 70\cdot 19 + 100\cdot 21\right) = \frac{5980}{320} = 18.7$$

$$S^2 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{k} N_i S_i^2 + \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{k} N_i \left(\overline{X}_i - \overline{X}\right)^2$$

$$S^2 = \frac{1}{320}\left(150\cdot 3.2 + 70\cdot 2.8 + 100\cdot 4.3\right) +$$
$$+\frac{1}{320}\cdot\left[150\left(17-18.7\right)^2 + 70\left(19-18.7\right)^2 + 100\left(21-19.7\right)^2\right]$$

$$S^2 = 3.46 + 3.03 = 6.5$$

$$S = 6.5$$

Задатак 24. Дати су подаци који представљају век трајања одређеног типа кондензатора (у часовима);

6800	6200	7100	7290	6000	9130	11500	8900	9310	6400
7520	9040	8020	10500	11800	6900	8340	7200	10880	8910
7330	8380	7500	8990	10680	7400	9640	10960	9800	8520
9990	7466	8800	9200	7980	8100	7280	7830	7300	7700

a) Средити податке у интервалну класификацију са ширином интервала 1000,

b) Израчунати мере варијабилитета,

c) На хистограму релативних фреквенција графички представити квартиле.

Решење:

a)

i	$a_{i-1}-a_i$ (000)	f_i	x_i	$\sum f_j$	$x_i f_i$	$\lvert x_i-\overline{x}\rvert f_i$	p_i	$x_i^{\,2} f_i$
1	6-7	5	6500	5	32500	9750	0.125	211250000
2	7-8	13	7500	18	97500	1235	0.325	731250000
3	8-9	9	8500	27	76500	450	0.225	650250000
4	9-10	7	9500	34	66500	7350	0.175	631750000
5	10-11	4	10500	38	42000	8200	0.100	441000000
6	11-12	2	11500	40	23000	6100	0.050	264500000
		40			338000	44200	1.000	2930000000

$$\overline{X}=\frac{1}{N}\sum x_i f_i=\frac{1}{40}338000=8450$$

$$\overline{X}^{\,2}=71402500$$

b)

1. Размак варијације

$$R=X_{\max}-X_{\min}=11800-6000=5800$$

2. Квартална девијација

$$Q=\frac{X_{0.75}-X_{0.25}}{2}$$

$$\frac{\mathrm{N}}{4}=10 \qquad \frac{3\mathrm{N}}{4}=30$$

$$X_{0.25}=a_s+\frac{a_{s+1}-a_s}{f_{s+1}}\left(\frac{N}{4}-\sum_{i=1}^{S} f_i\right)$$

$$\sum_{i=1}^{S} f_i < 10, \quad \sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{S}} f_i > 10, \quad s = 1$$

$$X_{0.25} = 7000 + \frac{1000}{13}(10 - 5) = 7384.6$$

$$X_{0.75} = a_p + \frac{a_{p+1} - a_p}{f_{p+1}}\left(\frac{3N}{4}\sum_{i=1}^{p} f\right)$$

$$\sum_{i=1}^{p} f_i < \frac{3N}{4} = 30, \quad \sum_{i=1}^{\mathrm{p}+1} f_i > 30, \quad \mathrm{p} = 3$$

$$\mathrm{X}_{0.75} = 9000 + \frac{1000}{7}(30 - 27) = 9428.57$$

$$Q = \frac{9428.57 - 7384.6}{2} = 1021.99$$

3. Средња девијација

$$e_m = \frac{1}{N}\sum\left(X_i - \overline{X}\right)f_i$$

$$e_m = \frac{1}{40}44200 = 1105$$

4. Варијанса

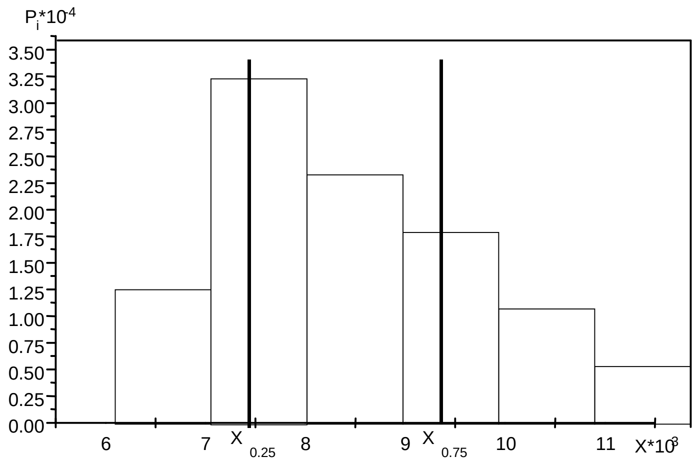
$$S^2 = \frac{1}{N}\sum X_i^2 - \overline{X}^2 = \frac{1}{400}2930000000 - 71402500 = 1847500$$

5. Стандардна девијација

$$S = \sqrt{S^2} = 135928$$

6. Коефицијент варијације

$$V = \frac{S}{X}100 = 16.08(\%)$$



Задатак 25. Извршено је 50 мерења времена реакције једног човека и добијени су следећи резултати (у хиљадитим деловима секунде):

196	173	186	189	173	165	167	160	140	174
180	151	157	164	154	169	190	180	163	157
163	167	165	160	177	165	157	177	159	175
166	173	185	177	184	183	184	162	192	174
162	165	172	158	169	146	170	171	169	168

За дате податке:

a) Формирати расподелу апсолутних и релативних фреквенција,

b) Одредити модус, медијану и аритметичку средину,

c) Израчунати други и трећи централни моменат.

Решење:

a) Прво одређујемо број групних интервала (k) применом тзв. Стургесовог правила:

$$k = 1 + 3.3 \cdot \log N$$

$$k = 1 + 3.3 \cdot \log 50 = 6.61$$

X	X_i	f_i	f_i/N	Σf_i	$f_i \cdot X_i$	$(Xi - \bar{x})$	$(Xi - \bar{x})^2$	$(Xi - \bar{x})^3$
[130-140]	135	1	0.02	1	135	-33.8	1142.44	-38614.5
(140-150]	145	1	0.02	2	145	-23.8	566.44	-13481.3
(150-160]	155	9	0.18	11	1395	-124.2	1713.96	-23652.6
(160-170]	165	17	0.34	28	2805	-64.6	245.48	-932.824
(170-180]	175	13	0.26	41	2275	80.6	499.72	3098.264
(180-190]	185	7	0.14	48	1295	113.4	1837.08	29760.7
(190-200]	195	2	0.04	50	390	52.4	1372.88	35969.46
сума		50			8440	0	7378	-7852.83

b) $M_0 = 165$

$$M_e = a_s + \frac{a_{s+1} - a_s}{f_{s+1}} \left(\frac{N}{2} - \sum_{i=1}^{s} f_i \right)$$

$$M_e = 160 + \frac{10}{17}(25 - 11) = 168.24$$

$$\overline{X} = \frac{\sum_{i=1}^{k} f_i X_i}{N} = \frac{8440}{50} = 168.8$$

c)

$$\mu_r = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{k} (x_i - \overline{x})^r \cdot f_i$$

$$\mu_2 = \frac{7378}{50} = 147.56$$

$$\mu_3 = \frac{-7852.83}{50} = -157.0566$$

<u>Задатак 26.</u> У току једне седмице мерен је проток података локалног провајдера са остатком света. При томе су добијени следећи резултати протока (у KB**)** почев од понедељка:

256, 384, 360, 400, 512, 720, 528.

Израчунати:

a) Све мере централне тенденције,

b) Мере варијабилитета.

Решење:

a)

256, 360, 384, 400, 528, 720

X_i	$1/X_i$	X_i^2	$\lvert X_i - \bar{x} \rvert$
256	0.003906	65536	195.428
384	0.002604	147456	67.428
360	0.002778	129600	91.428
400	0.0025	160000	51.428
512	0.001953	262144	60.572
720	0.001389	518400	268.572
528	0.001894	278784	76.572
3160	0.017024	1561920	811.428

$$\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^{N} X_i}{N} = \frac{3160}{7} = 451.428$$

$$\log G = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} \log X_i = \frac{1}{7}18.44017 = 2.634$$

$$G = 10^{2.6343} = 430.834$$

$$\frac{1}{H} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{X_i} = \frac{1}{7}0.017024 = 0.00243$$

$$H = \frac{1}{0.00243} = 411.1806$$

$$M_e = 400$$

b) $\bar{X} = 451.42$

$$R = X\max - X\min = 720 - 256 = 464$$

$$Q = \frac{X_{0.75} - X_{0.25}}{2} = \frac{720 - 360}{2} = 180$$

$$X_{0.25} = X_{\frac{N+1}{4}} = X_2 = 360 \qquad X_{0.75} = X_{\frac{3(N+1)}{4}} = X_6 = 720$$

$$e_m = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left| X_i - \bar{X} \right| = \frac{811.428}{7} = 115.918$$

$$S^2 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} X_i^2 - \bar{X}^2 = \frac{1561920}{7} - 203787.239 = 19344.189$$

$$S = 139.084$$

$$V = 100 \cdot \frac{S}{\bar{X}} = \frac{139.08339}{451.428} \cdot 100 = 30.81\%$$

Задатак 27. Вредности Народног дохотка Републике Србије од 1983. до 1988. године дате су у табели

Година	1983	1984	1985	1986	1987	1988
Народни доходак	130962	132453	132605	137468	135099	133388

a) Израчунати ланчане индексе,

b) Израчунати базне индексе (за базу узети Народни доходак у 1983.),

c) Израчунати стопе промена као и просечну стопу промене за цели период.

Решење:

t	Година	Народни доходак	LI	BI (1983 = 100)	SP (LI) (%)	SP (BI) (%)
1	1983	130962	-	100.0	-	-
2	1984	132453	101.1	101.1	1.1	1.1
3	1985	132605	100.1	101.3	0.1	1.3
4	1986	137468	103.7	105.0	3.7	5.0
5	1987	135099	98.3	103.2	-1.7	3.2
6	1988	133388	98.7	101.9	-1.3	1.9

а)

$$LI : I_{t/t-1} = \frac{X_t}{X_{t-1}} \cdot 100\,(\%)$$

$$t = 2, \quad LI = \frac{X_2}{X_1} \cdot 100 = \frac{132453}{130962} \cdot 100 = 101.1(\%)$$

$$t = 3, \quad LI = \frac{X_3}{X_2} \cdot 100 = \frac{132605}{132458} \cdot 100 = 100.1(\%)$$

$$t = 4, \quad LI = \frac{X_4}{X_3} \cdot 100 = \frac{137468}{132605} \cdot 100 = 103.7\,(\%)$$

$$t = 5, \quad LI = \frac{X_5}{X_4} \cdot 100 = \frac{135099}{137468} \cdot 100 = 98.3(\%)$$

$$t = 6, \quad LI = \frac{X_6}{X_5} \cdot 100 = \frac{133388}{135099} \cdot 100 = 98.7\,(\%)$$

b)

$$BI = \frac{X_t}{X_0} \cdot 100\,(\%)$$

База је 1983. година, па је:

$$BI = \frac{X_t}{130962} \cdot 100\,(\%)$$

$$t = 1, \quad BI = \frac{130962}{130962} \cdot 100 = 100\,(\%)$$

$$t = 2, \quad BI = \frac{132453}{130962} \cdot 100 = 101{,}1\,(\%)$$

$$t = 3, \quad BI = \frac{137468}{130962} \cdot 100 = 101.3\,(\%)$$

$$t = 4, \quad BI = \frac{1347468}{130962} \cdot 100 = 105.0\,(\%)$$

$$t = 5, \quad BI = \frac{135099}{130962} \cdot 100 = 103.2\,(\%)$$

$$t = 6, \quad BI = \frac{135388}{130962} \cdot 100 = 101.9\,(\%)$$

c)

$$SP = I - 100\,(\%)$$

$$PSP = \sqrt[t-1]{\frac{X_t}{X_1}} \cdot 100 - 100\,(\%)$$

$$PSP = \sqrt[6-1]{\frac{133388}{130962}} \cdot 100 - 100\,(\%) = \sqrt[5]{1.0185} \cdot 100 - 100 = 0.36\,(\%)$$

Задатак 28. Дати су подаци о робном промету (у тонама) за период 1983. - 1987. с тим што недостају подаци за 1986. годину.

Година	1983	1984	1985	1987
Робни промет	685	812	1134	1318

a) Израчунати стопе промена за дати период,

b) Колика је просечна стопа промене робног промета у датом периоду?

Решење:

a)

$$LI \quad : \quad I_{t/t-1} = \frac{X_t}{X_{t-1}} \cdot 100\,(\%)$$

$$SP = I - 100\,(\%)$$

год.	Промет	LI	SP
1983	685	/	/
1984	812	118.5	18.5
1985	1134	139.6	39.6
1987	1318	116.2	16.2

b)

$$PSP = \sqrt[t-1]{\frac{X_t}{X_1}} \cdot 100 - 100\,(\%)$$

$$PSP = \sqrt[4]{\frac{1318}{685}} \cdot 100 - 100 = 17.776\,(\%)$$

Задатак 29. Дати су подаци о робном промету (у тонама) за период 1983. - 1987.

година	1983	1985	1986	1987
робни промет	695	821	1314	1118

a) Израчунати стопе промена за дати период,

b) Колика је просечна стопа промене робног промета у датом периоду?

Решење:

a)

$$LI \quad : \quad I_{t/t-1} = \frac{X_t}{X_{t-1}} \cdot 100\,(\%)$$

$$SP = I - 100\,(\%)$$

год.	промет (t)	LI	SP
1983	695	/	/
1985	821	118.13	+18.13
1986	1314	160.05	+60.05
1987	1118	85.08	-14.92

b)

$$PSP = \sqrt[t-1]{\frac{X_t}{X_1}} \cdot 100 - 100\,(\%)$$

$$PSP = \sqrt[4]{\frac{1118}{695}} \cdot 100 - 100 = 12.62$$

<u>Задатак 30.</u> Дати су подаци о броју запослених у електропривреди Београда.

Година	1974	1975	1976	1977	1978	1979	1980	1981
Број запослених	165	164	165	178	180	175	196	194

a) Колика је просечна стопа раста броја запослених у посматраном периоду?

b) Одреди коефицијент варијације броја запослених,

c) Ако између броја запослених (L) и количине производње (Q) постоји линеарна веза

$$Q = 4.64L + 156.36$$

колика ће бити просечна вредност и варијанса количине производње.

Решење:

a)

$$PSP = \sqrt[7]{\frac{194}{165}} \cdot 100 - 100 = 2.34(\%)$$

b) Просечна вредност броја запослених је

$$\bar{x} = \frac{1}{8}(165 + 164 + 165 + 178 + 180 + 175 + 196 + 194) = 177.125$$

Варијанса

$$S^2 = \frac{1}{8}(165^2 + \ldots + 194^2) - 177.125^2 = 140.11$$

Коефицијент варијације броја запослених

$$V = \frac{S}{\overline{x}} \cdot 100 = 6.68(\%)$$

c) Из линеарне везе количине производње и броја запослених, проистиче и линеарна веза између њихових просечних вредности, тако да је просечна количина производње једнака

$$\overline{Q} = 4.64\overline{L} + 156.36 = 978.22$$

Варијанса количине производње дата је изразом:

$$S^2(Q) = 4.64^2 \cdot S^2(L) = 3016.5$$

<u>Задатак 31.</u> Дати су подаци о просечној заради запослених у једном предузећу

Година	1983	1984	1985	1986	1987
Нето зарада	685	812	1134	1013	1318

a) Израчунати стопе промена просечних зарада,
b) Израчунати стопу промене за цели период,
c) Колико се у просеку мењала просечна зарада запослених у датом периоду?

Решење:

a)

Година	Н. зараде	SP
1983	685	-
1984	812	18.5%
1985	1134	39.6%
1986	1013	-10.7%
1987	1318	30.1%

b) Стопа промене за цели период је

$$SP = \left(\frac{X_t}{X_1} - 1 \right) \cdot 100 = 92.4(\%)$$

c) Просечна стопа промена је

$$PSP = \sqrt[4]{\frac{1318}{685}} \cdot 100 - 100 = 17.776(\%)$$

<u>Задатак 32.</u> Дат је извештај са девизног тржишта курсева неких валута:

Земља	Валута	Важи за	Курс у дин. на дан	
			22.9.87	24.9.87
Француска	Франак	100	14039	14028
Швајцарска	Франак	100	56514	56617
Немачка СР	Марка	100	46793	46891

Одредити на две децимале у ком се проценту дневно мењао курс одговарајућих валута.

Решење:

$$PSP = \sqrt[t-1]{\frac{x_t}{x_1}}100 - 100(\%)$$

$$PSP_F = \sqrt[3-1]{\frac{14028}{14039}}100 - 100 = -0.039\%$$

$$PSP_S = \sqrt[3-1]{\frac{56617}{56514}}100 - 100 = 0.09\%$$

$$PSP_N = \sqrt[3-1]{\frac{46891}{46793}}100 - 100 = 0.10\%$$

<u>Задатак 33.</u> У осмогодишњем периоду динамика производње аутомобила марке Фиат била је:

Година	1989	1990	1991	1992	1993	1994	1995	1996
Производња (мил. комада)	7.1	8.1	8.6	7.4	4.9	5.1	6.3	6.9

a) Израчунати све мере централне тенденције,
b) Израчунати све мере дисперзије,
c) Каква је релативна промена производње из године у годину?
d) Колико износи релативна промена за цео период?

Решење:

а)

$$\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^{N} X_i}{N} = \frac{54.4}{8} = 6.8$$

$$\log G = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} \log X_i = \frac{6.599429}{8} = 0.825$$

X_i	log X_i	$1/X_i$	X_i^2	$\lvert X_i - \bar{x} \rvert$	Li
7.1	0.851258	0.140845	50.41	0.3	
8.1	0.908485	0.123457	65.61	1.3	114.0845
8.6	0.934498	0.116279	73.96	1.8	106.1728
7.4	0.869232	0.135135	54.76	0.6	86.04651
4.9	0.690196	0.204082	24.01	1.9	66.21622
5.1	0.70757	0.196078	26.01	1.7	104.0816
6.3	0.799341	0.15873	39.69	0.5	123.5294
6.9	0.838849	0.144928	47.61	0.1	109.5238
54.4	6.599429	1.219534	382.06	8.2	

$$G = 10^{0.82493} = 6.6823$$

$$\frac{1}{H} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{X_i} = \frac{1.219534}{8} = 0.15244175$$

$$H = \frac{1}{0.15244} = 6.55989$$

$$M_e = 7$$

b) $\bar{X} = 6.8$

$$R = X\max - X\min = 8.6 - 4.9 = 3.7$$

$$Q = \frac{X_{0.75} - X_{0.25}}{2} = \frac{7.4 - 5.1}{2} = 1.15$$

$$S^2 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} X_i^2 - \bar{X}^2 = \frac{382.06}{8} - 46.24 = 1.5175$$

$$S = 1.23187$$

$$e_m = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left|X_i - \bar{X}\right| = \frac{8.2}{8} = 1.025$$

$$V = 100 \cdot \frac{S}{\bar{X}} = \frac{1.23187}{6.8} \cdot 100 = 18.1157$$

c) $LI : I_{t/t-1} = \dfrac{X_t}{X_{t-1}} \cdot 100$

$$t = 2, LI = \frac{8.1}{7.1}100 = 114.085\%$$

$$t = 3, LI = \frac{8.6}{8.1}100 = 106.173\%$$

$$t = 4, LI = \frac{7.4}{8.6}100 = 86.0465\%$$

$$t = 5, LI = \frac{4.9}{7.4}100 = 66.2162\%$$

$$t = 6, LI = \frac{5.1}{4.9}100 = 104.082\%$$

$$t = 7.LI = \frac{6.3}{5.1}100 = 123.529\%$$

$$t = 8, LI = \frac{6.9}{6.3}100 = 109.524\ \%$$

d) $SP = \frac{X_t}{X_1} \cdot 100 - 100\% = \frac{6.9}{7.1} \cdot 100 - 100 = -2.8169\%$

<u>**Задатак 34.**</u> Дата је матрица података мерења толеранције X у gr. и тежине Y у kg.

X / Y	-1	0	1
100	1	5	3
150	2	9	7

Израчунати коефицијент корелације обележја X и Y за дату матрицу података.

Решење:

N=27

X / Y	-1	0	1	$p_{i.}$
100	0.04	0.19	0.11	0.34
150	0.07	0.33	0.26	0.66
$p_{.j}$	0.11	0.52	0.37	1.00

$$\bar{X} = m_{10} = -1 \cdot 0.11 + 0 \cdot 0.52 + 1 \cdot 0.37 = 0.26$$
$$\bar{Y} = m_{01} = 100 \cdot 0.34 + 150 \cdot 0.66 = 133$$

$$m_{20} = (-1)^2 \cdot 0.11 + 0^2 \cdot 0.52 + 1^2 \cdot 0.37 = 0.48$$
$$m_{02} = 100^2 \cdot 0.34 + 150^2 \cdot 0.66 = 18250$$

$$m_{11} = -1 \cdot 100 \cdot 0.04 + 0 \cdot 100 \cdot 0.19 + 1 \cdot 100 \cdot 0.11 + (-1) \cdot 150 \cdot 0.07 +$$
$$+ 0 \cdot 150 \cdot 0.33 + 1 \cdot 150 \cdot 0.26 = -4 + 11 - 10.5 + 39 = 35.5$$

$$S_x^2 = m_{20} - m_{10}^2 = 0.48 - (0.26)^2 = 0.41$$
$$S_y^2 = m_{02} - m_{01}^2 = 18250 - (133)^2 = 561$$
$$S_x = 0.64$$
$$S_y = 23.69$$

$$\rho = \frac{\mathrm{cov}(x, y)}{\sqrt{S_x^2 \cdot S_y^2}} = \frac{m_{11} - m_{10} \cdot m_{01}}{S_x \cdot S_y} = \frac{35.5 - 0.26 \cdot 133}{0.64 \cdot 23.69} = 0.06$$

2. ВЕРОВАТНОЋА

Задатак 1. Колика је вероватноћа да у једном бацању хомогене коцкице са горње стране:

a) буде три,
b) не буде три,
c) буде број мањи од три,
d) буде број већи од три.

Решење:

Претпоставља се да је коцкица хомогена, тј. да је свака од њених шест страна подједнако вероватна. Могу се дефинисати следећи случајни догађаји:

A_i = Пао је број i, i = 1, 2, 3, 4, 5, 6

Догађаји A_i се међусобно искључују и важи да је:

$$P(A_i) = \frac{1}{6}, \quad i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$$

a) Тражена вероватноћа је:

$$P(A_3) = \frac{1}{6}$$

b) Посматрани догађај је супротан догађају A_3, па је одговарајућа вероватноћа:

$$P(\overline{A}_3) = 1 - P(A_3) = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$$

c) Може се дефинисати нови случајни догађај

C - Пао је број мањи од 3

Он представља унију догађаја A_1 и A_2 који се међусобно искључују. Зато је:

$$C = A_1 + A_2$$

$$\mathrm{P}(C) = \mathrm{P}(A_1) + \mathrm{P}(A_2) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$$

d) Аналогно решењу под **c)** биће:

$$\mathrm{P}(D) = \mathrm{P}(A_4) + \mathrm{P}(A_5) + \mathrm{P}(A_6) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$$

Задатак 2. Из шпила од 52 карте, на случајан начин, се извлачи једна карта. Одредити вероватноћу да је извучена карта:

a) краљ,
b) пик,
c) краљ пик,
d) није краљ пик,
e) пик или треф.

Решење:

a) Пошто се у једном шпилу од 52 карте налазе 4 краља, вероватноћа P(*K*), да ће извучена карта бити краљ, је:

$$P(K)=\frac{4}{52}=\frac{1}{13}$$

b) Пошто има 13 пикова у шпилу од 52 карте,

$$P(P)=\frac{13}{52}=\frac{1}{4}$$

c) Постоји само један краљ пик у шпилу, па је

$$P(K_P)=\frac{1}{52}$$

d) Вероватноћа да неће бити извучен краљ пик је

$$P(\overline{K}_p)=1-P(K_p)=1-\frac{1}{52}=\frac{51}{52}$$

e) $P(T+P)=P(T)+P(P)=\frac{13}{52}+\frac{13}{52}=\frac{1}{2}$

<u>**Задатак 3.**</u> У кутији се налази 5 лоптица црвене боје, 3 плаве и 2 зелене. Из кутије се, на случајан начин, извлачи једна куглица. Која је вероватноћа да извучана куглица:

a) буде црвена (догађај *C*),

b) буде плава (догађај *P*),

c) буде зелена (догађај *Z*),
d) не буде плава,
e) не буде зелена,
f) буде црвена или плава (догађај *F*).

Решење:

a) $P(C)=\dfrac{5}{10}=0.5$

b) $P(P)=\dfrac{3}{10}=0.3$

c) $P(Z)=\dfrac{2}{10}=0.2$

d) $P\left(\overline{P}\right)=1-P(P)=1-0.3=0.7$

e) $P\left(\overline{Z}\right)=1-P(Z)=1-0.2=0.8$

f) $P(F) = P(C + P) = P(C) + P(P) = 0.5 + 0.3 = 0.8$

(До резултата се могло доћи и на основу чињенице да је догађај *F* супротан догађају *Z*.)

<u>Задатак 4.</u> Одредити вероватноћу следећих догађаја:
a) Две петице у два бацања коцкице (догађај *A*),
b) Тројке на обе коцкице које се баце истовремено (догађај *B*),
c) Две плаве лоптице у два извлачења из посуде описане у задатку 3, ако се лоптица извучена у првом извлачењу враћа у кутију пре другог извлачења (догађај *C*),
d) Три дечака у породици са троје деце (догађај *D*).

Решење:

Сви описани догађаји могу се представити као пресеци независних догађаја. У случају независних догађаја, вероватноћа њиховог пресека једнака је производу одговарајућих појединачних вероватноћа.

a) $P(A) = P(5 \cap 5) = P(5) \cdot P(5) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$

b) $P(B) = P(3 \cap 3) = P(3) \cdot P(3) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$

c) Пошто се извучена лоптица враћа у посуду, вероватноћа да се плава лоптица извуче (догађај P) други пут је иста као за прво извлачење. Догађаји су независни, па је

$$P(C) = P(P \cap P) = P(P) \cdot P(P) = \frac{3}{10} \cdot \frac{3}{10} = \frac{9}{100} = 0.09$$

d) Пошто је рађање дечака (D) сваки пут догађај независан од претходног и са вероватноћом 0.5, биће:

$$P(D) = P(D \cap D \cap D) = P(D) \cdot P(D) \cdot P(D) = (0.5)^3 = 0.125$$

Задатак 5. Направити листу могућих исхода за истовремено бацање две коцкице. Одредити вероватноћу да:

a) збир на коцкицама буде 8 (догађај A),
b) збир на коцкицама буде највише 5 (догађај B),
c) збир на коцкицама буде најмање 5 (догађај C),
d) обе коцкице показују исти број (догађај D),

e) прва коцкица показује број мањи од друге (догађај E),
f) су добијени бројеви узајамно прости (немају заједничких чинилаца већих од 1) (догађај F).

Решење:

Бацање сваке коцкице појединачно има шест једнако вероватних и независних исхода. Пошто се сваки од шест исхода једне коцкице може појавити у комбинацијиа са свих шест исхода друге коцкице, посматрани експеримент има укупно 36 подједнако вероватних исхода. У табели 2 су дати сви исходи као уређени парови. Први број се односи на исход бацања прве коцкице, а други на другу коцкицу. (Коцкице се могу обележити различитим бојама.)

Табела 2. Исходи истовременог бацања две коцкице

(1,1)	(2,1)	(3,1)	(4,1)	(5,1)	(6,1)
(1,2)	(2,2)	(3,2)	(4,2)	(5,2)	(6,2)
(1,3)	(2,3)	(3,3)	(4,3)	(5,3)	(6,3)
(1,4)	(2,4)	(3,4)	(4,4)	(5,4)	(6,4)
(1,5)	(2,5)	(3,5)	(4,5)	(5,5)	(6,5)
(1,6)	(2,6)	(3,6)	(4,6)	(5,6)	(6,6)

a) Од 36 могућих и једнако вероватних исхода, пет исхода у збиру даје број осам. То су: (6,2), (5,3), (4,4), (3,5) и (2,6). Тражена вероватноћа је, према томе:

$$P(A)=\frac{5}{36}$$

b) За дефинисани догађај (B) повољни су исходи: (1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (2,2), (2,3), (3,2), (4,1), (3,1) и (2,1). Има их укупно 10, па је тражена вероватноћа:

$$P(B)=\frac{10}{36}=\frac{5}{18}$$

c) Аналогно претходном: $P(C)=\frac{30}{36}=\frac{5}{6}$

d) $P(D)=\frac{6}{36}=\frac{1}{6}$

e) $P(E)=\frac{15}{36}=\frac{5}{12}$

f) Мање је исхода који одговарају догађају супротном догађају F. Исходи код којих елементи уређеног пара имају заједничке чиниоце веће од један су: (2,4), (4,2), (2,6), (6,2), (4,6), (6,4), (3,6), (6,3) и пет парова (i,i), za i=2,3,4,5,6. Следи да је

$$P(\overline{F})=\frac{13}{36}$$

$$P(F)=1-P(\overline{F})=1-\frac{13}{36}=\frac{23}{36}$$

<u>Задатак 6.</u> Одредити вероватноћу да се из кутије описане у задатку 3. извуку:

a) Две плаве куглице у два извлачења без враћања (догађај A),

b) Три плаве куглице у три извлачења, без враћања (догађај B),

c) Три плаве куглице у три извлачења са враћањем (догађај C).

Решење:

У случају извлачења без враћања, садржај кутије у наредним извлачењима зависи од претходно извучених куглица, па се вероватноћа извлачења куглице одређене боје мења. Ако се куглице враћају, као што је раније наглашено, садржај кутије се не мења и вероватноћа извлачења куглице одређене боје остаје иста.

Могу се дефинисати случајни догађаји:

P_i - Извучена је плава лоптица у i–том извлачењу, i = 1, 2, 3

а) Тражи се вероватноћа догађаја $A = P_1 \cap P_2 = P_1 \cdot P_2$

Догађаји P_1 и P_2 нису независни, па за одређивање вероватноће догађаја A треба користити формулу:

$$P(P_1 \cdot P_2) = P(P_1) \cdot P(P_2 | P_1)$$

Одговарајуће вероватноће су:

$$P(P_1) = \frac{3}{10} \qquad P(P_2 | P_1) = \frac{2}{9}$$

па је:

$$P(A) = \frac{3}{10} \cdot \frac{2}{9} = \frac{1}{15}$$

Тражена вероватноћа може се израчунати и као количник броја комбинације друге класе од три елемента (број начина избора две од три плаве куглице у два извлачења без враћања) и броја комбинација друге класе од десет елемената (број начина избора две од десет куглица које се налазе у кутији у два извлачења без враћања), т.ј.

$$P(A)=\frac{\binom{3}{2}}{\binom{10}{2}}=\frac{\frac{3\cdot 2}{2\cdot 1}}{\frac{10\cdot 9}{2\cdot 1}}=\frac{1}{15}$$

b) Аналогно претходном, вероватноћа догађаја *B* је:

$$P(B)=\frac{\binom{3}{3}}{\binom{10}{3}}=\frac{\frac{3\cdot 2\cdot 1}{3\cdot 2\cdot 1}}{\frac{10\cdot 9\cdot 8}{3\cdot 2\cdot 1}}=\frac{1}{120}$$

c) Пошто се ради о извлачењу куглица са враћањем,

$$P(C)=\left(\frac{3}{10}\right)^3=\frac{27}{1000}$$

Задатак 7. Одредити вероватноћу да се из шпила од 52 карте, на случајан начин, извуку:

a) Два кеца у два извлачења, без враћања (догађај *A*),

b) Редом, кец пик и пик у два извлачења, без враћања (догађај *B*),

c) Редом треф и кец пик у два извлачења, без враћања (догађај *C*).

Решење:

Сва извлачења су без враћања, па исход првог извлачења утиче на вероватноћу у другом извлачењу.

a) Треба извући два од укупно четири кеца.

$$P(A)=\frac{\binom{4}{2}}{\binom{52}{2}}=\frac{\frac{4\cdot 3}{2\cdot 1}}{\frac{52\cdot 51}{2\cdot 1}}=0.0045$$

b) $P(B)=\frac{1}{52}\cdot\frac{12}{51}=0.00452$

c) $P(B)=\frac{13}{51}\cdot\frac{1}{51}=0.0049$

Задатак 8. Лутрија има 100 лозова нумерисаних бројевима од 1 до 100, од којих су добици бројеви који су дељиви и са 4 и са 5. Колика је вероватноћа да се при куповини једног лоза извуче добитак?

Решење:

$$E=\{1,2,\ldots,100\};\ n=100$$

Бројеви који су дељиви са 4 и са 5 (без остатка) су:

20, 40, 60, 80, 100; m=5.

Па је тражена вероватноћа

$$P=\frac{m}{n}=\frac{5}{100}=0.05$$

Задатак 9. У кутији има a белих и b црних куглица ($a\geq 2, b\geq 3$). Одједанпут се извлачи пет куглица. Наћи вероватноћу да су извучене две беле и три црне куглице.

Решење:

Може се дефинисати случајни догађај:

A - Извучене су две беле и три црне куглице

$$P(A)=\frac{m}{n}$$

$$n=\binom{a+b}{5}; \quad m=\binom{a}{2}\cdot\binom{b}{3}$$

$$P(A)=\frac{\binom{a}{2}\cdot\binom{b}{3}}{\binom{a+b}{5}}$$

<u>Задатак 10.</u> Између четири кандидата и три кандидаткиње бира се одбор од пет чланова. Сви кандидати и кандидаткиње имају подједнаку вероватноћу избора. Одредити вероватноћу да ће већину у одбору чинити кандидаткиње?

Решење:

Скуп могућих резултата је $\binom{7}{5}$ јер се на толико различитих начина од седам кандидата и кандидаткиња, може изабрати пет чланова одбора. У одбору ће кандидаткиње чинити већину ако је изабрано 3 кандидаткиње и 2 кандидата.

То се може остварити на $\binom{4}{2}\cdot\binom{3}{3}$ различита начина. Зато је тражена вероватноћа:

$$P=\frac{\binom{4}{2}\cdot\binom{3}{3}}{\binom{7}{5}}=\frac{\frac{4\cdot 3}{1\cdot 2}\cdot 1}{\frac{7\cdot 6}{1\cdot 2}}=0.285$$

<u>Задатак 11.</u> Из једне партије од 10 производа, у којима има 7 стандардних, узима се на случајан начин 6 производа. Наћи вероватноћу да међу тих 6 производа буде 4 стандардна.

Решење:

A - Извучена су 4 стандардна и два нестандардна производа

$$P(A)=\frac{m}{n}$$

број начина на који се могу изабрати 6 производа: $n=\binom{10}{6}$

број начина на који се могу изабрати 4 стандардна и 2 нестандардна производа: $m=\binom{7}{4}\cdot\binom{3}{2}$

$$P(A)=\frac{\binom{7}{4}\cdot\binom{3}{2}}{\binom{10}{6}}=\frac{1}{2}$$

Задатак 12. Из шпила од 52 карте на случајан начин се извлачи једна карта. Израчунати вероватноћу следећих догађаја:
a) A - Извучна карта је краљ херц,
b) B - Извучна карта је херц,
c) C - Извучена карта је кец пик или карта херц,
d) D - Извучна карта је пик или херц.

Решење:

a) $P(A)=\frac{1}{52}$

b) $P(B)=\frac{13}{52}$

c) $P(C)=P\left\{"кец \quad пик" или "карта \quad херц"\right\}=$

$$=P\left\{"кец \quad пик"\right\}+P\{B\}=\frac{1}{52}+\frac{13}{52}=\frac{7}{26}$$

d) J $P(D)=P\left\{"карта \quad пик"\cup"карта \quad херц"\right\}=$

$$=P\left\{"карта \quad пик"\right\}+P\{B\}=\frac{13}{52}+\frac{13}{52}=\frac{1}{2}$$

Задатак 13. Шпил од 52 карте случајно се дели на два једнака дела. Наћи вероватноћу да у оба дела има једнак број црних и црвених карата.

Решење:

A -Пресечен је подједнак број црних и црвених карата

$$P(A)=\frac{m}{n}$$

$$n=\binom{52}{26} \qquad m=\binom{26}{13}\cdot\binom{26}{13}$$

$$P(A)=\frac{\binom{26}{13}\cdot\binom{26}{13}}{\binom{52}{26}}\approx 0.22$$

<u>Задатак 14.</u> Новчић се баца 4 пута. Одредити вероватноћу да:
a) Писмо падне више пута него грб,
b) Разултат свих бацања буде исти.

Решење:

$$P(A)=\frac{m}{n}$$

n = 2^4 = 16 (варијације са понављањем 4 класе од два елемента)

a) A – Писмо је пало 3 или 4 пута

Број m (број повољних реализација експеримента) можемо одредити на следећи начин

P	P	P	P
G	P	P	P
P	G	P	P
P	P	G	P
P	P	P	G

m=5

Па је $P(A)=\dfrac{5}{16}$

b) B – Пала су 4 грба или 4 писма

$$\begin{array}{cccc} P & P & P & P \\ G & G & G & G \\ \hline \multicolumn{4}{c}{m=2} \end{array}$$

Па је $P(B)=\dfrac{2}{16}=\dfrac{1}{8}$

<u>Задатак 15.</u> Из шпила карата извучена је на случајан начин једна карта и затим враћена у шпил. Поново је извучена једна карта. Одредити вероватноћу да је оба пута извучена десетка.

Решење:

A - Извучена карта је десетка

B - Оба пута је извучена десетка

$$P(A)=\frac{4}{52}$$
$$P(B)=P(A)\cdot P(A)=\frac{4}{52}\cdot\frac{4}{52}=0.006$$

<u>Задатак 16.</u> Наћи вероватноћу да случајно изабрани двоцифрени број буде дељив:

a) са 2 и са 5 истовремено,

b) са 2 или са 5.

Решење:

A - Изабрани број је дељив са 2

B - Изабрани број је дељив са 5

$A \cap B \neq \varnothing \Rightarrow$ А и В нису дисјунктни догађају.

$P(A) = \frac{45}{90}$, сви парни двоцифрени бројеви;

$P(B) = \frac{18}{90}$, сваки пети број;

a) $A \cap B =$ ”сви парни бројеви дељиви са 5” (сваки десети број)

$$P(A \cap B) = \frac{9}{90}$$

b) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

$$P(A \cup B) = \frac{45}{90} + \frac{18}{90} - \frac{9}{90} = \frac{54}{90} = \frac{3}{5}$$

<u>Задатак 17.</u> У једној згради станује 5 породица са по једним дететом, 3 породице са по троје деце и 2 породице са по петоро деце. На случајан начин ради анкетирања, бирају се три породице. Израчунати вероватноћу да:

a) Макар две изабране породице имају исти број деце,

b) Три изабране породице имају укупно седморо деце.

Решење:

a) A - Макар две изабране породице имају исти број деце

$$P(A)=1-P(\overline{A})=1-\frac{\binom{5}{1}\cdot\binom{3}{1}\cdot\binom{2}{1}}{\binom{10}{3}}=\frac{3}{4}$$

b) B – Изабране су једна породица са петоро деце и две породице са једним дететом или две породице са троје деце и једна породица са једним дететом

$$P(B)=\frac{\binom{2}{1}\cdot\binom{5}{2}+\binom{3}{2}\cdot\binom{5}{1}}{\binom{10}{3}}=\frac{7}{24}$$

<u>Задатак 18.</u> Машина се састоји из три дела који раде независно један од другог. Вероватноћа квара I дела је 0.2; вероватноћа квара II дела је 0.3 и вероватноћа квара III дела је 0.1. Наћи вероватноћу да тачно два дела не раде.

Решење:

A_i - i-ти део машине не ради, i=1, 2, 3

B - Тачно два дела не раде

$$P(A_1)=0.2 \quad P(\overline{A}_1)=0.8$$
$$P(A_2)=0.3 \quad P(\overline{A}_2)=0.7$$
$$P(A_3)=0.1 \quad P(\overline{A}_3)=0.9$$

$$B = A_1 A_2 \overline{A}_3 + A_1 \overline{A}_2 A_3 + \overline{A}_1 A_2 A_3$$

$$\begin{aligned} P(B) &= P(A_1 A_2 \overline{A}_3) + P(A_1 \overline{A}_2 A_3) + P(\overline{A}_1 A_2 A_3) \\ &= 0.2 \cdot 0.3 \cdot 0.9 + 0.2 \cdot 0.7 \cdot 0.1 + 0.8 \cdot 0.3 \cdot 0.1 \\ &= 0.092 \end{aligned}$$

<u>**Задатак 19.**</u> Играчи X и Y играју фер игру. Победник је онај који први освоји 6 поена и он добија цео износ награде. Игра је прекинута при стању 5:3 за X. Како треба поделити награду?

Решење:

Вероватноћа да један од играча освоји поен је 0.5.
Игра се завршава на један од следећих начина (1 - освојен поен, 0 - изгубљен поен):

$$\begin{array}{c|ccc} X & 0 & 0 & 0 \\ \hline Y & 1 & 1 & 1 \end{array} \quad \text{или} \quad \begin{array}{c|c} X & 1 \\ \hline Y & 0 \end{array} \quad \text{или} \quad \begin{array}{c|cc} X & 0 & 1 \\ \hline Y & 1 & 0 \end{array} \quad \text{или} \quad \begin{array}{c|ccc} X & 0 & 0 & 1 \\ \hline Y & 1 & 1 & 0 \end{array}$$

Према наведеном, вероватноћа да играч X победи је: $1-0.5^3=0.875$

а вероватноћа да победи играч Y је: 1-0.875=0.125

Однос ових вероватноћа је: $\dfrac{0.875}{0.125} = \dfrac{7}{1}$

па тако треба и поделити награду, о односу 7:1 за играча X.

<u>Задатак 20.</u> Вероватноћа да студент A положи испит у неком року је 0.6, за студента B је 0.8 и за студента C је 0.3. Успех полагања једног студента не утиче на успех полагања осталих. Ако сва три студента полажу испит, израчунај вероватноћу да:

a) Положи само студент A,

b) Положи само један студент,

c) Положе студенти A и B.

Решење:

Означимо следеће догађаје,

A - Студент A положио испит,

B - Студент B положио испит,

C - Студент C положио испит.

Вероватноће ових догађаја су:

$$P(A) = 0.6$$

$$P(B) = 0.8$$

$$P(C) = 0.3$$

a) Тражени догађај ће се реализовати када студент A положи испит, а студенти B и C не положе, т.ј. ако се оствади догађај:

$$A \cdot \overline{B} \cdot \overline{C}$$

Тражена вероватноћа је:

$$P(A \cdot \overline{B} \cdot \overline{C}) = 0.6 \cdot 0.2 \cdot 0.7 = 0.084$$

јер су догађаји A, B и C независни (самим тим су независни и догађаји ($\overline{A}, \overline{B}$ и $\overline{C}$).

b) Овај догађај ће се реализовати када А положи, док В и С не положе, тј.

$$A \cdot \overline{B} \cdot \overline{C},$$

или када В положи, а студенти А и С не положе тј.

$$\overline{A} \cdot B \cdot \overline{C},$$

или када С положи а студенти А и В не положе тј.

$$\overline{A} \cdot \overline{B} \cdot C$$

Ова три догађаја се међусобно искључују, па је тражена вероватноћа једнака

$$P = P(A \cdot \overline{B} \cdot \overline{C}) + P(\overline{A} \cdot B \cdot \overline{C}) + P(\overline{A} \cdot \overline{B} \cdot C) = 0.332$$

c) Тражена вероватноћа је

$$P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B) = 0.48$$

<u>**Задатак 21.**</u> Ако је вероватноћа рођења женског детета 0.5 одредити вероватноћу да ће у породици са четворо деце бити барем једна девојчица.

Решење:

A - Барем једна девојчица од четворо деце
$\overline{A}$ - Сва четири дечака од четворо деце

p = 0.5, вероватноћа да се роди женско дете,
q = 0.5, вероватноћа да се роди мушко дете,

$$P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - q^4 = 1 - 0.5^4 = 0.9375$$

<u>Задатак 22.</u> Зна се да је пролазност на испиту 30%.

a) Колика је вероватноћа да студент положи испит у трећем року?

b) У ком року се може очекивати да ће студент положити испит са вероватноћом од 0.1029?

Решење:

X - Број излазака на испит до момента полагања

(Ако студент положи испит у првом року, тада је X=1, а ако положи у другом, тада је X=2, итд.)

$p = 0.30$, вероватноћа да студент положи испит,
$q = 0.70$, вероватноћа да студент падне на испиту,

a) $P\{X = 3\} = q^2 \cdot p = 0.70^2 \cdot 0.30 = 0.147$

b) Треба одредити број k тако да је

$$P\{X = k\} = 0.1029$$

т.ј. тако да је $q^{k-1} \cdot p = 0.1029$

Горња једначина биће задовољена за k=4.

<u>Задатак 23.</u> Дат је скуп елементарних догађаја E = {1, 2, 3, 4} и догађаји

$$A = \{1, 2\},\ B = \{1, 3\} \text{ и } C = \{1, 4\}.$$

Испитати да ли су догађаји A, B и C:

a) Два и два независна,

b) Потпуно независни.

Решење:

a) $P(A) = P(B) = P(C) = \dfrac{1}{2}$

Да би догађаји A и B били независни, потребно је да буде испуњен услов: (по дефиницији независности)

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

Догађаји A, B и C су два и два независна јер је

$$P(A \cap B) = P(\{1\}) = \frac{1}{4} = P(A) \cdot P(B) = \frac{2}{4} \cdot \frac{2}{4} = \frac{1}{4}$$
$$P(A \cap C) = P(\{1\}) = \frac{1}{4} = P(A) \cdot P(C) = \frac{2}{4} \cdot \frac{2}{4} = \frac{1}{4}$$
$$P(B \cap C) = P(\{1\}) = \frac{1}{4} = P(A) \cdot P(B) = \frac{2}{4} \cdot \frac{2}{4} = \frac{1}{4}$$

b) Догађаји A, B, и C нису потпуно независни јер је

$$P(A \cap B \cap C) = P(\{1\}) = \frac{1}{4} \neq P(A) \cdot P(B) \cdot P(C) = \frac{2}{4} \cdot \frac{2}{4} \cdot \frac{2}{4}$$

<u>Задатак 24.</u> У магацину се налази 1000 тракторских гума типа R_{14} и 1000 тракторских гума типа R_{15}. Не гледајући ознаку, магационер износи једну гуму и, одмах затим (такође без гледања), још једну. Колика је вероватноћа да су изнете гуме истог типа?

Решење:

Описани догађај има вероватноћу једнаку вероватноћи догађаја да друг изнета гума буде истог типа као прва. У другом "извлачењу" број могућих исхода је 1999, од чега је 999 повољних. Тражена вероватноћа P(A) је, према томе:

$$P(A) = \frac{999}{1999} = 0.49975$$

<u>Задатак 25.</u> Нека се у скупу од 50 радница у текстилној индустрији очекује да 16% њих има неуротске тегобе. Ако се на случајан начин бира 5 радница, колика је вероватноћа да се међу њима налазе 3 раднице са неуротским тегобама?

Решење:

Очекује се да је од 50 радница 8 (16%) са неуротским тегобама. Дефинише се случајни догађај:

A - 3 од 5 изабраних радница су са неуротским тегобама

Тражена вероватноћа је:

$$P(A)=\frac{\binom{8}{3}\binom{42}{2}}{\binom{50}{5}}=\frac{\frac{8\cdot 7\cdot 6}{3\cdot 2\cdot 1}\cdot\frac{42\cdot 41}{2\cdot 1}}{\frac{50\cdot 49\cdot 48\cdot 47\cdot 46}{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}}=\frac{3\cdot 41}{5\cdot 47\cdot 23}=0.02276=0.023$$

<u>Задатак 26.</u> Одредити вероватноћу да случајно изабран природни број, који није већи од 100, буде степен са изложиоцем већим од 1 другог природног броја.

***Решење*:**

Бројеви који нису већи од 100 и који се могу представити као степен са изложиоцем већим од 1 другог природног броја су:

$$2^2=4 \qquad 2^3=8 \qquad 2^4=16$$
$$2^5=32 \qquad 2^6=64 \qquad 3^2=9$$
$$3^3=27 \qquad 3^4=81 \qquad 5^2=25$$
$$6^2=36 \qquad 7^2=49 \qquad 10^2=100$$

Има их укупно 12, па је тражена вероватноћа

$$p=\frac{12}{100}=0.12$$

<u>Задатак 27.</u> Телефонски број се састоји од 6 цифара. Ако се претпоставља да постоје сви телефонски бројеви од 000000 до

999999, која је вероватноћа да у произвољно изабраном броју све цифре буду различите?

Решење:

Вероватноћа P(A) описаног догађаја одређује се као однос броја варијација без понављања класе 6 од 10 елемената (шестоцифрених телефонских бројева код којих су све цифре различите) и укупног броја варијација са понављањем класе шест од 10 елемената (сви "шестоцифрени" бројеви од 000000 до 999999).

$$P(A)=\frac{10\cdot 9\cdot 8\cdot 7\cdot 6\cdot 5}{10^6}=0.1512$$

<u>Задатак 28.</u> Тачка M(x,y) је на случајан начин изабрана у квадрату $0\leq x\leq 2$, $0\leq y\leq 2$. Одредити вероватноћу да она припада и области одређеној условом

$$(x-1)^2+(y-1)^2\geq 1$$

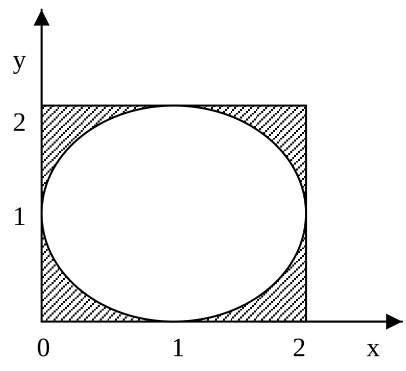
Решење:

Тражена вероватноћа *P(A)* се одређује као однос површине *pov(A)* области описане датим условом и површине *pov(Ω)* датог квадрата.

$$pov(\Omega)=4$$

$$pov(A)=4-r^2\pi=4-1^2\pi=4-\pi$$

$$P(A)=\frac{pov(A)}{pov(\Omega)}=\frac{4-\pi}{4}=0.215$$



<u>Задатак 29.</u> Посматрамо резултат бацања две коцке и кутију у којој се налазе 3 беле и 4 црне куглице. Који догађај је вероватнији:
I: Да бачене коцке покажу два једнака броја или два броја чији је збир 5? или
II: Да из кутије одједном извучемо једну белу и једну црну куглицу, или две црне куглице?

Решење:

Дефинишу се догађаји:

I: A - Бачене коцке показују два једнака броја или два броја чији је збир 5
II: B - Из кутије су одједном извучене једна бела и једна црна куглица или две црне куглице

$$\mathrm{P}(A) = 6/36 + 4/36 = 10/36 = 0.278$$

$$P(B) = \frac{\binom{3}{1}\cdot\binom{4}{1}}{\binom{7}{2}} + \frac{\binom{4}{2}}{\binom{7}{2}} = 0.857$$

Следи да је: $\mathrm{P}(B) > \mathrm{P}(A)$

<u>Задатак 30.</u> Пет стрелаца гађа у 9 предмета. Ако сваки стрелац насумице бира циљ, одредити вероватноће да ће сви стрелци гађати
a) Исти циљ,
b) Различите циљеве.

Решење:

a) Први стрелац бира било који од 9 циљева. Сви остали стрелци морају гађати циљ који је изабрао први. Вероватноћа P(*A*) да ће сви гађати исти циљ је, према томе:

$$P(A)=\frac{9}{9}\cdot\left(\frac{1}{9}\right)^4=0.000152$$

b) У овом случају први стрелац има исти избор као под а), док остали стрелци треба да гађају циљ који није већ биран. Вероватноћа P(B) да ће сви гађати различите циљеве је:

$$P(B)=\frac{9}{9}\cdot\frac{8}{9}\cdot\frac{7}{9}\cdot\frac{6}{9}\cdot\frac{5}{9}=0.256$$

Задатак 31. Купац је купио 15 сијалица, и то: 7 по 40, 5 по 60 и 3 по 100 свећа. На путу до куће разбио је 3 сијалице. Одредити вероватноћу да разбијене сијалице имају укупно:

a) Тачно 180 свећа,
b) Не више од 150 свећа,
c) Више од 200 свећа.

Решење:

7 x 40
5 x 60 Од 15 сијалица, 3 су разбијене.
3 x 100

a) *A* – Разбијено је тачно 180 свећа

180 свећа може бити јачина три сијалице у два случаја:

3 x 60 или 1 x 100+2 x 40. Вероватноћа да ће бити разбијене те сијалице је:

$$P(A)=\frac{\binom{5}{3}+\binom{7}{2}\binom{3}{1}}{\binom{15}{3}}=\frac{\frac{5\cdot 4\cdot 3}{3\cdot 2}+\frac{7\cdot 6}{2}\cdot 3}{\frac{15\cdot 14\cdot 13}{3\cdot 2}}=\frac{\frac{20+126}{2}}{\frac{910}{2}}=0.1604$$

b) B – Разбијено је мање од 150 свећа

Укупно мање од 150 свећа може бити за следећи избор сијалица:

3 x 40 или 2 x 40 + 1 x 60. Одговарајућа вероватноћа је:

$$P(B)=\frac{\binom{7}{3}+\binom{7}{2}\binom{5}{1}}{\binom{15}{3}}=\frac{\frac{7\cdot 6\cdot 5}{3\cdot 2}+\frac{7\cdot 6}{2}\cdot 5}{\frac{15\cdot 14\cdot 13}{3\cdot 2}}=\frac{280}{910}=0.308$$

c) C – Разбијено је више од 200 свећа

За више од 200 свећа постоје четири могућности:

3 x 100, 2 x 60 + 1 x 100, 2 x 100 +1 x 60 и 2 x 100 +1 x 40.

Одговарајућа вероватноћа је:

$$P(C)=\frac{\binom{3}{3}+\binom{3}{2}\binom{5}{1}+\binom{3}{2}\binom{7}{1}+\binom{3}{1}\binom{5}{2}}{\binom{15}{3}}=\frac{1+15+21+30}{\frac{910}{2}}=0.147$$

Задатак 32. У једном институту од 100 људи њих 40 зна руски језик, њих 30 зна енглески, 26 зна француски, 15 зна руски и енглески, 10 зна руски и француски, њих 5 зна француски и енглески и њих 3 зна сва три језика. Ако се бира делегација од три члана, колика је вероватноћа да:

a) сва тројица знају енглески,
b) сва тројица знају руски и енглески,
c) сва тројица знају бар два страна језика,
d) сва тројица знају бар један страни језик,
e) двојица знају два страна језика, а један не зна ниједан,
f) ниједан од њих не зна француски ни енглески, али сви знају руски,
g) најмање један од њих зна сва три језика?

Решење:

Скуп свих запослених у институту се, према језицима које говоре, може поделити на дисјунктне подскупове. Ако се уведу ознаке Е, Ф и Р редом за енглески, француски и руски језик, тада је број елемената у сваком од дисјунктних скупова следећи:

Језици	Број запослених
Е,Ф,Р	3
Е,Р	12
Е,Ф	2
Ф,Р	7
Е	13
Ф	14
Р	18
Ниједан од наведених	31

Тражене вероватноће је сада лако одредити.

a) Сви знају енглески (Број оних који говоре енглески сада се може добити као збир оних који припадају скуповима Е, ЕФ,ЕР и ЕФР.)

$$P(A)=\frac{\binom{30}{3}}{\binom{100}{3}}=\frac{4060}{161700}=0.025$$

b) Сва тројица знају Р и Е (Скупови ЕР и ЕФР)

$$P(B)=\frac{\binom{15}{3}}{\binom{100}{3}}=\frac{455}{161700}=0.0028$$

c) Бар два страна језика (ЕР, ЕФ, ФР, ЕФР)

$$P(C)=\frac{\binom{12+7+2+3}{3}}{\binom{100}{3}}=\frac{2024}{161700}=0.0125$$

d) $$P(D)=\frac{\binom{69}{3}}{\binom{100}{3}}=\frac{52394}{161700}=0.324$$

e) $$P(E)=\frac{\binom{12+7+2}{2}\cdot\binom{31}{1}}{\binom{100}{3}}=\frac{210\cdot 31}{161700}=0.04$$

f) $$P(F)=\frac{\binom{18}{3}}{\binom{100}{3}}=\frac{816}{161700}=0.005$$

g) $$P(G)=\frac{\binom{3}{1}\cdot\binom{97}{2}+\binom{3}{2}\cdot\binom{98}{1}+\binom{3}{3}}{\binom{100}{3}}=\frac{3\cdot 4656+3\cdot 98+1}{161700}=0.088$$

<u>Задатак 33.</u> Играч А има 3 динара, а играч В 2 динара. Играч А баца коцкицу за игру, а В погађа колико тачкица ће бити на горњој страни коцке. Ако погоди, играч В добија 1 динар од играча А, а ако не погоди, даје 1 динар играчу А. Игра се завршава кад један од играча остане без новца. Одредити вероватноћу:

a) Да ће се игра завршити после тачно три бацања (догађај A),

b) Да се игра неће завршити ни после трећег бацања (догађај B),

c) Да ће се игра завршити после тачно пет бацања (догађај C).

Решење:

Може се дефинисати случајни догађај:

D - Играч В је погодио колико је тачкица на горњој страни коцке

$$P(D) = \frac{1}{6} \qquad P(\overline{D}) = \frac{5}{6}$$

Играч В ће, према томе, у једном бацању добити 1 динар са вероватноћом $\frac{1}{6}$, а изгубити са вероватноћом $\frac{5}{6}$.

a) Игра ће се завршити после тачно три бацања једино у случају када играч А остане без новца, тј. ако играч В добије по један динар (погоди исход) у сваком од три независна бацања. Догађај A се може представити и на следећи начин:

$$A = D \cdot D \cdot D = D \cap D \cap D$$

Следи да је тражена вероватноћа:

$$P(A) = \left(\frac{1}{6}\right)^3 = 0.00463$$

b) Догађај *B* ће се остварити ако се игра не заврши ни после другог ни после трећег бацања. За крај игре после трећег бацања вероватноћа је одређена под а), а после другог бацања игра ће се завршити ако играч B остане без новца, тј. ако не погоди исходе прва два бацања. Догађај супротан догађају *B* се може, према томе, представит на следећи начин:

$$\overline{B} = \overline{D} \cdot \overline{D} + D \cdot D \cdot D$$

Одговарајуће вероватноће су:

$$P(\overline{B}) = \left(\frac{5}{6}\right)^2 + \left(\frac{1}{6}\right)^3 = 0.6991 \text{ и}$$

$$P(B) = 1 - P(\overline{B}) = 1 - 0.6991 = 0.3009$$

c) На основу правила игре и аналогно претходним решењима датим у овом задатку, може се закључити да се и догађај *C* може представити преко догађаја *D* и $\overline{D}$ на следећи начин:

$$C = \overline{D}DDDD + D\overline{D}DDD + DD\overline{D}DD$$

Следи да је вероватноћа овог догађаја:

$$P(C) = 3 \cdot P(\overline{D}) \cdot (P(D))^3 = 3 \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{6^3} = 0.011574$$

<u>**Задатак 34.**</u> Нека радар у једном проласку преко одређене зоне уочава објекат X са вероватноћом 0.8. Ако се истовремено врши

осматрање са 6 радара и ако у посматраном периоду сваки радар 3 пута пређе ту зону, одредити вероватноћу:

a) Да објекат неће никако бити уочен (догађај A),
b) Да ће бар један радар уочити објекат X (догађај B),
c) Да ће објекат бити уочен при сваком ″преласку″ сваког радара (догађај C),
d) Да ће сваки радар уочити објекат X (догађај D). (Радари раде независно један од другог и ″преласци″ истог радара су међусобно независни.).

Решење:

a) Шест радара укупно 18 пута пређе зону, преласци су међусобно независни и вероватноћа да објекат X неће бити уочен у једном преласку је 0.2. Следи да је:

$$P(A) = 0.2^{18} = 0.0000001$$

b) Догађај B је супротан догађају A, па је:

$$P(B) = 1 – P(A) = 1 - 0.2^{18} = 0.9999999$$

c) $P(C) = 0.8^{18} = 0.0180144$

d) Један радар уочава објекат X (у бар једном од три преласка) са вероватноћом:

$$p = 1 – 0.2^3 = 1 – 0.008 = 0.992$$

Шест радара врши осматрање зоне (независно један од другог), па је вероватноћа да ће сваки радар уочити објекат X:

$P(D) = p^6 = (1 - 0.2^3)^6 = 0.992^6 = 0.95295$

<u>Задатак 35.</u> Неписмено дете саставља речи од слова: А, А, И, И, К, С, С, Т, Т, Т. Одредити вероватноћу да ће саставити реч СТАТИСТИКА;

Решење:

Речи састављене од датих слова су пермутације од 10 елемената, са понављањем. Укупан број таквих речи је:

$$n = \frac{10!}{2!2!1!2!3!} = \frac{3628800}{48} = 75600$$

Само једна од њих је СТАТИСТИКА, па је тражена вероватноћа:

$$P(S) = \frac{1}{75600} = 0.000013$$

<u>Задатак 36.</u> Студент А и студент В решавају исти задатак свако за себе. Ако је вероватноћа да ће га решити студент А једнака 0.90 а студент В 0.85:

a) Наћи вероватноћу да ће задатак бити решен,

b) Ако је задатак решен, одредити вероватноћу да га је решио студент А.

Решење:

A - Студент А је решио задатак $\qquad P(A) = 0.9;\ P(\overline{A}) = 0.1$

B - Студент B је решио задатак $\qquad P(B)=0.85;\ P(\overline{B})=0.15$

C - Задатак је решен

a)

$$P(C)=P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)=0.9+0.85-0.9\cdot 0.85=0.985$$

или

$$P(C)=1-P(\overline{A}\overline{B})=1-0.1\cdot 0.15=0.985$$

b)

$$P(A/C)=\frac{P(A)\cdot P(C/A)}{P(C)}$$

$$P(C/A)=1$$

$$P(A/C)=\frac{0.9\cdot 1}{0.985}=0.914$$

<u>Задатак 37.</u> Три стрелца независно један од другог гађају једну мету по једном, погађајући је са вероватноћама 4/5, 3/4 и 2/3 респективно. Ако је циљ погођен једном, колика је вероватноћа да трећи стрелац промаши?

Решење:

A - Први стрелац је погодио, $\qquad P(A)=4/5;\ P(\overline{A})=1/5$

B - Други стрелац је погодио, $\qquad P(B)=3/4;\ P(\overline{B})=1/4$

C - Трећи стрелац погодио, $\qquad P(C)=2/3;\ P(\overline{C})=1/3$

D - Циљ је погођен једном.

$$P(D) = P(A \cap \overline{B} \cap \overline{C}) + P(\overline{A} \cap B \cap \overline{C}) + P(\overline{A} \cap \overline{B} \cap C) =$$

$$= \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{5} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{3} = \frac{3}{20}$$

Тражи се условна вероватноћа $P\left(\overline{C} / D\right) = \dfrac{P(\overline{C} \cap D)}{P(D)}$

$$P(\overline{C} \cap D) = P(A \cap \overline{B} \cap \overline{C}) + P(\overline{A} \cap B \cap \overline{C});$$

Вероватноћа да је трећи стрелац промашио и да је циљ погођен једном

$$P(\overline{C} \cap D) = \frac{7}{60}$$

Па је тражена вероватноћа $P(\overline{C} / D) = \dfrac{P(\overline{C} \cap D)}{P(D)} = \dfrac{\frac{7}{60}}{\frac{3}{20}} = \dfrac{7}{9}$

<u>Задатак 38.</u> Авион се гађа са три метка. Вероватноћа поготка првим метком је 0.5, другим 0.6 и трећим 0.8. Од једног поготка авион ће бити оборен са вероватноћом 0.3, од два поготка са вероватноћом 0.6 и од три поготка сигурно. Колика је вероватноћа да авион буде оборен?

Решење:

Траже се сви могући догађаји и њихове вероватноће да би се на крају добила укупна вероватноћа. Користи се формула тоталне вероватноће.

A - Авион је оборен,
B_1 - Авион је погођен једним метком,
B_2 - Авион је погођен са два метка,
B_3 - Авион је погођен са три метка,
B_4 - Авион није погођен.

Лако је одредити вероватноће:

$$P(A/B_1)=0.3 \quad P(\overline{A}/B_1)=0.7$$
$$P(A/B_2)=0.6 \quad P(\overline{A}/B_2)=0.4$$
$$P(A/B_3)=1 \quad P(\overline{A}/B_3)=0$$

Авион је погођен првим метком:	$p_1=0.5$	$q_1=0.5$
Авион је погођен другим метком:	$p_2=0.6$	$q_2=0.4$
Авион је погођен трећим метком:	$p_3=0.8$	$q_3=0.2$

Вероватноћа да ће авион бити погођен једним метком:

$$P(B_1)=p_1q_2q_3+q_1p_2q_3+q_1q_2p_3$$
$$P(B_1)=0.5\cdot 0.4\cdot 0.2+0.5\cdot 0.6\cdot 0.2+0.5\cdot 0.4\cdot 0.8=0.26$$

Вероватноћа да ће авион бити погођен са два метка:

$$P(B_2)=p_1p_2q_3+p_1q_2p_3+q_1p_2p_3$$
$$P(B_2)=0.5\cdot 0.6\cdot 0.2+0.5\cdot 0.4\cdot 0.2+0.5\cdot 0.6\cdot 0.8=0.46$$

Вероватноћа да ће авион бити погођен са три метка:

$$P(B_3)=p_1p_2p_3$$
$$P(B_3)=0.5\cdot 0.6\cdot 0.8=0.24$$

$$P(A)=\sum_{k=1}^{3}P(B_k)P(A/B_k)=0.26\cdot 0.3+0.46\cdot 0.6+0.24\cdot 1=0.594$$

<u>Задатак 39.</u> Магационеру су враћене кутије са шкартом. Пошто је у кутији било и исправних производа, он их је разврстао на следећи начин:

- 2 кутије са по 3 производа од тога по 1 шкарт,
- 1 кутију са 10 производа свих 10 шкарт,
- 3 кутије са по 4 производа од тога по 1 шкарт.

Контролор насумице узима једну кутију и, не гледајући, извлачи из ње производ. Колика је вероватноћа да је извучен исправан производ?

Решење:

Означимо догађаје:

B_1 - Узета кутија је i-тог састава, i = 1, 2, 3;

A - Извучен је исправан производ,

$$P(B_1)=\frac{2}{6}\qquad P(B_2)=\frac{1}{6}\qquad P(B_3)=\frac{3}{6}$$

$$P(A/B_1)=\frac{2}{3}\qquad P(A/B_2)=0\qquad P(A/B_3)=\frac{3}{4}$$

Користећи формулу тоталне вероватноће добијамо тражену вероватноћу:

$$P(A)=P(B_1)\cdot P\left(A/B_1\right)+P(B_2)\cdot P\left(A/B_2\right)+P(B_3)\cdot P\left(A/B_3\right)$$
$$P(A)=\frac{2}{6}\cdot\frac{2}{3}+\frac{1}{6}\cdot 0+\frac{3}{6}\cdot\frac{3}{4}=\frac{43}{72}$$

Задатак 40. У фабрици се 40% делова производи на стругу, 35% на брусилици, док се остали делови обрађују ручно и то са вероватноћом дефекта 0.03, 0.04 и 0.05 респективно. Израчунати вероватноћу да је дефектни артикл произведен ручно.

Решење:

Означимо догађаје:

A - Произведени артикал је дефектан
B_1 - Артикал је произведен на стругу
B_2 - Артикал је произведен на брусилици
B_3 - Артикал је произведен ручно

Ова три догађаја се међусобно искључују, а њихова унија је сигуран догађај. Њихова реализација претходи реализацији догађаја A.

Пошто знамо да је артикал дефектан, треба да одредимо вероватноћу реализације догађаја B_3 , тј. да одредимо вероватноћу да је реализација догађаја A претходила реализација догађаја B_3. Према Бајесовој формули, тражена вероватноћа је:

$$P(B_3/A)=\frac{P(B_3)\cdot P(A/B_3)}{P(B_1)\cdot P(A/B_1)+P(B_2)\cdot P(A/B_2)+P(B_3)\cdot P(A/B_3)} \quad (1)$$

Условне вероватноће дефектног артикла су:

$$P(A/B_1) = 0.03$$
$$P(A/B_2) = 0.04$$
$$P(A/B_2) = 0.05$$

Вероватноће догађаја B_1, B_2, B_3 су:

$$P(B_1) = 0.40$$
$$P(B_2) = 0.35$$
$$P(B_3) = 0.25$$

Кад се ове вредности замене у (1) добиће се

$$P(B_3/A) = 0.325$$

Задатак 41. Постоје две серије истих артикала. У првој серији су сви артикли исправни, а у другој 1/4 од читаве серије су неисправни. На случајан начин је узет један артикал из случајно изабране серије и показало се да је исправан. Колика је вероватноћа да је узети артикал из прве, а колика да је из друге серије?

Решење:

Означићемо са B_1 и B_2 следеће случајне догађаје:

B_1 - Изабрани артикал је из прве серије
B_2 - Изабрани артикал је из друге серије

Ова два догађаја се међусобно искључују, а њихова унија је сигуран догађај, тј.

$$B_1 + B_2 = \Omega$$

Њихове вероватноће су

$$P(B_1) = P(B_2) = 0.5$$

Одредимо догађај

A - Изабрани артикал је, без обзира на серију, исправан

Реализација случајног догађаја *A* претходи реализација једног од догађаја B_1 или B_2.

Ако се реализовао B_1, тада је условна вероватноћа догађаја *A* једнака 1, тј.

$$P(A/B_1) = 1,$$

јер су упрвој серији сви артикли исправни.

Ако се реализовао догађај B_2, тада је

$$P(A/B_2) = 3/4,$$

јер је 3/4 производа прве серије исправни.

Догађај *A* се може изразити преко следећих случајних догађаја који се међусобно искључују:

$A \cdot B_1$ - Изабрани артикал је и исправан и из прве је серије
$A \cdot B_2$ - Изабрани артикал је и исправан и из друге је серије

Зато је

$$A = A \cdot B_1 + A \cdot B_2,$$

па је вероватноћа догађаја A једнака (формула тоталне вероватноће):

$$P(A) = P(A \cdot B_1) + P(A \cdot B_2) = P(B_1) \cdot P(A / B_1) + P(B_2) \cdot P(A / B_2)$$

односно

$$P(A) = 0.875$$

Знамо да се догађај A реализовао (изабран артикал је исправан).

Тражи се вероватноћа да је то артикал из прве серије, тј. тражи се условна вероватноћа.

$$P(B_1 / A).$$

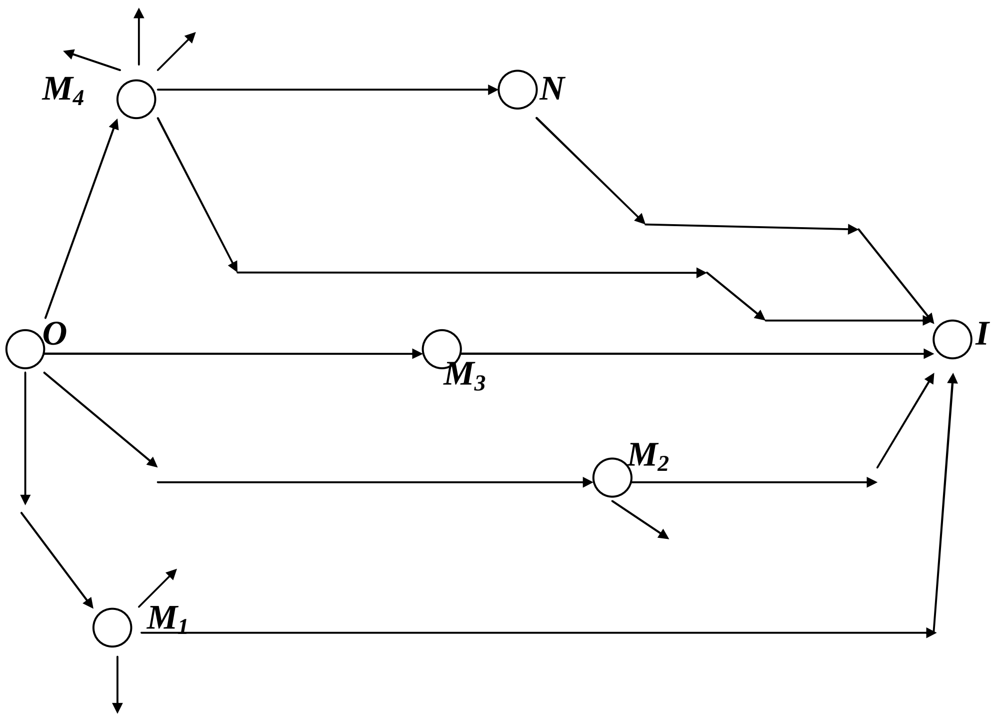
На основу дефиниције условне вероватноће тражена вероватноћа је

$$P(B_1 / A) = \frac{P(B_1 \cdot A)}{P(A)} = \frac{P(B_1) \cdot P(A / B_1)}{P(A)} = 0.5714$$

На сличан начин ћемо одредсити и условну вероватноћу за догађај B_2, тј. за догађај да је изабрани производ из друге серије. Та вероватноћа је

$$P(B_2 / A) = \frac{P(B_2) \cdot P(A / B_2)}{P(A)} = 0.42857$$

Задатак 42. Пешак иде из места 0 у место I по датој шеми, бирајући правац са подједнаком вероватноћом.



a) Колика је вероватноћа да стигне у I?

b) Ако се зна да је стигао у место I, колика је вероватноћа да је прошао кроз место M_1?

Решење:

A - Пешак је стигао у место I
B_k - Пешак прошао кроз место M_k”, k=1, 2, 3 и 4.

$$P(A)=\sum_{i=1}^{4}P(B_k)P(A/B_k)$$

$$P(B_1)=P(B_2)=P(B_3)=P(B_4)=\frac{1}{4}$$

a)

$$P(A/B_1)=\frac{1}{3};$$

$$P(A/B_2)=\frac{1}{2};$$

$$P(A/B_3)=1;$$

$$P(A/B_4)=\frac{2}{5};$$

$$P(A)=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\cdot 1+\frac{1}{4}\cdot\frac{2}{5}=\frac{67}{120}$$

b)

$$P(B_1/A)=\frac{P(B_1)\cdot P(A/B_1)}{\sum_{i=1}^{4}P(B_1)\cdot P(A/B_1)}=\frac{\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{3}}{\frac{67}{120}}=\frac{10}{67}$$

<u>**Задатак 43.**</u> Дате су вероватноће:

P(*A*)=0.5 P(*B*)=0.4 P(*A*/*B*)=0.25 P(*B*/*A*)=0.20

Одредити вероватноће следећих догађаја:

$$\overline{A}/B\ ,\ \overline{B}/A\ ,\ A/\overline{B}\ ,\ B/\overline{A}$$

Решење:

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A) = 1 - 0.5 = 0.5$$
$$P(\overline{B}) = 1 - P(B) = 1 - 0.4 = 0.6$$

$$P\left(\overline{A}/B\right) = 1 - P\left(A/B\right) = 1 - 0.25 = 0.75$$

$$P\left(\overline{B}/A\right) = 1 - P\left(B/A\right) = 1 - 0.2 = 0.8$$

$$P\left(A/\overline{B}\right) = \frac{P(A)\cdot P(\overline{B}/A)}{P(\overline{B})} = \frac{0.5\cdot 0.8}{0.6} = 0.667$$

$$P\left(B/\overline{A}\right) = \frac{P(B)\cdot P(\overline{A}/B)}{P(\overline{A})} = \frac{0.4\cdot 0.75}{0.5} = 0.6$$

<u>Задатак 44.</u> У радионици се 25% артикала производи на машини A_1, 35% на машини A_2, а остали на машини A_3. Проценат неисправних артикала произведених на машинама A_1, A_2 и A_3 износи респективно 5%, 4% и 2%.

a) Израчунати вероватноћу да је случајно изабрани артикал неисправан.

b) Ако се зна да је случајно изабрани артикал неисправан израчунати вероватноћу да је произведен на машини A_1.

c) Формулисати све догађаје и резултат дати на две децимале.

Решење:

A_i - Артикал је произведен на машини A_i, i=1, 2, 3
B - Артикал је неисправан

a)

$$P(A_1)=\frac{25}{100}; \quad P(B/A_1)=\frac{5}{100}$$
$$P(A_2)=\frac{35}{100}; \quad P(B/A_2)=\frac{4}{100}$$
$$P(A_3)=\frac{40}{100}; \quad P(B/A_3)=\frac{2}{100}$$

$$P(B)=P(A_1)\cdot P(B/A_1)+P(A_2)\cdot P(B/A_2)+P(A_3)\cdot P(B/A_3)$$

$$P(B)=\frac{25\cdot 5+35\cdot 4+40\cdot 2}{100^2}=\frac{125+140+80}{100^2}=\frac{345}{100^2}=0.0345=0.03$$

b)

$$P(A_1/B)=\frac{P(A_1)\cdot P(B/A_1)}{P(B)}=\frac{\frac{25\cdot 5}{100^2}}{\frac{345}{100^2}}=\frac{125}{345}=0.36$$

__**Задатак 45.**__ У магацину се налазе сандуци са резервним деловима. У једном сандуку су сви делови исправни, а у другом је 25% неисправних. Одлучено је да се тај сандук врати произвођачу. Незнајући за договор, магационер насумице вади резервни део из једног сандука. Део је био исправан. Колика је вероватноћа да је магационер погрешио, то јест узео део из сандука који је предвиђен за враћање.

Решење:

Дефинишу се догађаји:
B_1 - Производ је из сандука са исправним производима
B_2 - Производ је из сандука који ће бити враћен произвођачу
A - Производ је исправан

Тражена вероватноћа се рачуна применом Бајесове формуле.

$$P(B_1) = 0.5$$
$$P(B_2) = 0.5$$

$$P(A/B_1) = 1.00$$
$$P(A/B_2) = 0.75$$

$$P(B_2/A) = \frac{P(B_2)\cdot P(A/B_2)}{P(A)}$$

$$P(A) = P(B_1)\cdot P(A/B_1) + P(B_2)\cdot P(A/B_2)$$
$$P(A) = 0.5\cdot 1.00 + 0.5\cdot 0.75 = 0.5\cdot 1.75 = 0.875$$

$$P(B_2/A) = \frac{0.5\cdot 0.75}{0.5\cdot 1.75} = \frac{75}{175} = \frac{3}{7} = 0.428 \approx 0.43$$

Задатак 46. Прва партија производа из једне фабрике упакована је у 15 кутија.У свакој кутији заједно са производима прве класе је и 1% производа друге класе. Друга партија производа упакована је у 25 кутија и у свакој од њих је 95% производа прве и 5% производа друге класе. Наћи вероватноћу да се из случајно изабране кутије извуче производ прве класе.

Решење:

I партија од 15 кутија садржи 1% производа дуге класе
II партија од 25 кутија садржи 5% производа друге класе

За догађаје:
A - Извучен је производ прве класе
B_1 - Изабрана је кутија из прве партије
B_2 - Изабрана је кутија из друге партије

$$P(B_1)=\frac{15}{40}=\frac{3}{8}$$
$$P(B_2)=\frac{25}{40}=\frac{5}{8}$$

$$P(A/B_1)=0.99$$
$$P(A/B_2)=0.95$$

$$P(A)=\sum_{i=1}^{2}P(B_i)P(A/B_i)$$
$$P(A)=P(B_1)P(A/B_1)+P(B_2)P(A/B_2)$$
$$P(A)=\frac{3}{8}0.99+\frac{5}{8}0.95=\frac{297}{800}+\frac{475}{800}=\frac{772}{800}=\frac{193}{200}$$
$$P(A)=0.965$$

<u>Задатак 47.</u> Претпоставимо да је вероватноћа да понесем новчаник са собом 0.7. Ако је новчаник код мене, вероватноћа да је у једном од пет џепова је подједнака. У аутобусу ми прилази џепарош, претреса три џепа и ненашавши новчаник, одустаје. Колика је сада вероватноћа да је новчаник код мене?

Решење:

Дефинишимо догађаје:

A - Носим новчаник
B - Новчаник није у неком од три претресена џепа

Познате су вероватноће:

P(A) = 0.7 P($\overline{A}$) = 0.3

P(B|A) = 2/5 = 0.4

P(B|$\overline{A}$) = 1

Потребно је одредити условну вероватноћу P(A|B). Примењује се Бајесова формула.

$$P(A/B) = \frac{P(A)\cdot P(B|A)}{P(A)\cdot P(B|A) + P(\overline{A})\cdot P(B|\overline{A})} = \frac{0.7\cdot 0.4}{0.7\cdot 0.4 + 0.3\cdot 1} = 0.48$$

<u>Задатак 48.</u> У једној кутији се налази 8 белих и 6 црних куглица, а у другој 10 белих и 4 црне. Случајно је изабрана кутија и куглица. Извучена куглица је црна. Одредити вероватноћу да је изабрана прва кутија.

Решење:

Дефинишу се догађаји:

B_1 - Изабрана је прва кутија
B_2 - Изабрана је друга кутија

A - Извучена је бела куглица
$\overline{A}$ - Извучена је црна куглица

Одговарајуће вероватноће су:

$$P(B_1) = \mathrm{P}(B_2) = \frac{1}{2} = 0.5$$

$$P(\overline{A}/B_1) = \frac{6}{14} = 0.43$$

$$P(\overline{A}/B_2) = \frac{4}{14} = 0.29$$

Тражена условна вероватноћа $P(B_1/\overline{A})$ одређује се применом Бајесове формуле.

$$P(B_1|\overline{A}) = \frac{P(B_1)\cdot P(\overline{A}|B_1)}{P(B_1)\cdot P(\overline{A}|B_1) + P(B_2)\cdot P(\overline{A}|B_2)} = 0.6$$

<u>**Задатак 49.**</u> На столу су три кутије: бела (у којој су 3 беле и 1 црвена куглица), црвена (у којој су 2 црвене и 1 зелена куглица) и зелена (у којој су 1 бела, 1 црвена и 2 зелене куглице). На случајан начин из једне од кутија се бира једна куглица. У зависности од боје изабране куглице, из кутије те боје се на случајан начин бира једна куглица, итд. Сва бирања су са враћањем. Нека b_n, c_n i z_n означавају вероватноћу да је n-та изабрана куглица бела, црвена или зелена.

a) израчунати b_1, c_1, z_1, b_2, c_2, z_2

b) одредити везу између b_n, c_n i z_n i b_{n-1}, c_{n-1} i z_{n-1}

Решење:

Тражене вероватноће рачунају се применом Бајесове формуле.

а) Посматрамо догађаје:

A_1 – Изабрана је бела кутија
B_1 – Изабрана је бела куглица

A_2 – Изабрана је црвена кутија
B_2 – Изабрана је црвена куглица

A_3 – Избрана је зелена кутија
B_3 – Изабрана је зелена куглица

За прво извлачење је:

$$\mathrm{P}(A_1) = \mathrm{P}(A_2) = \mathrm{P}(A_3) = \frac{1}{3}$$

Условне вероватноће које ће се користити у Бајесовој формули су:

$$\mathrm{P}(B_1|A_1) = \frac{3}{4} \qquad \mathrm{P}(B_2|A_1) = \frac{1}{4} \qquad \mathrm{P}(B_3|A_1) = 0$$

$$\mathrm{P}(B_1|A_2) = 0 \qquad \mathrm{P}(B_2|A_2) = \frac{2}{3} \qquad \mathrm{P}(B_3|A_2) = \frac{1}{3}$$

$$\mathrm{P}(B_1|A_3) = \frac{1}{4} \qquad \mathrm{P}(B_2|A_3) = \frac{1}{4} \qquad \mathrm{P}(B_3|A_3) = \frac{1}{2}$$

$b_1 = \mathrm{P}(A_1) \cdot \mathrm{P}(B_1|A_1) + \mathrm{P}(A_2) \cdot \mathrm{P}(B_1|A_2) + \mathrm{P}(A_3) \cdot \mathrm{P}(B_1|A_3) =$

$$= \frac{1}{3}\cdot\frac{3}{4} + \frac{1}{3}\cdot 0 + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4} = \frac{1}{3}$$

$c_1 = P(A_1) \cdot P(B_2|A_1) + P(A_2) \cdot P(B_2|A_2) + P(A_3) \cdot P(B_2|A_3) =$

$$= \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4} + \frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3} + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4} = \frac{7}{18}$$

$z_1 = P(A_1) \cdot P(B_3|A_1) + P(A_2) \cdot P(B_3|A_2) + P(A_3) \cdot P(B_3|A_3) =$

$$= \frac{1}{3}\cdot 0 + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3} + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2} = \frac{5}{18}$$

У сваком следећем, вероватноће зависе од резултата претходног извлачења. Тако се b_2, c_2 і z_2 израчунавају на следећи начин:

$b_2 = b_1 \cdot P(B_1|A_1) + c_1 \cdot P(B_1|A_2) + z_1 \cdot P(B_1|A_3) =$

$$= \frac{1}{3}\cdot\frac{3}{4} + \frac{7}{18}\cdot 0 + \frac{5}{18}\cdot\frac{1}{4} = 0.3194$$

$c_2 = b_1 \cdot P(B_2|A_1) + c_1 \cdot P(B_2|A_2) + z_1 \cdot P(B_2|A_3) =$

$$= \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4} + \frac{7}{18}\cdot\frac{2}{3} + \frac{5}{18}\cdot\frac{1}{4} = 0.412$$

$z_2 = b_1 \cdot P(B_3|A_1) + c_1 \cdot P(B_3|A_2) + z_1 \cdot P(B_3|A_3) =$

$$= \frac{1}{3}\cdot 0 + \frac{7}{18}\cdot\frac{1}{3} + \frac{5}{18}\cdot\frac{1}{2} = 0.2685$$

b) На основу наведеног, следи да, за $n \geq 2$, важи:

$$b_n = b_{n-1} \cdot \frac{3}{4} + c_{n-1} \cdot 0 + z_{n-1} \cdot \frac{1}{4}$$

$$c_n = b_{n-1}\cdot \frac{1}{4} + c_{n-1}\cdot \frac{2}{3} + z_{n-1}\cdot \frac{1}{4}$$

$$z_n = b_{n-1}\cdot 0 + c_{n-1}\cdot \frac{1}{3} + z_{n-1}\cdot \frac{1}{2}$$

Задатак 50. Вероватноћа да један производ одговара стандарду је 96%. Упрошћени систем контроле квалитета стадардни производ оглашава нестандардним са вероватноћом 2%, а нестандардни производ проглашава стандардним са вероватноћом 5%. Колика је вероватноћа да је производ који је проглашен стандардним заиста стандардан?

Решење:

Дефинишу се догађаји:

S - Производ је стандаран
PS - Производ је проглашен стандардним
Дате су вероватноће:

$P(S) = 0.96 \qquad P(\overline{S}) = 0.04$

$P(\overline{PS}/S) = 0.02 \qquad P(PS/\overline{S}) = 0.05$

Из датих, одређују се и вероватноће одговарајућих супротних догађаја:

$P(PS/S) = 0.98 \qquad P(\overline{PS}/\overline{S}) = 0.95$

Вероватноћа да је производ који је проглашен стандардним заиста стандардан се одређује применом Бајесове формуле:

$$\mathrm{P}(S/PS) = \frac{P(S)\cdot P(PS/S)}{P(S)\cdot P(PS/S)+P(\overline{S})\cdot P(PS/\overline{S})} =$$

$$= \frac{0.96\cdot 0.98}{0.96\cdot 0.98+0.04\cdot 0.05} = 0.998$$

<u>Задатак 51.</u> Тест крви за ретку болест која се појављује код 1 од 100 000 људи биће позитиван са вероватноћом 0.95 код оболеле особе, а са вероватноћом 0.005 код особе која није оболела. Ако је тест позитиван, која је вероватноћа да је особа од које је узета крв оболела?

Решење:

Могу се дефинисати догађаји:
B - Особа је оболела
T - Тест је позитиван
Познате су вероватноће:

$$P(B) = \frac{1}{100000} = 0.00001$$
$$P(T|B) = 0.95$$
$$P(T|\overline{B}) = 0.005$$

Тражена вероватноћа се одређује применом Бајесове теореме:

$$P(B/T)=\frac{P(B)P(T|B)}{P(B)P(T|B)+P(\bar{B})P(T|\bar{B})}=$$
$$=\frac{0.95\cdot 0.00001}{0.95\cdot 0.00001+0.005\cdot(1-0.00001)}=0.002$$

Иако је изгледало да је тест веома добар, за овако ретку болест он је готово бескористан.

Задатак 52. Вероватноћа да је случајно изабрани купац намештаја мушкарац износи 0.65. Вероватноћа да је купац особа у браку једнака је 0.75, а вероватноћа да је ожењени мушкарац је 0.5. Ако случајно бирамо једног купца, израчунати вероватноћу да је одабрано лице:

a) Женског пола,
b) Неудата жена,
c) Особа која није у браку,
d) Удата жена,
e) Ако је одабран купац мушког пола, одредити вероватноћу да је он у браку.

Решење:

Дефинишу се догађаји:

A - Особа је женског пола
B - Особа је у браку

Сигуран догађај се може представити као унија догађаја који се међусобно искључују и то на следећи начин:

$$\Omega = A\cdot B + A\cdot \overline{B} + \overline{A}\cdot \overline{B} + \overline{A}\cdot B$$

Могу се уочити и следећи односи између догађаја:

$$A = A\cdot B + A\cdot \overline{B}$$
$$B = A\cdot B + \overline{A}\cdot B \text{ и сл.}$$

Познате су вероватноће:

$P(\overline{A}) = 0.65$ $\quad$ $P(B) = 0.75$ $\quad$ $P(\overline{A}\cdot B) = 0.5$

a) $P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 0.35$

b) Треба одредити $P(A\cdot \overline{B})$. Из претходно наведеног, може се закључити да је:

$P(A) = P(A\cdot B) + P(A\cdot \overline{B})$, kao и

$P(A\cdot B) = P(B) - P(\overline{A}\cdot B) = 0.75 – 0.5 = 0.25$

Следи да је тражена вероватноћа:

$$P(A\cdot \overline{B}) = P(A) - P(A\cdot B) = 0.35 – 0.25 = 0.1$$

c) $P(\overline{B}) = 1 – P(B) = 0.25$

d) $P(A\cdot B) = 0.25$

e) Тражи се условна вероватноћа $P(B/\overline{A})$

$$P\left(B/\overline{A}\right)=\frac{P(\overline{A}\cdot B)}{P(\overline{A})}=\frac{0.5}{0.65}=0.769$$

<u>Задатак 53.</u> Међу туристима у једном туристичком центру 65% су мушкарци. Поред тога, 75% жена и 60% мушкараца су домаћи туристи. Израчунати вероватноћу да ће случајно изабрана особа бити:

a) Држављанин наше земље,
b) Страна туристкиња,
c) Ако је случајно изабран мушкарац, одредити вероватноћу да је он странац.

Решење:

Дефинишу се догађаји:

A - Особа је женског пола
B - Особа је странац

Познате су вероватноће:

$P(\overline{A})=0.65 \qquad P(A) = 1- P(\overline{A}) = 0.35$

$P(\overline{B}|A)=0.75 \qquad P(\overline{B}|\overline{A})=0.6$

a) $P(\overline{B})=P(A)\cdot P(\overline{B}|A)+P(\overline{A})\cdot P(\overline{B}|\overline{A}) = 0.35\cdot 0.75 + 0.65\cdot 0.6 = 0.6525$

b) $P(A\cdot B) = P(A)\cdot P(B|A) = P(A)\cdot(1-P(\overline{B}|A)) = 0.35\cdot(1- 0.75) = 0.0875$

c) $P(B|\overline{A}) = 1 - P(\overline{B}|\overline{A}) = 1 - 0.6 = 0.4$

Задатак 54. У једној кутији се налази 5 белих и 7 црвених куглица, а у другој 3 беле и 4 црвене куглице. На случајан начин се из прве у другу кутију пребацују 3 куглице. Затим се из друге кутије извлачи једна куглица.

a) Одредити вероватноћу да је извучена куглица беле боје,

b) Ако је извучена бела куглица, одредити вероватноћу да су из прве у другу кутију пребачене једна бела и две црвене куглице.

Решење:

a) Посматрају се догађаји:

A - Из друге кутије је извучена куглица беле боје,
B_i - Од 3 куглице које су пребачене из прве у другу кутију i су беле боје, i = 0,1,2,3

Тражена вероватноћа рачуна се применом формуле потпуне вероватноће:

$$P(A) = \sum_{i=0}^{3} P(B_i) \cdot P(A|B_i), \text{ где је:}$$

$$P(B_i) = \frac{\binom{5}{i} \cdot \binom{7}{3-i}}{\binom{12}{3}}, \qquad P(A/B_i) = \frac{3+i}{10}, \qquad i = 0,1,2,3$$

$$P(A) = 0.420$$

b) Тражена условна вероватноћа се одређује преко Бајесове формуле.

$$P(B_1/A)=\frac{P(B_1)\cdot P(A/B_1)}{P(A)}=\frac{0.477\cdot\frac{4}{10}}{0.420}=0.454$$

<u>Задатак 55.</u> Три, на први поглед, исте кутије имају следеће садржаје: I-5 белих и 5 црвених, II-4 беле и 8 црвених, III-9 белих и 3 црвене куглице.

a) Шта је вероватније: да ће из друге кутије бити извучена бела куглица, или да ће бела куглица бити извучена из случајно изабране кутије?

b) Ако је извучена бела куглица, одредити вероватноћу да је она из друге кутије.

Решење:

Дефинишу се догађаји:
A - Извучена је бела куглица
B_i - Изабрана је i-та кутија, i = 1, 2, 3

Познате су вероватноће:

$$P(B_i)=\frac{1}{3},\quad i=1,2,3$$

$$P(A/B_1)=\frac{1}{2}$$

$$P(A/B_2)=\frac{1}{3}$$

$$P(A/B_3)=\frac{3}{4}$$

a) Вероватноћа да ће из друге кутије бити извучена бела куглица је:

$$P(A/B_2)=\frac{1}{3}=0.33$$

Вероватноћа да ће бела куглица бити изабрана из случајно изабране кутије израчунава се преко формуле тоталне вероватноће, тј.:

$$P(A)=P(B_1)P(A/B_1)+P(B_2)P(A/B_2)+P(B_3)P(A/B_3)=$$
$$=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{4}=\frac{1}{6}+\frac{1}{9}+\frac{1}{4}=\frac{19}{36}=0.528$$

Следи да је вероватније да ће бела куглица бити извучена из случајно изабране кутије.

b) Тражена вероватноћа је:

$$P(B_2/A)=\frac{P(B_2)P(A/B_2)}{P(A)}=\frac{\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}}{\frac{19}{36}}=\frac{\frac{1}{9}}{\frac{19}{36}}=\frac{4}{19}=0.210$$

<u>**Задатак 56.**</u> На територији неке општине, у популацији радно способних житеља, налази се 50% са нижим, 42% са средњим и 8% са вишим и високим образовањем. Међу средње образованим налази се 6% незапослених, а међу радно способним са вишим и високим образовањем 3%. За остале се зна да је 10% незапослених.

Ако се на случајан начин бира један радно способан житељ општине и констатује се да је он запослен, колика је вероватноћа да је он из категорије

a) ниже образованих;

b) средње образованих.

Решење:

Дефинишу се догађаји:

A - Изабрани радно способни житељ општине је запослен
B_1 - Житељ општине је са нижим образовањем
B_2 - Житељ општине је са средњим образовањем
B_3 -Житељ општине је са вишим или високим образовањем

Познате су вероватноће:

$P(B_1) = 0.50$ $\qquad$ $P(\overline{A}/B_1) = 0.10$
$P(B_2) = 0.42$ $\qquad$ $P(\overline{A}/B_2) = 0.06$
$P(B_3) = 0.08$ $\qquad$ $P(\overline{A}/B_3) = 0.03$

Вероватноћа P(A) да ће случајно изабрани радно способни житељ општине запослен, потребна за рачунање тражених условних вероватноћа, може се одредити преко вероватноће супротног догађаја $\overline{A}$. $P(\overline{A})$ се рачуна применом формуле тоталне вероватноће:

$$P(\overline{A}) = P(B_1)\cdot P(\overline{A}/B_1) + P(B_2)\cdot P(\overline{A}/B_2) + P(B_3)\cdot P(\overline{A}/B_3) =$$
$$= 0.5\cdot 0.1 + 0.42\cdot 0.06 + 0.08\cdot 0.03 = 0.0776$$

$$P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 0.9224$$

a) $P(B_1/A)=\dfrac{P(B_1)\cdot P(A/B_1)}{P(A)}=\dfrac{P(B_1)\cdot(1-P(\overline{A}/B_1))}{P(A)}=\dfrac{0.5\cdot 0.9}{0.9224}=0.488$

b) $P(B_2/A)=\dfrac{P(B_2)\cdot P(A/B_2)}{P(A)}=\dfrac{P(B_2)\cdot(1-P(\overline{A}/B_2))}{P(A)}=\dfrac{0.42\cdot 0.94}{0.9224}=0.428$

Задатак 57. Осигурач у електричном колу отказује при: кратком споју у електронској лампи (догађај A) са вероватноћом 0.5, споју у намотајима трансформатора (догађај B) са вероватноћом 0.6, пробоју кондензатора (догађај C) са вероватноћом 0.7, другим разлозима (догађај D) са вероватноћом 0.9. Вероватноће догадјаја A, B, C и D су, редом, 0.35, 0.30, 0.25 и 0.10. Ако је осигурач прегорео, наћи највероватнији разлог.

Решење:

Уз догађаје A, B, C и D, дефинише се и догађај:

E - Осигурач је отказао

Познате су вероватноће:

$P(E|A)=0.5$ $\qquad P(A) = 0.35$

$P(E|B)=0.6$ $\qquad P(B) = 0.30$

$P(E|C)=0.7$ $\qquad P(C) = 0.25$

$P(E|D)=0.9$ $\qquad P(D) = 0.10$

$P(E)$ се одређује преко формуле тоталне вероватноће, па је:

$$P(E) = 0.5 \cdot 0.35 + 0.6 \cdot 0.30 + 0.7 \cdot 0.25 + 0.7 \cdot 0.25 + 0.9 \cdot 0.10 = 0.62$$

Највероватнији разлог отказа осигурача одређује се поређењем условних вероватноћа:

$$P(A/E) = \frac{P(A)P(E/A)}{P(E)} = \frac{0.35 \cdot 0.5}{0.62} = 0.2822$$

$$P(B/E) = \frac{P(B)P(E/A)}{P(E)} = \frac{0.3 \cdot 0.6}{0.62} = 0.2903$$

$$P(C/E) = \frac{P(C)P(E/C)}{P(E)} = \frac{0.25 \cdot 0.7}{0.62} = 0.2822$$

$$P(D/E) = \frac{P(D)P(E/C)}{P(E)} = \frac{0.1 \cdot 0.9}{0.62} = 0.1452$$

Највероватније је до отказа осигурача дошло због кратког споја у намотајима трансформатора (догађај *B*).

Задатак 58. У једној фабрици је, на основу искуства, закључено да се на сваких 10000 производа произведених у фабрици у јутарњој смени јавља 20 дефектних, а на сваких 10000 производа произведених у ноћној смени, 50 је дефектно. Током 24 часа се у јутарњој смени произведе 1000 производа, а у ноћној 600. Одредити вероватноћу да случајно изабрани производ, од свих 1600 производа произведених за 24 часа, буде:

a) Произведен у јутарњој смени и дефектан,

b) Произведен у ноћној смени и дефектан,

c) Произведен у ноћној смени и није дефектан,
d) Дефктан, без обзира на смену?

Решење:

Вероватноће да је случајно изабрани производ произведен у јутарњој (*J*) или ноћној (*N*) смени дате су са

$$P(J) = \frac{1000}{1600} = 0.625 \qquad \text{и} \qquad P(N) = \frac{600}{1600} = 0.375$$

Вероватноће да је производ дефектан (*D*) ако је у питању јутарња, односно ноћна смена , је

$$P(D/N) = \frac{20}{10000} = 0.002 \qquad \text{и} \qquad P(D/N) = \frac{50}{10000} = 0.005$$

a) Вероватноћа да случајно изабрани производ од свих 1600 производа, произведених за 24 часа, буде произведем у јутарњој смени и дефектан је

$$P(J \cdot D) = P(J) \cdot P(D/J) = 0.625 \cdot 0.002 = 0.000125$$

b) Аналогно: $P(N \cdot D) = P(N) \cdot P(D/N) = 0.375 \cdot 0.005 = 0.001875$

c) $$P(J \cdot \overline{D}) = P(J) \cdot P(\overline{D}/J) = 0.375 \cdot \frac{9950}{10000} = 0.373$$

d) Описани догађај представља унију догађаја описаних под a) и b) Ови се догађаји међусобно искључују, па је вероватноћа да је производ дефектан, без обзира на смену:

$$P(D) = P(J{\cdot}D)+P(N{\cdot}D) = 0.000125 + 0.001875 = 0.002$$

<u>Задатак 59.</u> Професор математике зна из претходног искуства да студент који стално ради домаће задатке са вероватноћом 0.95 полаже испит, док за студента који не ради домаће задатке та вероватноћа износи 0.30. Познато је и да 25% студената ради домаће задатке

a) Одредити вероватноћу да ће случајно изабрани студент положити испит.

b) Ако случајно изабрани студент из групе положи испит, која је вероватноћа да је он стално радио домаће задатке?

Решење:

Могу се дефинисати случајни догађаји:

A - Студент полаже испит
B - Студент ради домаће задатке

Познате су вероватноће:

$$P(B) = 0.25$$
$$P(A|B) = 0.95$$
$$P(A|\overline{B}) = 0.30$$

a) $P\left(A\right) = P(B)\cdot P(A/B) + P(\overline{B})\cdot P(A/\overline{B}) = 0.25\cdot 0.95 + \left(1-0.25\right)\cdot 0.30 =$
$= 0.2375 + 0.225 = 0.4625$

b) $$P(B/A)=\frac{P(B)\cdot P(A/B)}{P(A)}=\frac{0.25\cdot 0.95}{0.4625}=0.5135$$

<u>**Задатак 60.**</u> Која је вероватноћа да је карта на врху шпила кец:

a) Ако је шпил комплетан (52 карте),

b) Ако су из шпила претходно, на случајан начин, извучене 3 карте?

Решење:

a) A - Карта на врху шпила карата је кец

$$p(A)=\frac{m}{n}=\frac{4}{52}=\frac{1}{13}=0.077$$

b) A - Карта на врху шпила карата је кец

H_0 - У шпилу карата се налазе сви кечеви

H_1 - У шпилу карата недостаје један кец

H_2 - У шпилу карата недостају два кеца

H_3 - У шпилу карата недостају три кеца

Вероватноћу догађаја A потражићемо применом формуле тоталне вероватноће:

$$P(A)=\sum_{i=0}^{3}P(H_i)\cdot P(A/H_i)$$

$$P(H_0)=\frac{\binom{4}{0}\binom{48}{3}}{\binom{52}{3}}=\frac{\frac{48\cdot 47\cdot 46}{3\cdot 2}}{\frac{52\cdot 51\cdot 50}{3\cdot 2}}=0.7826$$

$$P(H_1)=\frac{\binom{4}{1}\binom{48}{2}}{\binom{52}{3}}=\frac{4\cdot\frac{48\cdot 47}{2}}{\frac{52\cdot 51\cdot 50}{3\cdot 2}}=0.204$$

$$P(H_2)=\frac{\binom{4}{2}\binom{48}{1}}{\binom{52}{3}}=\frac{\frac{4\cdot 3}{2}\cdot 48}{\frac{52\cdot 51\cdot 50}{3\cdot 2}}=0.013$$

$$P(H_3)=\frac{\binom{4}{3}\binom{48}{0}}{\binom{52}{3}}=\frac{\frac{4\cdot 3\cdot 2}{3\cdot 2}\cdot}{\frac{52\cdot 51\cdot 50}{3\cdot 2}}=0.00018$$

$$P(A/H_0)=\frac{4}{49}=0.0816 \qquad P(A/H_1)=\frac{3}{49}=0.0612$$

$$P(A/H_2)=\frac{2}{49}=0.0408 \qquad P(A/H_3)=\frac{1}{49}=0.0204$$

Коначно је могуће применити формулу тоталне вероватноће:

$$P(A)=\sum_{i=0}^{3}P(H_i)P(A/H_i)$$

P(A)=0.7826·0.0816+0.204·0.0612+0.013·0.0408+0.00018·0.0204=0.0769

3. ЈЕДНОДИМЕНЗИОНАЛНЕ СЛУЧАЈНЕ ПРОМЕНЉИВЕ

<u>Задатак 1.</u> Дата је случајна променљива X

X	-1	0	2
p(X)	1/2	1/4	1/4

Израчунати:

a) Математичко очекивање, дисперзију и трећи обични моменат,

b) $E(2X+3)$; $\sigma^2(3X+2)$,

c) $P(X<1)$.

Решење:

a)

$$X\!:\!\begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 1/2 & 1/4 & 1/4 \end{pmatrix}$$

$$m = E(X) = \sum_k x_k p_k = -1\cdot\frac{1}{2} + 0\cdot\frac{1}{4} + 2\cdot\frac{1}{4} = 0$$

$$m_2 = E(X^2) = \sum_k (x_k)^2 \cdot p_k = (-1)^2\cdot\frac{1}{2} + 0^2\cdot\frac{1}{4} + 2^2\cdot\frac{1}{4} = \frac{3}{2}$$

$$\sigma^2 = m_2 - m^2 = \frac{3}{2} - 0^2 = \frac{3}{2}$$

$$m_3 = E(X^3) = \sum_k (x_k)^3 \cdot p_k = (-1)^3\cdot\frac{1}{2} + 0^3\cdot\frac{1}{4} + 2^3\cdot\frac{1}{4} = \frac{3}{2}$$

b)

$$Y = 2X + 3$$

$$Y : \begin{pmatrix} 1 & 3 & 7 \\ 1/2 & 1/4 & 1/4 \end{pmatrix}$$

$$E(2X+3) = 2 \cdot E(X) + 3 = 3$$

$$\sigma^2(3X+2) = 3^2 \cdot \sigma^2(X) = \frac{27}{2}$$

c)

$$P(X < 1) = P(X = -1) + P(X = 0) = 1/2 + 1/4 = 3/4$$

Задатак 2. Лутрија је организована тако да на 100 срећки 15 доноси добитке и то

Променљива добитака	20	5	1
Број срећки	1	4	10

a) Формирати закон расподеле вероватноћа случајне променљиве *X*, која представља променљиву добитка,

b) Израчунати очекивану вредност као и варијансу случајне променљиве *X*,

c) Израчунати распон варијације случајне променљиве *X*.

Решење:

a) $N = 100$

X	0	1	5	20
f	85	10	4	1

Закон расподеле:

$$X:\begin{pmatrix} 0 & 1 & 5 & 20 \\ 0.85 & 0.1 & 0.04 & 0.01 \end{pmatrix}$$

b)

$$m = E(X) = \sum x_i p_i = 0\cdot 0.85 + 1\cdot 0.1 + 5\cdot 0.04 + 20\cdot 0.01 = 0.5$$

$$E\left(X^2\right) = \sum x_i^2 p_i = 0^2\cdot 0.85 + 1^2\cdot 0.1 + 5^2\cdot 0.04 + 20^2\cdot 0.01 = 5.1$$

$$\sigma^2 = E\left(X^2\right) - E(X)^2 = 5.1 - 0.25 = 4.85$$

c) $R = X_{max} - X_{min} = 20 - 0 = 20$

<u>Задатак 3.</u> Реализације случајне величине *X* су: -2, -1, 0, 1 и 2 са одговарајућим вероватноћама: P(-2), P(-1), P(0), P(1) и P(2). Одредити ове вероватноће ако је:

$$E(X) = E\left(X^3\right) = 0,\qquad E\left(X^2\right) = 1,\qquad E\left(X^4\right) = 2.$$

Решење:

Ако се вероватноће P(-2), P(-1), P(0), P(1) и P(2) означе са p_1, p_2, p_3, p_4 и p_5, редом, закон вероватноћа случајне променљиве *X* може се представити на следећи начин:

$$X:\begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ p_1 & p_2 & p_3 & p_4 & p_5 \end{pmatrix}$$

Тада се дати услови могу изразити преко система линеарних једначина:

$$E\left(X\right) = \sum_i x_i p_i = -2p_1 - p_2 + p_4 + 2p_5 = 0$$

$$E\left(X^2\right) = \sum_i x_i^2 p_i = 4p_1 + p_2 + p_4 + 4p_5 = 1$$

$$E\left(X^3\right) = \sum_i x_i^3 p_i = -8p_1 - p_2 + p_4 + 8p_5 = 0$$

$$E\left(X^4\right) = \sum_i x_i^4 p_i = 16p_1 + p_2 + p_4 + 16p_5 = 2$$

Пета једначина се добија из услова

$$\sum_i p_i = p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5 = 1$$

Решење датог система је:

$$p_1 = p_5 = 1/24$$
$$p_2 = p_4 = 1/3$$
$$p_3 = 1/4$$

Задатак 4. Ради утврђивања квалитета у великој серији, узима се један производ и врши комплетна анализа. Ако изабрани производ у потпуности одговара жељеном квалитету, даља анализа се не врши, а ако не одговара, бира се следећи и врши се његова анализа, итд. Нека је вероватноћа за сваки производ, да одговара жељеном квалитету једнака 0.8, а трошкови анализе су 2000 динара. Колика је вероватноћа да ће трошкови контроле серије бити мањи од 5000 динара?

Решење:

X - Број анализираних производа у серији,
Y - Трошкови контроле серије, при чему Y=2000X

$P(X=1)=0.8;$ вероватноћа да ће бити анализиран само један производ,

$P(X=2)=0.2\cdot 0.8;$ вероватноћа да ће бити анализирана 2 производа (први производ неисправан $\cap$ други производ исправан), итд.

Закон вероватноћа за X:

$$X:\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \ldots \\ 0.8 & 0.2\cdot 0.8 & 0.2^2\cdot 0.8 & \ldots \end{pmatrix}$$

Користећи везу Y=2000X добијамо закон вероватноће за Y

$$Y:\begin{pmatrix} 2000 & 4000 & 6000 & \ldots \\ 0.8 & 0.16 & 0.032 & \ldots \end{pmatrix}$$

Тражена вероватноћа је

$$P(Y<5000)=P(X=1)+P(X=2)=0.8+0.16=0.96$$

__**Задатак 5.**__ У кутији се налазе 2 исправне коцке (стране су нумерисане бројевима од 1 до 6) и 3 коцке чије су стране нумерисане бројевима 1, 1, 2, 3, 4, и 5. На случајан начин се извлачи једна коцка из кутије и баца три пута. Нека X буде случајна променљива која представља број појављивања јединице при бацању коцке. Одредити:

a) Закон расподеле вероватноће случајне променљиве *X*,

b) Вероватноћу да се 1 јави бар 2 пута,

c) Вероватноћу да се број 2 јави у сва три бацања.

Решење:

Вероватноћа јављања јединице при бацању коцкице зависи од тога да ли је извучена коцкица исправна или не. При одређивању вероватноћа за поједине вредности случајне променљиве *X* потребно је користити формулу потпуне вероватноће.

a)
$$X:\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ p_0 & p_1 & p_2 & p_3 \end{pmatrix}$$

$$p_0=\frac{2}{5}\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^3+\frac{3}{5}\cdot\left(\frac{4}{6}\right)^3=0.4093$$

$$p_1=\frac{2}{5}\cdot 3\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^2\cdot\frac{1}{6}+\frac{3}{5}\cdot 3\cdot\left(\frac{4}{6}\right)^2\cdot\frac{2}{6}=0.4055$$

$$p_2=\frac{2}{5}\cdot 3\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^2\cdot\frac{5}{6}+\frac{3}{5}\cdot 3\cdot\left(\frac{2}{6}\right)^2\cdot\frac{4}{6}=0.1611$$

$$p_3=\frac{2}{5}\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^3+\frac{3}{5}\cdot\left(\frac{2}{6}\right)^3=0.024$$

$$X:\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0.4093 & 0.4055 & 0.1611 & 0.024 \end{pmatrix}$$

b) $(X\geq 2)=p_2+p_3=0.1611+0.024=0.1851$

c) $P(C)=\left(\frac{1}{6}\right)^3=0.0046$

<u>**Задатак 6.**</u> У зеленој кутији се налази 5 црвених и 7 белих куглица, а у плавој 3 црвене и 7 белих куглица. Из зелене кутије се извлаче две, из плаве две куглице и стављају у трећу, жуту кутију. Нека случајна променљива *X* представља број белих куглица у жутој кутији. Одредити:

a) Закон вероватноћа за X,

b) Очекивани број белих куглица у жутој кутији,

c) Вероватноћу да ће у жутој кутији бити бар три црвене куглице.

Решење:

a)

$$X:\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ p_0 & p_1 & p_2 & p_3 & p_4 \end{pmatrix}$$

$$p_0=\frac{\binom{5}{2}}{\binom{12}{2}}\cdot\frac{\binom{3}{2}}{\binom{10}{2}}=0.0101$$

$$p_1=\frac{\binom{5}{1}\cdot\binom{7}{1}}{\binom{12}{2}}\cdot\frac{\binom{3}{2}}{\binom{10}{2}}+\frac{\binom{5}{2}}{\binom{12}{2}}\cdot\frac{\binom{3}{1}\cdot\binom{7}{1}}{\binom{10}{2}}=0.1061$$

$$p_2 = \frac{\binom{5}{1}\cdot\binom{7}{1}}{\binom{12}{2}} \cdot \frac{\binom{3}{1}\cdot\binom{7}{1}}{\binom{10}{2}} + \frac{\binom{5}{2}}{\binom{12}{2}} \cdot \frac{\binom{7}{2}}{\binom{10}{2}} + \frac{\binom{7}{2}}{\binom{12}{2}} \cdot \frac{\binom{3}{2}}{\binom{10}{2}} = 0.3394$$

Итд...

$$X : \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0.0101 & 0.1061 & 0.3394 & 0.3959 & 0.1485 \end{pmatrix}$$

b)

$$E(X) = \sum_{i=0}^{4} x_i \cdot p_i = 0\cdot 0.0101 + 1\cdot 0.1061 + 2\cdot 0.3394 + 3\cdot 0.3959 + 4\cdot 0.1485 = 2.57$$

c) $P\left(X \le 1\right) = p_0 + p_1 = 0.0101 + 0.1061 = 0.1162$

<u>Задатак 7.</u> Случајна величина X представља број победа једне екипе у 3 утакмице. Ако се зна да се утакмице одигравају независно једна од друге и да је вероватноћа победе те екипе у једној утакмици p=0.6, одредити:

a) Закон расподеле вероватноћа случајне величине X,

b) Математичко очекивање броја победа у 3 сусрета,

c) Одговарајућу варијансу.

Решење:

X - Број победа екипе у 3 утакмице.

Из услова задатка види се да ће X имати биномну расподелу са параметрима:

$n = 3$

$p = 0.6$

$X : B(3; 0.6)$

$X = \{0, 1, 2, 3\}$

a) $P_k = P\{X = k\} = \binom{3}{k} 0.6^k (1 - 0.6)^{3-k}, \quad \forall k \in \{0, 1, 2, 3\}$

Тако ћемо добити:

$P_0 = 0.4^3 = 0.064$

$P_1 = 3 \cdot 0.6 \cdot 0.4^2 = 0.288$

$P_2 = 3 \cdot 0.6^2 \cdot 0.4 = 0.432$

$P_3 = 0.6^3 = 0.216$

Па је закон вероватноће дат табелом:

X	0	1	2	3
p	0.064	0.288	0.432	0.216

b)

$E(X) = \sum_{i=0}^{3} x_i p_i = 0 \cdot 0.064 + 1 \cdot 0.288 + 2 \cdot 0.432 + 3 \cdot 0.216 = 1.80$

$E(X^2) = \sum_{i=0}^{3} x_i^2 p_i = 0^2 \cdot 0.064 + 1^2 \cdot 0.288 + 2^2 \cdot 0.432 + 3^2 \cdot 0.216 = 3.96$

$m_2 = E(X^2) = 3.96$

$m = E(X) = 1.8$

$\sigma^2 = m_2 - m^2 = 3.96 - 1.8^2 = 0.72$

<u>Задатак 8.</u> Два стрелца гађају наизменично са по 5 метака мету постављену на квадратном постољу ширине 1 метар. Мета је полупречника 20cm. Стрелци не могу промашити постоље, а погодак сваке тачке на постољу је подједнако вероватан.

a) Колика је вероватноћа промашаја мете после свих гађања?

b) Колика је вероватноћа да је мета погођена са бар 3 метка?

Решење:

Површина квадратног постоља кога стрелци не могу промашити је 1 m^2, а површина мете је

$$R^2 \cdot \pi = 0.2^2 \cdot 3.14 = 0.1256$$

при чему је R полупречник мете. Вероватноћа да мета буде погођена, једнака је односу ове две површине, тј.

$$p = \frac{0.1256}{1} = 0.1256$$

Означимо са *X* број података мете у ових 10 гађања. Случајна променљива *X* имаће биномну расподелу са параметрима

n =10 : број гађања
p = 0.1256 : вероватноћа поготка у сваком од 10 гађања

a) Посматра се догађај да је *X*=0

Вероватноћа реализације овог догађаја је

$$P(X=0) = \binom{10}{0} 0.1256^0 (1-0.1256)^{10-0} = 0.2613$$

b) Овај ће се догађај реализовати ако је $3 \leq X \leq 10$

Вероватноћа овог догађаја је:

$$P(3 \leq X \leq 10) = \sum_{i=3}^{10} \binom{10}{i} 0.256^{i} (1 - 0.1256)^{10-i} =$$

$$= 1 - P\{X \leq 2\} = 1 - \sum_{i=0}^{2} \binom{10}{i} 0.1256^{i} (1 - 0.1256)^{10-i} =$$

$$= 1 - \left(0.8744^{10} + 10 \cdot 0.1256 \cdot 0.8744^{9} + 45 \cdot 0.1256^{2} \cdot 0.8744^{8}\right) = 0.121$$

<u>Задатак 9.</u> За случајну промењиву X се зна да има Пуасонову расподелу. За неколико првих вредности дата је расподела вероватноћа

$$X : \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & \text{"4 и више"} \\ c & 0.07326 & 0.146525 & 0.195367 & 0.566529 \end{pmatrix}$$

a) Одредити константу *c*,
b) Израчунати математичко очекивање и варијансу.

Решење:

$X : P(\lambda)$

a) $\sum_{i} p_i = 1$

$c + 0.07326 + 0.146525 + 0.195367 + 0.566529 = 1$

$c = 0.018316$

b) $X : P(\lambda) \quad \Rightarrow \quad E(X) = m = \sigma^2(X) = \lambda$

$$P(X = k) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$$

$$P(X = 0) = 0.018316 = e^{-\lambda}\frac{\lambda^0}{0!} = e^{-\lambda} \quad \Rightarrow \quad -\lambda = \ln 0.018316$$

$$\lambda = 4 \quad \Rightarrow \quad E(X) = m = \sigma^2(X) = 4$$

<u>Задатак 10.</u> Телефонска секретарица добија просечно 90 позива на час. Уколико је линија била у прекиду 1 минут, колика је вероватноћа да за то време није било више од два позива?

Решење:

Просечно се добија 90 позива на час, тј. 1.5 позива у минуту, тј.

$E(X) = m = 1.5$

Тражена вероватноћа је $P(0 \le X \le 2)$

Користимо Пуасонову расподелу са параметром m = λ = 1.5, па је

$$P(0 \le X \le 2) = \sum_{k=0}^{2}\frac{1.5^k}{k!}e^{-1.5} = e^{-1.5}\left(1 + 1.5 + \frac{1.5^2}{2}\right)$$
$$P(0 \le X \le 2) = 0.223 \cdot 3.625 = 0.8088$$

<u>Задатак 11.</u> Случајна променљива *X* дата је функцијом густине

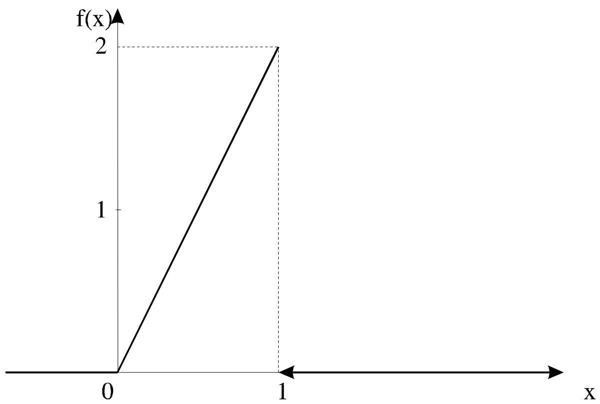
$$f(x)=\begin{cases} 2x & 0\le x\le 1 \\ 0 & \text{ван} \end{cases}$$

a) Скицирати функцију густине и функцију расподеле случајне променљиве *X*,

b) Израчунати вероватноћу да случајна променљива *X* узме вредност у интервалу (0; 0.5), (0.5; 1.5) и (0.5; 0.51).

Решење:

a)



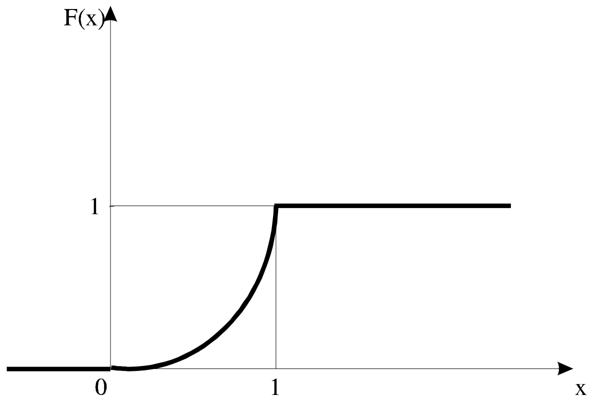
x	0	1/2	1
f(x)	0	1	2

Funkcija gustine sl. pr. X

Прво се одређује аналитички облик функције расподеле F(x)

$$F(x)=P(X<x)=\int_{-\infty}^{x} f(x)\,dx=\int_{0}^{x} 2x\,dx=x^2$$

$$F(x)=\begin{cases}0 & x\le 0\\ x^2 & 0<x<1\\ 1 & x\ge 1\end{cases}\quad (*)$$



Funkcija raspodele sl. pr. X

b) Како је:

$$P\{a<X<b\}=P\{X<b\}-P\{X<a\}=F(b)-F(a)$$

из (*) се добија

$$P(0<X<0.5)=F(0.5)-F(0)=0.5^2-0=0.25$$
$$P(0.5<X<1.5)=F(1.5)-F(0.5)=F(1)-F(0.5)=1-0.5^2=0.75$$
$$P(0.5<X<0.51)=F(0.51)-F(0.5)=0.51^2-0.5^2=0.0101$$

<u>Задатак 12.</u> Случајна променљива X дата је функцијом густине

$$f(x)=\frac{2}{a}-\frac{2x}{a^2}, \qquad 0<x<a$$

Одредити:

a) Функцију расподеле случајне променљиве X,

b) Вероватноћу догађаја $\frac{a}{2}<X<2a$.

Решење:

a)

$$f(x)=\frac{2}{a}-\frac{2x}{a^2}=\frac{2}{a}\left(1-\frac{x}{a}\right)$$

$$\int_0^a \frac{2}{a}\left(1-\frac{x}{a}\right)dx=\frac{2}{a}\int_0^a dx-\frac{2}{a^2}\int_0^a xdx=\frac{2}{a}x\Big|_0^a-\frac{2a^2}{a}\Big|_0^a=2-1=1$$

$\Rightarrow$ функција густине дефинисана је за свако a.

$$F(x)=P(X<x)=\int_{-\infty}^{x} f(x)dx=\int_0^x \frac{2}{a}\left(1-\frac{x}{a}\right)dx=\frac{2}{a}\int_0^x dx-\frac{2}{a^2}\int_0^x xdx=\frac{2x}{a}-\frac{x^2}{a^2}$$

$$F(x)=\begin{cases} 0 & x\le 0 \\ \dfrac{2x}{a}-\dfrac{x^2}{a^2} & 0<x<a \quad (*) \\ 1 & x\ge a \end{cases}$$

b) Имамо да је:

$$P\left(a < X < b\right) = P\left(X < b\right) - P\left(X < a\right) = F\left(b\right) - F\left(a\right)$$

па је:

$$P\left\{\frac{a}{2} < X < 2a\right\} = P\{X < 2a\} - P\left\{X < \frac{a}{2}\right\} = F(2a) - F\left(\frac{a}{2}\right)$$

Из (*) имамо да је:

$$F(2a) = 1$$

$$F\left(\frac{a}{2}\right) = \frac{2\cdot\frac{a}{2}}{a} - \frac{\left(\frac{a}{2}\right)^2}{a^2} = 1 - \frac{\frac{a^2}{4}}{a^2} = 1 - \frac{1}{4}$$

па је

$$P\left(\frac{a}{2} < X < 2a\right) = 1 - \left(1 - \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{4}$$

<u>Задатак 13.</u> Случајна величина *X* има густину расподеле:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ cx^2 & 0 \le x \le 1 \\ 0 & x > 1 \end{cases}$$

Одредити:

a) Константу *c*,

b) Функцију расподеле случајне промењиве *X* и скицирати њен график,

c) Вероватноћу $P(0.3 \le X \le 0.5)$,

d) $E(X)$ и $\sigma^2(X)$,

e) $E(2X+5)$ и $\sigma^2(5X+2)$.

Решење:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ cx^2 & 0 \le x \le 1 \\ 0 & x > 1 \end{cases}$$

a) $c = ?$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) = 1 \qquad \int_0^1 cx^2 dx = 1$$

$$c \cdot \left.\frac{x^3}{3}\right|_0^1 = 1 \qquad \frac{c}{3} = 1 \Rightarrow c = 3$$

b) $F(x) = \int_0^x 3x^2 dx = \left. x^3 \right|_0^x = x^3$

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ x^3 & 0 \le x \le 1 \\ 1 & x > 1 \end{cases}$$

c) $P(0.3 \le x \le 0.5) = F(0.5) - F(0.3) = 0.5^3 - 0.3^3 = 0.098$

d) $E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx = \int_0^1 xf(x)dx = 3\int_0^1 x^3 dx = 3 \cdot \left.\frac{x^4}{4}\right|_0^1 = \frac{3}{4}$

$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)dx = \int_0^1 x^2 f(x)dx = 3\int_0^1 x^4 dx = 3\cdot \frac{x^5}{5}\Bigg|_0^1 = \frac{3}{5}$$

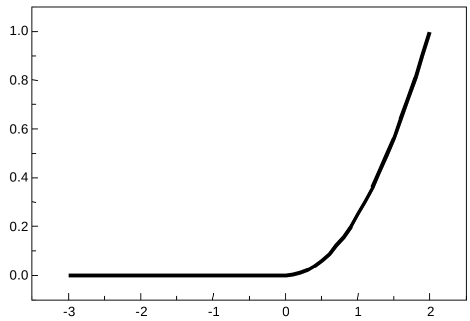
$$\sigma^2(X) = \frac{3}{5} - \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{3}{5} - \frac{9}{16} = \frac{48-45}{80} = \frac{3}{80} = 0.0375$$

e) $E(2X+5) = 2\cdot E(X) + 5 = 2\frac{3}{4} + 5 = \frac{3}{2} + 5 - \frac{13}{2} = 6.5$

$\sigma^2(5X+2) = 5^2 \cdot \sigma^2(X) = 25\cdot 0.0375 = 0.9375$

<u>Задатак 14.</u> За случајну променљиву *X*, са функцијом расподеле

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \frac{x^2}{4} & 0 \le x \le 2 \\ 1 & x > 1 \end{cases}$$



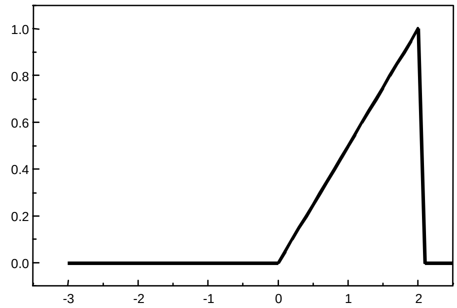
a) Конструисати график закона вероватноће,
b) Наћи медијану, модус и очекивану вредност.

Решење:

$$f(x) = \frac{\partial F(x)}{\partial x} = \left(\frac{x^2}{4}\right)' = \frac{1}{4}2x = \frac{x}{2}$$

a)

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{2} & 0\le x\le 2\\ 0 & x<0,\ x>2\end{cases}$$



b) Медијана је она вредност случајне променљиве за коју је:

$$\int_{-\infty}^{M_e} f\left(x\right)dx=0.5 \qquad \int_{0}^{Me}\frac{x}{2}dx=0.5$$

$$\frac{1}{2}\frac{x^2}{2}\bigg|_0^{Me}=\frac{1}{2} \qquad \frac{1}{2}\frac{M_e^2}{2}=\frac{1}{2}$$

$$M_e^2=2 \quad \Rightarrow \quad M_e=\sqrt{2}$$

Модус је она вредност X за коју закон вероватноће достиже највећу вредност:

$$M_o = 2$$

$$E\left(X\right) = \int_{-\infty}^{\infty} xf\left(x\right)dx = \int_0^2 x\frac{x}{2}dx = \frac{1}{2}\int_0^2 x^2dx = \frac{1}{2}\frac{x^3}{3}\bigg|_0^2 = \frac{8}{6}$$

$$E\left(X\right) = \frac{4}{3}$$

<u>Задатак 15.</u> За случајну променљиву *X*, са функцијом расподеле

$$F(x)=\begin{cases} 0 & x\le 0 \\ \dfrac{\sqrt[4]{x^2}}{2} & 0<x\le 4 \\ 1 & x>4 \end{cases}$$

Одредити:

a) Функцију густине,
b) Медијану, очекивану вредност и стандардну девијацију.

Решење:

a)

$$f(x)=\frac{\partial F(x)}{\partial x}=\left(\frac{\sqrt[4]{x^2}}{2}\right)'=\frac{1}{2}\left(\sqrt{x}\right)'=\frac{1}{2}\frac{1}{2\sqrt{x}}=\frac{1}{4\sqrt{x}}$$

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{4\sqrt{x}} & 0<x\le 4 \\ 0 & x\le 0, x>4 \end{cases}$$

b)

$$\mathrm{M}_e:\int_0^{\mathrm{M}_e}\frac{1}{4\sqrt{x}}dx=\frac{1}{4}\int_0^{\mathrm{M}_e}x^{-\frac{1}{2}}dx=\frac{1}{4}\cdot\frac{\sqrt{x}}{\frac{1}{2}}\Big|_0^{M_e}=\frac{\sqrt{M_e}}{2}=0.5$$

$$\sqrt{\mathrm{M}_e}=1 \quad\Rightarrow\quad \mathrm{M}_e=1$$

$$m=\int_{-\infty}^{\infty} x\cdot f(x)\cdot dx=\int_0^4 \frac{x\cdot x^{-\frac{1}{2}}}{4}dx=\frac{1}{4}\int_0^4 x^{\frac{1}{2}}dx=\frac{1}{4}\cdot\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\Big|_0^4=\frac{1}{6}\cdot 4^{\frac{3}{2}}=\frac{4}{3}$$

$$m_2=\int_{-\infty}^{\infty} x^2\cdot f(x)\cdot dx=\frac{1}{4}\int_0^4 x^2\cdot x^{-\frac{1}{2}}dx=\frac{1}{4}\int_0^4 x^{\frac{3}{2}}dx=\frac{1}{4}\frac{x^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}}\Big|_0^4=\frac{1}{10}\cdot 2^5=\frac{16}{5}=3.2$$

$$\sigma^2(X)=m_2-m^2=3.2-\left(\frac{4}{3}\right)^2=1.423$$

<u>Задатак 16.</u> Случајна променљива X дата је функцијом густине:

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}x+a & -1\le x\le 0\\ -\frac{1}{2}x+2a & 0<x\le 1\\ 0 & x<-1,\ x>1\end{cases}$$

Одредити:

a) Константу a и скицирати график функције $f(x)$,
b) Функцију $F(x)$ расподеле за X и скицирати њен график,
c) $E(3X+2)$, $\sigma^2(2X+3)$,
d) $P(X>0)$.

Решење:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}x+a & -1\le x\le 0\\ -\dfrac{1}{2}x+2a & 0<x\le 1\\ 0 & x<-1,\ x>1\end{cases}$$

а) a=? $\quad \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)dx=1$

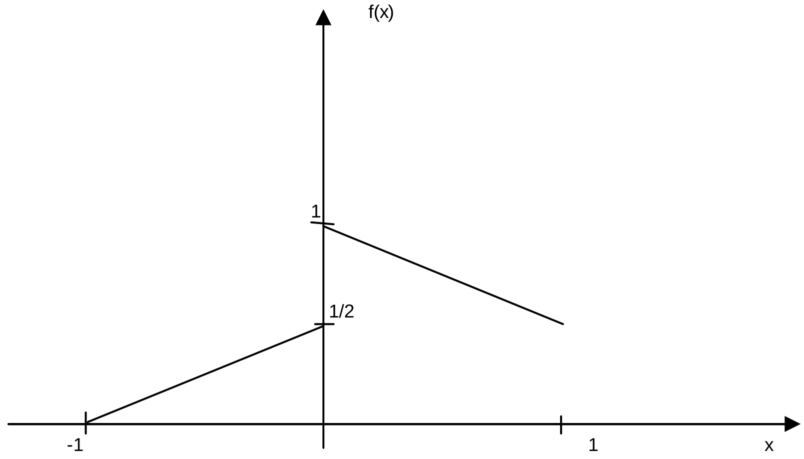
$$\int\limits_{-1}^{0}\left(\frac{1}{2}x+a\right)dx+\int\limits_{0}^{1}\left(-\frac{1}{2}x+2a\right)dx=$$

$$=\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{x^2}{2}+ax\right)\Big|_{-1}^{0}+\left(-\frac{1}{2}\cdot\frac{x^2}{2}+2ax\right)\Big|_{0}^{1}=$$

$$=-\frac{1}{4}+a-\frac{1}{4}+2a=1$$

$$3a=\frac{3}{2}\qquad\Rightarrow\qquad a=\frac{1}{2}$$

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}x+\dfrac{1}{2} & -1\le x\le 0\\ -\dfrac{1}{2}x+1 & 0<x\le 1\\ 0 & x<-1,\ x>1\end{cases}$$



b) $F(x) = P(X \le x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx$

$x \in [-1,0]$

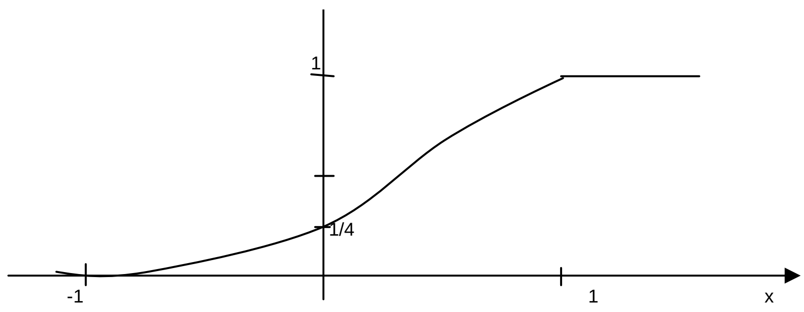
$$F(x) = \int_{-1}^{x} \left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\right)dx = \left(\frac{x^2}{4} + \frac{x}{2}\right)\Bigg|_{-1}^{x} = \frac{x^2}{4} + \frac{x}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{x^2}{4} + \frac{x}{2} + \frac{1}{4}$$

$x \in (0,1]$

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx = \int_{-1}^{0} \left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\right)dx + \int_{0}^{x} \left(1 - \frac{x}{2}\right)dx = \left(\frac{x^2}{4} + \frac{x}{2}\right)\Bigg|_{-1}^{0} + \left(x - \frac{x^2}{4}\right)\Bigg|_{0}^{x} =$$

$$= -\frac{1}{4} + \frac{1}{2} + x - \frac{x^2}{4} = \frac{1}{4} + x - \frac{x^2}{4}$$

$$F(x)=\begin{cases} 0 & x<-1 \\ \dfrac{x^2}{4}+\dfrac{x}{2}+\dfrac{1}{4} & -1\le x\le 0 \\ \dfrac{1}{4}+x-\dfrac{x^2}{4} & 0<x\le 1 \\ 1 & x>1 \end{cases}$$



c) $E(3X+2)=3E(X)+2$

$$E(X)=\int_{-\infty}^{\infty} x\ f(x)dx=\frac{1}{2}\int_{-1}^{0} x(x+1)dx+\int_{0}^{1} x\left(1-\frac{1}{2}x\right)dx=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_{-1}^{0}+\left(\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}\right)\Bigg|_{0}^{1}=\frac{1}{6}-\frac{1}{4}+\frac{1}{2}-\frac{1}{6}=\frac{1}{4}$$

$$E\left(3X+2\right)=3\cdot E\left(X\right)+2=\frac{3}{4}+2=\frac{11}{4}$$

$$E\left(X^2\right)=\int_{-\infty}^{\infty}x^2 f\left(x\right)dx=\frac{1}{2}\int_{-1}^{0}x^2\left(x+1\right)dx+\int_{0}^{1}\left(1-\frac{1}{2}x\right)dx=$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{x^4}{4}+\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{-1}^{0}+\left(\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{8}\right)\Bigg|_{0}^{1}=-\frac{1}{8}+\frac{1}{6}+\frac{1}{3}-\frac{1}{8}=-\frac{1}{4}+\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$$

$$\sigma^2(X)=E(X^2)-(E(X))^2=\frac{1}{4}-\left(\frac{1}{4}\right)^2=\frac{15}{16}$$

$$\sigma^2(2X+3)=4\cdot\sigma^2(X)=4\cdot\frac{15}{16}=\frac{15}{4}$$

d) $P(X>0)=1-P(X<0)=1-F(0)=1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$

Задатак 17. За униформну расподелу дату густином

$$f\left(x\right)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a} & a<x<b\\ 0 & \text{ван}\end{cases}$$

a) Наћи функцију расподеле,
b) Одредити E(X) и σ^2(X),
c) Одредити медијану,
d) Испитати асиметрију и спљоштеност.

Решење:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a} & a<x<b\\ 0 & \text{ван}\end{cases}$$

а)

$$F(x)=P(X\le x)=\int_{-\infty}^{x} f(x)dx=\begin{cases}0 & x<a\\ \displaystyle\int_a^x \frac{1}{b-a}dx=\frac{x-a}{b-a} & a\le x\le b\\ 1 & x>b\end{cases}$$

$$F(x)=\begin{cases}0 & x<a\\ \dfrac{x-a}{b-a} & a\le x\le b\\ 1 & x>b\end{cases}$$

b)

$$E(x)=\int_{-\infty}^{\infty} x\cdot f(x)dx$$

$$E(x)=\int_a^b x\frac{1}{b-a}dx=\frac{a+b}{2}$$

$$\sigma^2(x)=E\left(X^2\right)-\left[E(x)\right]^2=\int_a^b x^2\frac{1}{b-a}dx-\left(\frac{a+b}{2}\right)^2=\frac{(b-a)^2}{12}$$

c)

$$F(M_e) = 0.5 \Rightarrow \frac{M_e - a}{b - a} = \frac{1}{2}$$

$$M_e = \frac{b-a}{2} + a = \frac{b+a}{2}$$

d)

$\beta_1 = \dfrac{\mu_3}{\sigma^3}$ коефицијент асиметрије;

$\beta_2 = \dfrac{\mu_4}{\sigma^4}$ коефицијент спљоштености;

$$\sigma = \frac{b-a}{\sqrt{12}}$$

$$\mu_3 = \int_a^b (x - E(X))^3 \frac{1}{b-a} dx = \frac{1}{b-a} \int_a^b \left(x - \frac{a+b}{2} \right)^3 dx = 0$$

$\beta_1 = 0 \Rightarrow$ расподела је симетрична

$$\mu_4 = \int_a^b (x - E(X))^4 \frac{1}{b-a} dx = \frac{1}{b-a} \int_a^b \left(x - \frac{a+b}{2} \right)^4 dx = \frac{(b-a)^4}{80}$$

$$\beta_2 = \frac{\dfrac{(b-a)^4}{80}}{\left(\dfrac{b-a}{\sqrt{12}} \right)^4} = \frac{9}{5} < 3 \Rightarrow$$

расподела има спљоштеност мању од нормалне

<u>**Задатак 18.**</u> Случајна променљива *X* има униформну расподелу на интервалу [1;3].

a) Одредити и скицирати функцију густине,

b) Одредити и скицирати функцију расподеле,
c) Израчунати очекивање и варијансу,
d) Израчунати вероватноћу да X припадне интервалима (1.5; 2.5) и (2.5; 3.5).

Решење:

$X:U\left(a;b\right) \qquad a=1 \quad b=3$

a)

$$f\left(x\right)=\begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & ; \quad a\le x\le b \\ 0 & ; \quad \text{ван} \end{cases}$$

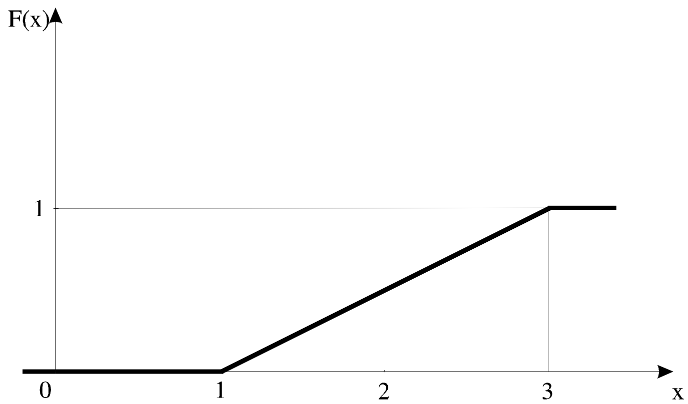
$$f\left(x\right)=\begin{cases} \dfrac{1}{3-1}=\dfrac{1}{2} & ; \quad x\in\left[1,3\right] \\ 0 & ; \quad x\notin\left[1,3\right] \end{cases}$$

Funkcija gustine sl. pr. X

b)

$$F(x)=P(X<x)=\int_{-\infty}^{x} f(x)dx=\int_{a}^{x}\frac{1}{b-a}dx=\frac{x-a}{b-a}=\frac{x-1}{2}$$

$$F(x)=\begin{cases} 0 & ; \quad x\le 1 \\ \dfrac{x-1}{2} & ; \quad 1<x<3 \\ 1 & ; \quad x\ge 3 \end{cases}$$



Funkcija raspodele sl. pr. X

c)

$$E(X)=m=\int_{-\infty}^{\infty} x\cdot f(x)dx=\int_{1}^{3} x\cdot\frac{1}{2}dx=2$$

$$E\left(X^2\right)=m_2=\int_{-\infty}^{\infty} x^2\cdot f(x)dx=\int_{1}^{3} x^2\cdot\frac{1}{2}dx=\frac{13}{3}$$

$$\sigma^2=m_2-m^2=\frac{13}{3}-2^2=\frac{1}{3}$$

$$\sigma=\frac{\sqrt{3}}{3}$$

d)

$$P(c < X < d) = \int_c^d \frac{1}{b-a}\,dx = \frac{d-c}{b-a}$$

$$P(1.5 < X < 2.5) = \int_{1.5}^{2.5} \frac{1}{2}\,dx = \frac{1}{2}$$

$$P(2.5 < X < 3.5) = \int_{2.5}^{3} \frac{1}{2}\,dx + \int_{3}^{3.5} 0\,dx = \frac{1}{4}$$

<u>Задатак 19.</u> Случајна променљива *X* има нормалну расподелу са параметрима 6 и 4. Израчунати вероватноћу:

a) да *X* буде између 6 и 7,

b) да *X* буде између 2.1 и 8.2.

Решење:

а)

$$P = (6 < X < 7)$$

Да бисмо израчунали ову вероватноћу (употребом таблица за стандардизовану нормалну расподелу) потребно је да извршимо <u>стандардизацију</u> случајне променљиве *X* тј. потребно је да од случајне променљиве *X* која има $N(m;\sigma^2)$ добијемо X^*:N(0;1) на следећи начин:

$$X^* = \frac{X-m}{\sigma}$$

тј. како је

$$X : N(6;4)$$
$$m = 6$$
$$\sigma^2 = 4 \quad \Rightarrow \quad \sigma = 2$$

добијамо

$$P(6 < X < 7) = P\left(\frac{6-6}{2} < \frac{X-m}{\sigma} < \frac{7-6}{2}\right) = P\left(0 < X^* < \frac{1}{2}\right) =$$
$$= \phi(0.5) - \phi(0) \underset{N}{\overset{таб}{=}} 0.6915 - 0.5 = 0.1915$$

b)

$$\{2.1 < X < 8.2\} = P\left(\frac{2.1-6}{2} < \frac{X-m}{\sigma} < \frac{8.2-6}{2}\right) = P\left(-1.95 < X^* < 1.1\right) =$$
$$= \phi(1.1) - \phi(-1.95) = \phi(1.1) - \left(1 - \phi(1.95)\right) \underset{N}{\overset{таб}{=}} 0.8643 - (1 - 0.9744) = 0.8387$$

<u>Напомена</u>: Ако се посматра симетрични интервал (-z; z)

$$P\left(-z < Z^* < z\right) = 2\phi(z) - 1$$

јер је

$\phi(-z) = 1 - \phi(z)$, односно

$$P\left(-z < Z^* < z\right) = \phi(z) - \left(1 - \phi(z)\right) = 2\phi(z) - 1$$

<u>Задатак 20.</u> Случајна променљива појаве грешке дефинисана је као N(10,σ^2). Позната је вероватноћа P(10 < X < 10.5) = 0.1. Колика је стандардна девијација ове случајне променљиве?

Решење:

$$X : N(10,\sigma^2) \qquad P(10 < X < 10.5) = 0.1$$

$$\sigma_x = ? \qquad X^* = \frac{X-m}{\sigma}$$

$$P\left(\frac{10-m}{\sigma} < X^* < \frac{10.5-m}{\sigma}\right) = P\left(\frac{10-10}{\sigma} < X^* < \frac{10.5-10}{\sigma}\right) = 0.1$$

$$P\left\{0 < X^* < \frac{0.5}{\sigma}\right\} = \phi\left(\frac{0.5}{\sigma}\right) - \phi(0) = 0.1$$

$$\phi\left(\frac{0.5}{\sigma}\right) = 0.1 + 0.5 = 0.6 \underset{N}{\overset{таб}{\Rightarrow}} \frac{0.5}{\sigma} = 0.25 \quad \Rightarrow \quad \sigma = 2$$

<u>Задатак 21.</u> Случајна променљива X има N(100, 25) расподелу.

a) Одредити P((X-100)>10),

b) Одредити математичко очекивање и варијансу случајне променљиве X-100.

Решење:

$$X : N(100;25)$$

$$m = 100$$

$$\sigma^2 = 25$$

$$\sigma = 5$$

Стандардизована нормална расподела $Z = \dfrac{X-m}{\sigma} : N(0,1)$

a)

$$P\left(\left(X-100\right)>10\right)=1-P\left(\left(X-100\right)\le 10\right)=$$
$$1-P\left(\left(\frac{X-100}{5}\right)\le\frac{10}{5}\right)=1-P\left(\frac{X-100}{5}\le 2\right)=$$
$$1-\phi(2)=1-0.9772=0.0228$$
$$P\left(\left(X-100\right)>10\right)=0.0228$$

b)

$$E\left(X-100\right)=E\left(X\right)-100=100-100=0$$
$$\sigma^2\left(X-100\right)=\sigma^2\left(X\right)=25$$

<u>Задатак 22.</u> Вероватноћа производње дефектног елемента је 0.003. Израчунати вероватноћу да ће од 1000 случајно изабраних елемената бити:

a) 4 дефектна,
b) Бар 1 дефектан,
c) Не више од 2 дефектна.

Решење:

n=1000

A - 1 елеменат је дефектан; $p = P(A) = 0.03$

$$q = P(\overline{A}) = 0.997$$

(S_n=k)={“од n артикала $к$ је неисправно”}

$$X : B(n, p)$$

a)

$$P\left(S_n = 4\right) = \binom{1000}{4} 0.003^4 \cdot 0.997^{996}$$

Вршимо апроксимацију:

$n \cdot p = 3 = \lambda$
$\lambda < 10 \Rightarrow X$ има приближно Пуасонову расподелу P(3), па је

$$P\left(S_n = 4\right) \approx e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^k}{k!} \underset{P(3)}{\overset{таб}{\Rightarrow}} 0.168031$$

b)

$$P\left(S_n \geq 1\right) = P\left(1 \leq S_n \leq 1000\right) = 1 - P\left(S_n < 1\right) =$$
$$= 1 - P\left(S_n = 0\right) \underset{P(3)}{\overset{таб}{=}} = 1 - 0.04978 = 0.95022$$

c)

$$P\left(S_n \leq 2\right) = P\left(0 \leq S_n \leq 2\right) \underset{P(3)}{\overset{таб}{\Rightarrow}} 0.423190$$

Поступак за решавање задатака код којих се користи апроксимација Биномне расподеле је следећи:

1. <u>Ако је n·p <10</u>
вrши се апроксимација Пуасоновом расподелом и то $\lambda = np$

$$\boxed{n \cdot p < 10 \quad \Rightarrow \quad B(n,p) \approx P(\lambda) \qquad \lambda = np}$$

A) $$P(S_n = k) \approx e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^k}{k!}$$

B) $$P(S_n \le m) \approx \sum_{k=0}^{m} e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^k}{k!}$$

C) $$P(S_n > m) = 1 - P(S_n < m) \approx 1 - \sum_{k=0}^{m} e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^k}{k!}$$

2. <u>Ако је n·p ≥10</u>
врши се апроксимација Нормалном расподелом и то

$$\boxed{n \cdot p \ge 10 \quad \Rightarrow \quad B(n,p) \approx N(m, \sigma^2) \qquad m = np \;\; \sigma^2 = npq}$$

D) $$P(S_n = k) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} \varphi(X), \quad \text{где је} \quad X = \frac{k - np}{\sqrt{npq}}$$

E) $$P(a \le S_n \le b) \approx P\left(\frac{a - np}{\sqrt{npq}} \le S_n^* \le \frac{b - np}{\sqrt{npq}} \right)$$

Задатак 23. Вероватноћа погађања у циљ у сваком од 100 независних гађања је 0.8. Израчунати вероватноћу да ће од 100 обављених гађања бити:

a) Бар 80 погодака,

b) Број погодака бити између 40 и 90.

Решење:

A - Погодак једним метком у циљ;

$$P(A) = p = 0.8;$$
$$P(\overline{A}) = q = 0.2;$$
$$n = 100$$
$$S_n : B(100; 0.8)$$

$$P\left(S_n \geq 80\right) = P\left(80 \leq S_n \leq 100\right) = \sum_{k=80}^{100} \binom{100}{k} 0.8^k \left(1-0.8\right)^{100-k}$$

Вршимо апроксимацију:

Како је n·p=100·0.8=80>10 врши се апроксимација Нормалном расподелом, тј.

a)

$$P\left(80 \leq S_n \leq 100\right) \approx P\left(\frac{80-80}{\sqrt{100 \cdot 0.8 \cdot 0.2}} \leq S_n^* \leq \frac{100-80}{\sqrt{100 \cdot 0.8 \cdot 0.2}}\right) =$$
$$= P\left(0 < S_n^* < 5\right) = \phi(5) - \phi(0) = 1 - 0.5 = 0.5$$

b)

$$P\left(40 \le S_n \le 90\right) \approx P\left(\frac{40-80}{\sqrt{100\cdot 0.8\cdot 0.2}} \le S_n^* \le \frac{90-80}{\sqrt{100\cdot 0.8\cdot 0.2}}\right)=$$
$$= P\left(-10 < S_n^* < 2.5\right) = \phi(2.5)-\phi(-10) = 0.9938-0 = 0.9938$$

Задатак 24. Вероватноћа квара уређаја је 0.03. У ком проценту се може очекивати да ће се код 1000 уређаја кварови појавити у не мање од 20 и не више од 40 случајева?

Решење:

Број неисправних уређаја је случајна промењива са биномном расподелом и параметрима

n = 1000
p = 0.03

тј. $X : B(1000, 0.03)$

Тражи се вероватноћа $P\left(20 \le X \le 40\right)$

при чему је X број неисправних уређаја. Тако ћемо добити

$$P\left(20 \le X \le 40\right) = \sum_{k=20}^{40}\binom{1000}{k}0.03^k\left(1-0.03\right)^{1000-k}$$

Ову вероватноћу израчунаћемо применом апроксимације

Како је n·p = 1000·0.03 = 30 (30>10) врши се апроксимација Нормалном расподелом, тј.

$$P\left(20\le X\le 40\right)\approx\phi\left(\frac{40-n\cdot p}{\sqrt{np\left(1-p\right)}}\right)-\phi\left(\frac{20-n\cdot p}{\sqrt{np\left(1-p\right)}}\right)=$$
$$=\phi\left(\frac{40-30}{\sqrt{29.1}}\right)-\phi\left(\frac{20-30}{\sqrt{29.1}}\right)=2\phi\left(1.85\right)-1=0.9357$$

што значи да се у 93.6% случајева може десити да је број неисправних уређаја између 20 и 40.

Задатак 25. Случајна промењива *X* има Студентову расподелу са 20 степени слободе. Одредити константу b тако да је

$$P\left(\left|X\right|>b\right)=0.6$$

Решење:

$$X:t_{20}$$

$$P\left(\left|X\right|>b\right)=0.6$$
$$1-P\left(\left|X\right|<b\right)=0.6$$

$$1-P\left(-b<X<b\right)=1-\left[P\left(X<b\right)-P\left(X<-b\right)\right]=$$
$$=1-[F(b)-(1-F(b))]=2-2F(b)=0.6$$

$$2F(b)=1.4$$
$$F(b)=0.7\ \underset{t_{20}}{\overset{таб}{\Rightarrow}}\ b=0.5$$

<u>Задатак 26.</u> Случајна променљива *X* има Студентову расподелу са 121 степеном слободе. Израчунати вероватноћу да је *X* између -1 и 2.

Решење:

Када је број степени слободе Студентове расподеле већи од 20 врши се апроксимација Студентове расподеле у Нормалну

$$\boxed{n > 20 \Rightarrow t_n \approx N(0,1)}$$

Пошто је n=121

$$P\left(-1 < X < 2\right) \approx \phi(2) - \phi(-1) = \phi(2) - (1 - \phi(1)) \underset{N}{\overset{таб}{\Rightarrow}} 0.977 - 1 + 0.841 = 0.818$$

<u>Задатак 27.</u> Случајна променљива *X* има Хи-квадрат расподелу са 15 степени слободе. Одредити непознате крајеве интервала тако да је

$$P\left(a < X < b\right) = 0.7 \quad \text{и} \quad P\left(X > a\right) = 0.8;$$

Решење:

$$X : \chi^2_{15} \qquad n = 15$$

$$P\left(X > a\right) = 0.8$$
$$1 - P\left(X < a\right) = 0.8$$

$$P(X<a)=0.2\underset{\chi^2_{15}}{\overset{таб}{\Rightarrow}}a=10.307$$
$$P(a<X<b)=0.7$$
$$P(X<b)-P(X<a)=F(b)-F(a)=0.7$$
$$F(b)-0.2=0.7$$
$$F(b)=0.9\underset{\chi^2_{15}}{\overset{таб}{\Rightarrow}}b=22.307$$

<u>Задатак 28.</u> Случајна променљива *X* има Хи-квадрат расподелу са 32 степена слободе. Израчунати вероватноћу

$$P(24<X<40)$$

Решење:

Када је број степени слободе Хи-квадрат расподеле већи од 30 врши се апроксимација Хи-квадрат расподеле у Нормалну

$$\boxed{n>30 \quad \Rightarrow \quad \chi^2_n \approx N(n,2n)}$$

Пошто је n=32 биће:

$$\sigma^2=2\cdot 32=64$$

$$P(24 < X < 40) \approx P\left(\frac{24-32}{8} < \frac{X-m}{\sigma} < \frac{40-32}{8}\right) =$$

$$= P\left(-1 < X^* < 1\right) = 2\phi(1) - 1 \underset{N}{\overset{таб}{\Rightarrow}} 2 \cdot 0.8413 - 1 = 0.6826$$

<u>Задатак 29.</u> Случајна променљива има Фишерову расподелу са $n_1=5$ и $n_2=10$ степени слободе. Одредити константу b тако да важи:

$$P(0.2 < X < b) = 0.90 \quad \text{и} \quad P(0.2 > X) = 0.05$$

Решење:

$$X : F_{n_1,n_2} \qquad n_1 = 5 \qquad n_2 = 10$$

$$P(0.2 < X < b) = 0.90$$

$$P(X < b) - P(X < 0.2) = F(b) - F(a) = 0.90$$

$$F(b) - 0.05 = 0.90$$

$$F(b) = 0.95$$

$$F(b) = 0.95 \quad \underset{F_{5,10}}{\overset{таб}{\Rightarrow}} \quad b = 3.33$$

<u>Задатак 30.</u> Одредити P($1 \le X < 4$) ако је:

a) X: $U(2,5)$,

b) X: $N(3,4)$,

c) X: $P(3)$,

d) X: $B(8;0,5)$,

e) X: t_{4},

f) X: χ_6^2 .

Решење:

a)

$$P(1 \le X < 4) = \int_1^4 f(x)dx = \int_2^4 \frac{1}{5-2}dx = \frac{x}{3}\Big|_2^4 = \frac{2}{3}$$

b)

$$P(1 \le X < 4) = P\left(\frac{1-3}{2} \le \frac{X-m}{\sigma} < \frac{4-3}{2}\right) = \phi(0.5) - \phi(-1) =$$

$$= \phi(0.5) - (1 - \phi(1)) = 0.6915 - (1 - 0.8413) = 0.5328$$

c)

$$P(1 \le X < 4) = P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3) =$$

$$= \frac{e^{-3} \cdot 3}{1!} + \frac{e^{-3} \cdot 3^2}{2!} + \frac{e^{-3} \cdot 3^3}{3!} = 0.149 + 0.224 + 0.224 = 0.597$$

d)

$$P(1 \le X < 4) = P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3) =$$

$$= \binom{8}{1} 0.5^8 + \binom{8}{2} 0.5^8 + \binom{8}{3} 0.5^8 = 0.03125 + 0.10937 + 0.21875 = 0.35937$$

e) P($1 \le X < 4$) = F(4) - F(1) = 0.992 - 0.813 = 0.179
(користе се таблице за одговарајућу расподелу)

f) P(1 ≤ X < 4) = F(4) - F(1) = 0.3 – 0.02 = 0.28

Задатак 31. Дата је функција генератриса случајне промењљиве X

$$g(t) = q + pe^t$$

Одредити:
a) Математичко очекивање,
b) Варијансу.

Решење:

$$g(t) \overset{деф}{=} E\left(e^{tx}\right)$$

$$m_r \overset{деф}{=} \frac{\partial^r g(t)}{\partial t^r}\Big|_{t=0}$$

a)

$$m_1 = \frac{\partial\left(q+pe^t\right)}{\partial t}\Bigg|_{t=0} = pe^t\Big|_{t=0} = pe^0 = p$$

$$m = E(x) = p$$

b)

$$m_2 = \frac{\partial^2\left(q+pe^t\right)}{\partial t^2}\Bigg|_{t=0} = \frac{\partial\left(pe^t\right)}{\partial t}\Bigg|_{t=0} = pe^t\,\Big|_{t=0} = p$$

$$\sigma^2 = m_2^2 - m^2 = p - p^2 = p(1-p) = pq$$

и заиста

$$g(t) = (g + pe^t)^n \Rightarrow X : B(n, p) \qquad m = E(X) = p$$
$$\sigma^2 = npq$$

за n=1

$$g(t) = (g + pe^t) \quad \Rightarrow \quad \sigma^2 = 1pq$$

<u>Задатак 32.</u> Дата је функција генератрисе случајне променљиве *X*

$$g(t) = q + pe^t$$

За случајну променљиву *Y*=7*X*–5 одредити математичко очекивање E(*Y*) и варијансу (дисперзију) D(*Y*).

Решење:

$$g(t) = E(e^{tx})$$
$$m_r = \frac{\partial^r g(t)}{\partial t} / t = 0$$
$$m_1 = E(X) = \frac{\partial(q + pe^t)}{\partial t} / t = 0 = pe^t / t = 0 = p$$
$$m = E(X) = p$$
$$m_2 = \frac{\partial^2(q + pe^t)}{\partial^2 t} / t = 0 = \frac{\partial(pe^t)}{\partial t} / t = 0 = pe^t / t = 0 = p$$
$$S^2 = m_2 - m^2 = p - p^2 = p(1 - p) = pq$$

Користимо особине за математичко очекивање и дисперзију:

$$\boxed{\begin{aligned}&Y = aX + b\\&E(Y) = aE(X) + b\\&\sigma_y^2 = a^2\sigma_x^2\end{aligned}}$$

$$y = 7X - 5$$
$$E(Y) = E(7X - 5) = 7E(X) - 5$$
$$\sigma_Y^2 = 7^2\sigma_X^2$$

$$\sigma_X^2 = m_2 - m_1^2$$
$$\sigma_X^2 = p - p^2 = p(1-p) = pq$$

$$E(Y) = 7E(X) - 5 = 7p - 5$$
$$\sigma_Y^2 = 49\sigma_X^2 = 49pq$$

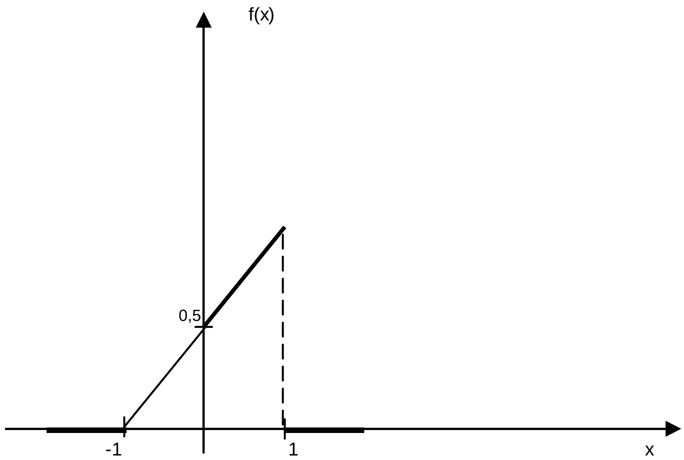
<u>Задатак 33.</u> Наћи вероватноћу да тачно три елемента случајног узорка обима пет из популације обележја X са густином расподеле

$$f(x) = \begin{cases} 0.5(x+1) & -1 < x < 1 \\ 0 & \text{ван} \end{cases}$$

буду позитивна.

Решење:

$$f(x)=\begin{cases}0.5(x+1) & -1<x<1\\ 0 & \text{ван}\end{cases}$$



Вероватноћа да ће случајно изабрани елемент популације са датом расподелом бити позитиван је:

$$P(x>0)=1-P(x<0)=1-\int_{-1}^{0}0.5(x+1)\,dx=$$
$$=1-\frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{2}+x\right)\Bigg|_{-1}^{0}=1-\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}+1\right)=\frac{3}{4}=0.75$$

Број X позитивних елемената у узорку од 5 елемената има биномну расподелу са параметрима n = 5 и p = 0.75, па је тражена вероватноћа:

$$P(X=3)=\binom{5}{3}\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^3\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^2=\frac{5\cdot4\cdot3}{3\cdot2}\cdot\frac{27}{64}\cdot\frac{1}{16}=0.26$$

<u>Задатак 34.</u> Из кутије у којој се налази 50 сијалица, међу којима 8 дефектних, узима се узорак од 4 сијалице. Нека је X број дефектних сијалица у узорку. Одредити закон расподеле вероватноћа случајне променљиве X и њено математичко очекивање

a) За случај избора без враћања,

b) За случај избора са враћањем.

Решење:

a) Без враћања:

$$P(X=k)=\frac{\binom{8}{k}\cdot\binom{42}{4-k}}{\binom{50}{4}},\quad k=0,1,2,3,4$$

$$X:\begin{pmatrix}0 & 1 & 2 & 3 & 4\\ 0.486 & 0.3987 & 0.1047 & 0.0102 & 0.0003\end{pmatrix}$$

$$E(X)=\sum_{k=0}^{4}k\cdot p_k=\ldots=0.6399$$

b) Са враћањем: $\quad X:B\left(4,\frac{8}{50}\right)$

$$P(X=k)=\binom{4}{k}\cdot\left(\frac{8}{50}\right)^k\cdot\left(\frac{42}{50}\right)^{4-k},\quad k=0,1,2,3,4$$

$$X:\begin{pmatrix}0 & 1 & 2 & 3 & 4\\ 0.4979 & 0.3793 & 0.1084 & 0.0137 & 0.0006\end{pmatrix}$$

$$E(X) = 4 \cdot \frac{8}{50} = 0.64$$

<u>Задатак 35.</u> Истовремено се бацају две коцке и евидентира се збир који се при томе добија. Игра се састоји у томе да играч који добије збир мањи од 4, добија 100 динара пута збир; ако добије збир 4, 5 или 6, добија 50 динара пута збир; ако је збир 7, добија 280 динара и, ако је збир већи од 7, играч добија 25 динара пута збир. Одредити:

a) Очекивани добитак у игри;

b) Вероватноћу да добитак буде већи од 250 динара;

c) Вероватноћу да је добијени збир био 6, ако знамо да је играч добио 300 динара.

Решење:

У табели су дате могући исходи (*X* збирови), одговарајући (*Y*) добици и вероватноће (*p*):

X	Y	*p*
2	200	1/36
3	300	2/36
4	200	3/36
5	250	4/36
6	300	5/36
7	280	6/36
8	200	5/36
9	225	4/36
10	250	3/36
11	275	2/36
12	300	1/36

Закон вероватноћа за случајну променљиву Y, чија се очекивана вредност тражи, дат је у следећој табели:

Y	200	225	250	275	280	300
p_i	9/36	4/36	7/36	2/36	6/36	8/36

a)

$$E(Y)=\sum y_i\cdot p_i=200\cdot\frac{9}{36}+225\cdot\frac{4}{36}+250\cdot\frac{7}{36}+275\cdot\frac{2}{36}+$$
$$+280\cdot\frac{6}{36}+300\cdot\frac{8}{36}=252.22$$

b)

$$P(Y>250)=P(Y=275)+P(Y=280)+P(Y=300)=$$
$$=\frac{2}{36}+\frac{6}{36}+\frac{8}{36}=\frac{4}{9}=0.444$$

c) $$P(X=6/Y=300)=\frac{P(X=6,Y=300)}{P(Y=300)}=\frac{\frac{5}{36}}{\frac{8}{36}}=\frac{5}{8}=0.625$$

<u>**Задатак 36.**</u> У кутији се налази 5 куглица нумерисаних бројем 1, 2 куглице нумерисане бројем 2 и 4 куглице нумерисане бројем 3. Одједном се извлаче три куглице. Ако је X случајна променљива која представља збир бројева на извученим куглицама, одредити:

a) Закон расподеле вероватноћа случајне променљиве X,

b) E(X), $\sigma^2(X)$,

c) Вероватноћу да ће збир бити највише E(X).

Решење:

У табели су дате могући исходи (комбинације куглица) и одговарајући збирови *X*:

1	2	3	X
1	1	1	6
1	0	2	7
1	2	0	5
2	1	0	4
2	0	1	5
3	0	0	3
0	1	2	8
0	0	3	9
0	2	1	7

а)

$$P(X=3)=\frac{\binom{5}{3}}{\binom{11}{3}}=0.0606$$

$$P(X=4)=\frac{\binom{5}{2}\binom{2}{1}}{\binom{11}{3}}=0.1212$$

$$P(X=5)=\frac{\binom{5}{2}\binom{4}{1}+\binom{2}{2}\binom{5}{1}}{\binom{11}{3}}=0.2424$$

$$P(X=6)=\frac{\binom{5}{1}\binom{2}{1}\binom{4}{1}}{\binom{11}{3}}=0.2424$$

$$P(X=7)=\frac{\binom{2}{2}\binom{4}{1}+\binom{4}{2}\binom{5}{1}}{\binom{11}{3}}=0.2061$$

$$P(X=8)=\frac{\binom{4}{2}\binom{2}{1}}{\binom{11}{3}}=0.0727$$

$$P(X=9)=\frac{\binom{4}{3}}{\binom{11}{3}}=0.0243$$

Закон вероватноћа за случајну промењиву X дат је у следећој табели:

X	3	4	5	6	7	8	9
p_i	0.0606	0.1212	0.2727	0.2424	0.2061	0.0727	0.0242

b)

$$E(X)=\frac{30+80+225+240+238+96+36}{165}=5.73$$

$$\sigma^2(X)=E\left(X^2\right)-\left(E(X)\right)^2=\frac{5733}{165}-5.73^2=1.947$$

c)

$$P\left(X\le E(X)\right)=P\left(X\le 5.73\right)=P(X=3)+P(X=4)+P(X=5)=$$
$$=0.0606+0.1212+0.2727=0.4545$$

4. ДВОДИМЕНЗИОНАЛНЕ СЛУЧАЈНЕ ПРОМЕНЉИВЕ

Задатак 1. Дати су подаци за једну општину у којој живи 100 пољопривредних домаћинстава и то према величини домаћинства и величини поседа обрадиве земље (у хектарима):

Једночлано домаћинство:	- 2 без земље, - 1 са 1 хектаром земље.
Двочлано домаћинство:	- 2 без земље, - 2 са 1 хектаром земље, - 2 са 2 хектара земље, - 1 са 3 хектара земље.
Трочлано домаћинство:	- 1 без земље, - 2 са 1 хектаром земље, - 3 са 2 хектара земље, - 2 са 3 хектара земље, - 2 са 4 хектара земље, - 1 са 5 хектара земље.
Четворочлано домаћинство:	- 1 са 2 хектара земље, - 4 са 3 хектара земље, - 4 са 4 хектара земље, - 3 са 5 хектара земље, - 3 са 6 хектара земље, - 1 са 7 хектара земље.
Петочлано домаћинство:	- 1 са 2 хектара земље, - 4 са 3 хектара земље,

	- 6 са 5 хектара земље,
	- 5 са 6 хектара земље,
	- 4 са 7 хектара земље,
	- 1 са 8 хектара земље,
	- 1 са 9 хектара земље.
Шесточлано домаћинство:	- 1 са 4 хектара земље,
	- 2 са 5 хектара земље,
	- 3 са 6 хектара земље,
	- 6 са 7 хектара земље,
	- 4 са 8 хектара земље,
	- 2 са 9 хектара земље.
Седмочлано домаћинство:	- 2 са 6 хектара земље,
	- 3 са 7 хектара земље,
	- 5 са 8 хектара земље,
	- 4 са 9 хектара земље,
	- 2 са 10 хектара земље.
Осмочлано домаћинство:	- 2 са 8 хектара земље,
	- 3 са 9 хектара земље,
	- 2 са 10 хектара земље.

Наћи:
a) Расподелу апсолутних фреквенција за дате податке,
b) Расподелу посматраног обележја.

Решење:

a)
X - Број чланова домаћинства; x_i, $i=1, \dots ,8$
Y - Величина поседа у хектарима; y_j , $j=1, \dots ,11$

Y / X	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
1	2	1										3
2	2	2	2	1								7
3	1	2	3	2	2	1						11
4			1	4	4	3	3	1				16
5				1	4	6	5	4	1	1		22
6					1	2	3	6	4	2		18
7							2	3	5	4	2	16
8									2	3	2	7
	5	5	6	8	11	12	13	14	12	10	4	100

b)

$$p_{ij} = \frac{f_{ij}}{N} \quad i = 1,\ldots,8\,; \quad j = 1,\ldots,11 \quad N = 100$$

Y / X	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
1	0.02	0.01										0.03
2	0.02	0.02	0.02	0.01								0.07
3	0.01	0.02	0.03	0.02	0.02	0.01						0.11
4			0.01	0.04	0.04	0.03	0.03	0.01				0.16
5				0.01	0.04	0.06	0.05	0.04	0.01	0.01		0.22
6					0.01	0.02	0.03	0.06	0.04	0.02		0.18
7							0.02	0.03	0.05	0.04	0.02	0.16
8									0.02	0.03	0.02	0.07
	0.05	0.05	0.06	0.08	0.11	0.12	0.13	0.14	0.12	0.10	0.04	1.00

<u>Задатак 2.</u> У једној фабрици са 250 радника дата је структура плата (у доларима) и старости радника (у годинама):

Плата 1000-1500: - 30 радника између 15 и 25 година старости.

Плата 1501-2000: - 28 радника између 15 и 25 година старости,
- 12 радника између 25 и 35 година старости.

Плата 2001-2500: - 22 радника између 15 и 25 година старости,
- 26 радника између 25 и 35 година старости,
- 12 радника између 35 и 45 година старости.

Плата 2501-3000: - 22 радника између 25 и 35 година старости,
- 14 радника између 35 и 45 година старости,
- 13 радника између 45 и 55 година старости,
- 11 радника између 55 и 60 година старости.

Плата 3001-3500: - 8 радника између 25 и 35 година старости,
- 11 радника између 35 и 45 година старости,
- 9 радника између 45 и 55 година старости,
- 12 радника између 55 и 60 година старости.

Плата 3501-4000: - 2 радника између 25 и 35 година старости,
- 3 радника између 35 и 45 година старости,
- 8 радника између 45 и 55 година старости,
- 7 радника између 55 и 60 година старости.

Наћи:

a) Расподелу апсолутних фреквенција за дате податке,

b) Расподелу посматраног обележја.

Решење:

а)

X - Величина плате у доларима x_i , $i=1, \ldots, 6$
Y - Старост радника у годинама y_j , $j=1, \ldots, 5$

X \ Y	15-25	25-35	35-45	45-55	55-65	
1000-1500	30					30
1501-2000	28	12				40
2001-2500	22	26	12			60
2501-3000		22	14	13	11	60
3001-3500		8	11	9	12	40
3501-4000		2	3	8	7	20
	80	70	40	30	30	250

X \ Y	15-25	25-35	35-45	45-55	55-65	
1000-1500	0.120					0.12
1501-2000	0.112	0.048				0.16
2001-2500	0.088	0.104	0.048			0.24
2501-3000		0.088	0.056	0.052	0.044	0.24
3001-3500		0.032	0.044	0.036	0.048	0.16
3501-4000		0.008	0.012	0.032	0.028	0.08
	0.32	0.28	0.16	0.12	0.12	1.00

Задатак 3. Извесна машина се употребљава у две смене пре и после подне. У 10 петодневних радних недеља добијени су дневни бројеви отказа

број дана	откази пре подне	откази после подне
5	0	0
2	0	1
3	0	2
10	1	0
4	1	1
6	1	2
10	2	0
4	2	1
6	2	2

Одредити расподелу броја отказа.

Решење:

X: "број отказа машине пре подне" x_i , $i=1, 2, 3$
Y: "број отказа машине после подне" y_j , $j=1, 2, 3$

Прво ћемо одредити расподелу апсолутних фреквенција

X \ Y	0	1	2	
0	5	2	3	10
1	10	4	6	20
2	10	4	6	20
	25	10	15	50

Затим рачунамо релативне фреквенције $p_{ij} = \dfrac{f_{ij}}{N}, \quad i, j = 1,2,3$

X \ Y	0	1	2	
0	0.10	0.04	0.06	0.20
1	0.20	0.08	0.12	0.40
2	0.20	0.08	0.12	0.40
	0.50	0.20	0.30	1.00

Расподела обележја (X, Y) тј. број отказа пре подне и број отказа после подне.

<u>Задатак 4.</u> При бацању хомогене коцкице посматране су случајне величине дефинисане са

$$X : \begin{pmatrix} 1 & ako\, je & \{1,3,5\} \\ 0 & ako\, je & \{2,4,6\} \end{pmatrix}$$

$$Y : \begin{pmatrix} 1 & ako\, je & \{3,6\} \\ 0 & ako\, je & \{1,2,4,5\} \end{pmatrix}$$

a) Одредити закон расподеле вероватноће дводимензионалне случајне величине (X,Y),
b) Одредити маргиналне расподеле за X и Y,
c) Одредити E(X), E(Y), σ^2(X), σ^2(Y),
d) Одредити закон расподеле вероватноћа случајне променљиве величине Z=X+2Y,
e) Одредити E(Z), σ^2(Z),
f) Одредити коефицијент корелације X и Y.

Решење:

а)

Y \ X	y_1	y_2	$\dots$	y_m	$p_{i.}$
x_1	p_{11}	p_{12}	$\dots$	p_{1m}	$p_{1.}$
x_2	p_{21}	p_{22}	$\dots$	p_{2m}	$p_{2.}$
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
x_n	p_{n1}	p_{n2}	$\dots$	p_{nm}	$p_{n.}$
$p_{.j}$	$p_{.1}$	$p_{.2}$	$\dots$	$p_{.m}$	1

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} p_{ij} = 1$$

$$p_{11} = P\{X = x_1, Y = y_1\}$$

$$p_{ij} = P\{X = x_i, Y = y_j\}$$

$$p_{11} = P\{X = 0, Y = 0\} = P\{(2,4,6)\cap(1,2,4,5)\} = P\{(2,4)\} = \frac{2}{6}$$

$$p_{12} = P\{X = 0, Y = 1\} = P\{(2,4,6)\cap(3,6)\} = P\{(6)\} = \frac{1}{6}$$

$$p_{21} = P\{X = 1, Y = 0\} = P\{(1,3,5)\cap(1,2,4,5)\} = P\{(1,5)\} = \frac{2}{6}$$

$$p_{22} = P\{X = 1, Y = 1\} = P\{(1,3,5)\cap(3,6)\} = P\{(3)\} = \frac{1}{6}$$

Y \ X	0	1	$p_{i\cdot}$
0	$\frac{2}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{3}{6}$
1	$\frac{2}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{3}{6}$
$p_{\cdot j}$	$\frac{4}{6}$	$\frac{2}{6}$	1

b)

$$X:\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{3}{6} & \frac{3}{6} \end{pmatrix} \quad Y:\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{4}{6} & \frac{2}{6} \end{pmatrix}$$

c)

$$E(X) = 0\cdot\frac{3}{6} + 1\cdot\frac{3}{6} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

$$E(Y) = 0\cdot\frac{4}{6} + 1\cdot\frac{2}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

$$E\left(X^2\right) = 0^2\cdot\frac{3}{6} + 1^2\cdot\frac{3}{6} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

$$E\left(Y^2\right) = 0^2\cdot\frac{4}{6} + 1^2\cdot\frac{2}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

$$\sigma^2(X) = E\left(X^2\right) - [E(X)]^2 = \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

$$\sigma^2(Y) = E\left(Y^2\right) - [E(Y)]^2 = \frac{1}{3} - \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{2}{9}$$

d)

$$Z = X + 2Y$$

$$P\{Z=0\} = P\{X=0, Y=0\} = \frac{2}{6}$$

$$P\{Z=1\} = P\{X=1, Y=0\} = \frac{2}{6}$$

$$P\{Z=2\} = P\{X=0, Y=1\} = \frac{1}{6}$$

$$P\{Z=3\} = P\{X=1, Y=1\} = \frac{1}{6}$$

$$Z:\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ \frac{2}{6} & \frac{2}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$$

e)

$$E(Z)=0\cdot\frac{2}{6}+1\cdot\frac{2}{6}+3\cdot\frac{1}{6}=\frac{7}{6}$$

$$E(Z^2)=0^2\cdot\frac{2}{6}+1^2\cdot\frac{2}{6}+3^2\cdot\frac{1}{6}=\frac{15}{6}$$

$$\sigma^2(Z)=E(Z^2)-[E(Z)]^2=\frac{15}{6}-\left(\frac{7}{6}\right)^2=\frac{41}{36}$$

односно, преко линеарне везе

$$E(Z)=E(X+2Y)=E(X)+2E(Y)=\frac{1}{2}+2\cdot\frac{1}{3}=\frac{7}{6}$$

f)

$$\rho=\frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{\sigma^2(X)\cdot\sigma^2(Y)}}=\frac{E(X\cdot Y)-E(X)\cdot E(Y)}{\sigma(X)\cdot\sigma(Y)}=$$

$$=\frac{E(X\cdot Y)-E(X)\cdot E(Y)}{\sqrt{E(X^2)-[E(X)]^2}\sqrt{E(Y^2)-[E(Y)]^2}}$$

$$E(X\cdot Y)=0\cdot 0\cdot\frac{2}{6}+0\cdot 1\cdot\frac{1}{6}+1\cdot 0\cdot\frac{2}{6}+1\cdot 1\cdot\frac{1}{6}=\frac{1}{6}$$

$$\rho=\frac{\frac{1}{6}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}}{\sqrt{\frac{1}{4}\cdot\frac{2}{9}}}=0$$

Овај резултат нас наводи на проверу независности случајних промењљивих X и Y. Може се показати да је:

$$p_{ij} = p_{i.} \cdot p_{.j} \quad \forall i,j: \; i=1, 2 \; ; \; j=1, 2.$$

тј. да су X и Y независне случајне променљиве.

Напомена: У задацима код којих се тражи одређивање коефицијената корелације ρ препоручљиво је проверити да ли су X и Y независне случајне променљиве, јер, ако јесу, тада је ρ=0.

Задатак 5. За број дефеката првог и другог типа једног уређаја зна се да има дводимензионални закон вероватноћа

1. / 2.	2	1	0
1	c	3c	2c
2	0.06	0.18	0.16

a) Одредити непознату константу,
b) Израчунати коефицијент корелације.

Решење:

X - Број дефеката 2. типа
Y - Број дефеката 1. типа

a)

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} p_{ij} = 1$$
$$c + 3c + 2c + 0.06 + 0.18 + 0.16 = 1$$
$$6c = 0.6$$
$$c = 0.1$$

b)

Y / X	0	1	2	$p_{i\cdot}$
1	0.20	0.30	0.10	0.60
2	0.16	0.18	0.06	0.40
$p_{\cdot j}$	0.36	0.48	0.16	1.00

Прво проверимо да ли су X и Y независне случајне променљиве тј. да ли је $p_{ij}=p_{i.}\cdot p_{.j}$ $\forall$ i, j ; i=1, 2 ; j=1, 2, 3. (Ако је овај услов испуњен, онда је ρ =0 (обрнуто не важи)).

0.20≠0.60·0.48 ⇒ X и Y нису независне случајне променљиве.

Одређујемо коефицијент корелације ρ.

$$\rho=\frac{E(X\cdot Y)-E(X)\cdot E(Y)}{\sigma(X)\cdot\sigma(Y)}=\frac{E(X\cdot Y)-E(X)\cdot E(Y)}{\sqrt{E(X^2)-[E(X)]^2}\sqrt{E(Y^2)-[E(Y)]^2}}$$

$$X:\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0.60 & 0.40\end{pmatrix}$$

$$Y:\begin{pmatrix}0 & 1 & 2\\ 0.36 & 0.48 & 0.16\end{pmatrix}$$

$$E(X)=1\cdot 0.60+2\cdot 0.40=1.40$$

$$E(X^2)=1^2\cdot 0.60+2^2\cdot 0.40=2.2$$

$$[E(X)]^2=1.96$$

$$E(Y) = 0 \cdot 0.36 + 1 \cdot 0.48 + 2 \cdot 0.16 = 0.80$$

$$E(Y^2) = 0^2 \cdot 0.36 + 1^2 \cdot 0.48 + 2^2 \cdot 0.16 = 1.12$$

$$\left[E(Y)\right]^2 = 0.64$$

$$E(X \cdot Y) = 0 \cdot 1 \cdot 0.20 + 0 \cdot 2 \cdot 0.16 + 1 \cdot 1 \cdot 0.30 + 1 \cdot 2 \cdot 0.18 + 2 \cdot 1 \cdot 0.10 + 2 \cdot 2 \cdot 0.06 = 1.1$$

$$\rho = \frac{1.1 - 1.4 \cdot 0.8}{\sqrt{(2.2 - 1.96) \cdot (1.12 - 0.64)}} = \frac{-0.02}{\sqrt{0.1152}} = -0.0589$$

Овај резултат нам говори о доста слабој зависности између броја дефекта првог и другог типа.

Задатак 6. Тежина артикла X и дебљина Y дате су дводимензионалним законом расподеле вероватноћа.

X \ Y	4.3	3.0	0.5	1.0
1.4	0.04	0.05	0.07	0.12
1.9	0.10	0.05	0.08	0.08
2.5	0.06	0.10	0.05	0.20

a) Одредити маргиналне расподеле вероватноћа,
b) Одредити условну расподелу вероватноћа случајне промењиве X, под условом да је Y=0.5,
c) Одредити условну расподелу вероватноћа за Y, ако је X=2.5.
d) Одредити

$$E(Y / X = 2.5) \quad \text{и} \quad E(X / Y = 0.5).$$

Решење:

a)

Y / X	4.3	3.0	0.5	1.0	$p_{i\cdot}$
1.4	0.04	0.05	0.07	0.12	0.28
1.9	0.10	0.05	0.08	0.08	0.31
2.5	0.06	0.10	0.05	0.20	0.41
$p_{\cdot j}$	0.20	0.20	0.20	0.40	1.00

$$X:\begin{pmatrix} 1.4 & 1.9 & 2.5 \\ 0.28 & 0.31 & 0.41 \end{pmatrix} \qquad Y:\begin{pmatrix} 0.5 & 1.0 & 3.0 & 4.3 \\ 0.20 & 0.40 & 0.20 & 0.20 \end{pmatrix}$$

b)

$$p_{i/j} = \frac{p_{ij}}{p_{.j}}$$

за Y=0.5 одговарајућа вредност $p_{.j}$ је 0.20

$$P(x_1 / Y = 0.5) = \frac{0.07}{0.20} = 0.35$$

$$P(x_2 / Y = 0.5) = \frac{0.08}{0.20} = 0.40$$

$$P(x_3 / Y = 0.5) = \frac{0.05}{0.20} = 0.25$$

$$X / Y = 0.5 : \begin{pmatrix} 1.4 & 1.9 & 2.5 \\ 0.35 & 0.40 & 0.25 \end{pmatrix}$$

c)

$$p_{j/j} = \frac{p_{ij}}{p_{i.}}$$

за X=2.5 одговарајућа вредност $p_{i.}$ је 0.41

$$P(y_1 / X = 2.5) = \frac{0.06}{0.41} = 0.146$$
$$P(y_2 / X = 2.5) = \frac{0.1}{0.41} = 0.244$$
$$P(y_3 / X = 2.5) = \frac{0.05}{0.41} = 0.122$$
$$P(y_4 / X = 2.5) = \frac{0.20}{0.41} = 0.488$$

$$Y / X = 2{,}5 : \begin{pmatrix} 4.3 & 3.0 & 0.5 & 1.0 \\ 0.146 & 0.244 & 0.122 & 0.488 \end{pmatrix}$$

d)

$$E(Y / X = 2.5) = 4.3 \cdot 0.146 + 3.0 \cdot 0.244 + 0.5 \cdot 0.122 + 1.0 \cdot 0.488 = 1.9097$$

$$E(X / Y = 0.5) = 1.4 \cdot 0.350 + 1.9 \cdot 0.40 + 2.5 \cdot 0.25 = 1.875$$

<u>Задатак 7.</u> Добијен је узорак на основу 100 обављених мерења појава X и Y

(X,Y)	(1,2)	(1,1)	(1,0)	(2,2)	(2,1)	(2,0)
$f_к$	10	30	20	6	18	16

a) На основу узорка одреди приближно расподелу вероватноћа дводимензионалне величине (X,Y),

b) Одредити условни закон расподеле вероватноћа случајне величине Y када је X=1,

c) Одредити σ^2(Y/X=1),

d) Да ли је варијабилитет за Y већи од варијабилитета за Y под условом да је X=1?

Решење:

a)

X \ Y	0	1	2	$p_{i\cdot}$
1	0.20	0.30	0.10	0.60
2	0.16	0.18	0.06	0.40
$p_{\cdot j}$	0.36	0.48	0.16	1

$$p_{ij} = \frac{f_k}{100}$$

b)

$$p_{j/i} = \frac{p_{ij}}{p_{i.}} \qquad за \qquad X = 1 \Rightarrow p_{i.} = 0.60$$

$$P\left(y_1 / X = 1\right) = \frac{0.20}{0.60} = 0.33$$

$$P\left(y_2 / X = 1\right) = \frac{0.30}{0.60} = 0.50$$

$$P\left(y_3 / X = 1\right) = \frac{0.10}{0.60} = 0.17$$

$$Y / X = 1 : \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0.33 & 0.50 & 0.17 \end{pmatrix}$$

c)

$$\sigma^2 (Y / X = 1) = E(Y^2 / X = 1) - [E(Y / X = 1)]^2$$

$$E(Y / X = 1) = 0 \cdot 0.33 + 1 \cdot 0.50 + 2 \cdot 0.17 = 0.83$$

$$E(Y^2 / X = 1) = 0^2 \cdot 0.33 + 1^2 \cdot 0.50 + 2^2 \cdot 0.17 = 1.17$$

$$\sigma^2 (Y / X = 1) = 1.18 - 0.84^2 = 0.4722$$

d)

$$\sigma^2 (Y) = E(Y^2) - [E(y)]^2 = 0.48$$

$$Y : \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0.36 & 0.48 & 0.16 \end{pmatrix}$$

$$E(Y) = 0 \cdot 0.36 + 1 \cdot 0.48 + 2 \cdot 0.16 = 0.80$$

$$E(Y^2) = 0^2 \cdot 0.36 + 1^2 \cdot 0.48 + 2^2 \cdot 0.16 = 1.12$$

$$\sigma^2 (Y) = 1.12 - 0.80^2 = 0.48$$

$$\sigma^2 (Y) > \sigma^2 (Y / X = 1)$$

<u>Задатак 8.</u> Посматрајмо следећу расподелу дводимензионалне случајне променљиве (X,Y):

X \ Y	0	1	2
0	2p	2p	2p
1	p	4p	p

a) Одредити p,
b) Да ли су X и Y независне случајне променљиве?
c) Колики је коефицијент корелације између X и Y?
d) Какав се закључак о независности и коефицијенту корелације може донети на основу овог примера?

Решење:

a)

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} p_{ij} = 1$$

$$2p + 2p + 2p + p + 4p + p = 1 \quad \Rightarrow \quad p = \frac{1}{12}$$

X \ Y	0	1	2	$p_{i\cdot}$
0	$\frac{2}{12}$	$\frac{2}{12}$	$\frac{2}{12}$	$\frac{6}{12}$
1	$\frac{1}{12}$	$\frac{4}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{6}{12}$
$p_{\cdot j}$	$\frac{3}{12}$	$\frac{6}{12}$	$\frac{3}{12}$	1

b) Проверавамо да ли су X и Y независне случајне промењиве тј. да ли је $p_{ij}=p_{i.}\cdot p_{.j}$ $\quad \forall$ i, j ; i=1, 2 ; j=1, 2, 3.

$\frac{2}{12} \neq \frac{3}{12}\cdot\frac{6}{12}$ следи да X и Y нису независне случајне промењиве.

c)

$$\rho = \frac{E(X\cdot Y)-E(X)\cdot E(Y)}{\sigma(X)\cdot\sigma(Y)} = \frac{E(X\cdot Y)-E(X)\cdot E(Y)}{\sqrt{E(X^2)-[E(X)]^2}\sqrt{E(Y^2)-[E(Y)]^2}}$$

$$X:\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{6}{12} & \frac{6}{12} \end{pmatrix} \qquad Y:\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ \frac{3}{12} & \frac{6}{12} & \frac{3}{12} \end{pmatrix}$$

$$E(X)=0\cdot\frac{6}{12}+1\cdot\frac{6}{12}=\frac{6}{12}=\frac{1}{2}$$

$$E(X^2)=0^2\cdot\frac{6}{12}+1^2\cdot\frac{6}{12}=\frac{6}{12}=\frac{1}{2}$$

$$E(Y)=0\cdot\frac{3}{12}+1\cdot\frac{6}{12}+2\cdot\frac{3}{12}=\frac{12}{12}=1$$

$$E(Y^2)=0^2\cdot\frac{3}{12}+1^2\cdot\frac{6}{12}+2^2\cdot\frac{3}{12}=\frac{18}{12}=1.5$$

$$E(X\cdot Y)=0\cdot 0\cdot\frac{2}{12}+0\cdot 1\cdot\frac{1}{12}+1\cdot 0\cdot\frac{2}{12}+1\cdot 1\cdot\frac{4}{12}+2\cdot 0\cdot\frac{2}{12}+2\cdot 1\cdot\frac{1}{12}$$

$$E(X\cdot Y)=\frac{6}{12}=\frac{1}{2}$$

$$E(X\cdot Y)-E(X)\cdot E(Y)=\frac{6}{12}-\frac{6}{12}\cdot 1=0$$

Пошто је бројилац једнак нули, цео израз

$$\rho = \frac{E(X \cdot Y) - E(X) \cdot E(Y)}{\sigma(X) \cdot \sigma(Y)} = \frac{E(X \cdot Y) - E(X) \cdot E(Y)}{\sqrt{E(X^2) - [E(X)]^2}\sqrt{E(Y^2) - [E(Y)]^2}}$$

једнак нули, ρ=0.

d) Ако су X и Y независне случајне променљиве, тада је ρ=0. Обрнуто не мора да важи, тј. ако је ρ=0, X и Y не морају да буду независне случајне променљиве.

<u>Задатак 9.</u> Дводимензионална случајна променљива (X,Y) има расподелу

Y \ X	-3	-2	-1
17	0.04	0.10	0.06
19	0.05	0.05	0.10
21	0.07	0.08	0.05
23	0.03*a*	0.02*a*	0.05*a*

a) Одредити условну расподелу од X под условом да је Y=17 и наћи одговарајућу условну очекивану вредност,

b) Испитати зависност ове две случајне променљиве.

Решење:

a) Прво одређујемо константу *a*:

$$0.6 + 0.03 \cdot a + 0.02 \cdot a + 0.05 \cdot a = 1$$
$$0.1 \cdot a = 0.4$$
$$a = 4$$

Сада је расподела:

Y \ X	-3	-2	-1	$p_{\cdot j}$
17	0.04	0.10	0.06	0.20
19	0.05	0.05	0.10	0.20
21	0.07	0.08	0.05	0.20
23	0.12	0.08	0.20	0.40
$p_{i\cdot}$	0.28	0.31	0.41	1.00

$$X/Y=17 \quad : \quad \begin{pmatrix} -3 & -2 & -1 \\ 0.20 & 0.50 & 0.30 \end{pmatrix}$$

$$E\left(X/Y=17\right)=(-3)\cdot 0.20+(-2)\cdot 0.50+(-1)\cdot 0.30=-1.90$$

$$p_{i/j}=\frac{p_{ij}}{p_{.j}}, \quad \text{за} \quad Y=17 \Rightarrow p_{.j}=0.20$$

$$P(x_1/Y=17)=\frac{0.04}{0.20}=0.20$$

$$P(x_2/Y=17)=\frac{0.10}{0.20}=0.50$$

$$P(x_3/Y=17)=\frac{0.06}{0.20}=0.30$$

b) Проверавамо да ли су X и Y независне случајне променљиве тј. да ли је

$$p_{ij}=p_{i.}\cdot p_{,j} \qquad \forall\, i, j \,;\, i=1,2,3 \,;\, j=1,2,3,4$$

$0.04 \neq 0.20\cdot 0.28 \Rightarrow$ постоји зависност између X i Y.

$$\rho=\frac{E(X\cdot Y)-E(X)\cdot E(Y)}{\sigma(X)\cdot\sigma(Y)}=\frac{E(X\cdot Y)-E(X)\cdot E(Y)}{\sqrt{E\left(X^2\right)-[E(X)]^2}\sqrt{E\left(Y^2\right)-[E(Y)]^2}}$$

$$X:\begin{pmatrix}-3 & -2 & -1\\ 0.28 & 0.31 & 0.41\end{pmatrix};\ Y:\begin{pmatrix}17 & 19 & 21 & 23\\ 0.20 & 0.20 & 0.20 & 0.40\end{pmatrix}$$

$$E(X)=(-3)\cdot 0.28+(-2)\cdot 0.31+(-1)\cdot 0.41=-1.87$$

$$E\left(X^2\right)=(-3)^2\cdot 0.28+(-2)^2\cdot 0.31+(-1)^2\cdot 0.41=4.17$$

$$[E(X)]^2=3.4969$$

$$[E(Y)]=17\cdot 0.20+19\cdot 0.20+21\cdot 0.20+23\cdot 0.40=20.6$$

$$E\left(Y^2\right)=17^2\cdot 0.20+19^2\cdot 0.20+21^2\cdot 0.20+23^2\cdot 0.40=429.8$$

$$\left[E(Y)\right]^2=424.36$$

$$\begin{aligned}E(X\cdot Y)=&17\cdot(-3)\cdot 0.04+17\cdot(-2)\cdot 0.10+17\cdot(-1)\cdot 0.06+\\&+19\cdot(-3)\cdot 0.05+19\cdot(-2)\cdot 0.05+19\cdot(-1)\cdot 0.10+\\&+21\cdot(-3)\cdot 0.07+21\cdot(-2)\cdot 0.08+21\cdot(-1)\cdot 0.05+\\&+23\cdot(-3)\cdot 0.12+23\cdot(-2)\cdot 0.08+23\cdot(-1)\cdot 0.20=-38.49\end{aligned}$$

$$\rho=\frac{(-38.49)-(-1.87)\cdot 20.6}{\sqrt{0.6731}\sqrt{5.44}}=0.017$$

<u>Задатак 10.</u> Направљен је експеримент бацања 2 коцкице, црвене и црне:

X	црвена	1	1	3	1	3	4	1	1	6	3	3	1	5	3	3	5	5	4	6	3
Y	црна	2	5	2	2	5	6	4	3	4	4	2	5	1	5	4	1	2	2	6	5

Израчунати коефицијент корелације за дате податке.

Решење:

X \ Y	1	2	3	4	5	6	$p_{i\cdot}$
1	0	0.10	0.05	0.05	0.10	0	0.30
2	0	0	0	0	0	0	0
3	0	0.10	0	0.10	0.15		0.35
4	0	0.05	0	0	0	0.05	0.10
5	0.10	0.05	0	0	0	0	0.15
6	0	0	0	0.05	0	0.05	0.10
$p_{\cdot j}$	0.10	0.30	0.05	0.20	0.25	0.10	1.00

$$E(X) = 1\cdot 0.30 + 2\cdot 0 + 3\cdot 0.35 + 4\cdot 0.10 + 5\cdot 0.15 + 6\cdot 0.10 = 3.1$$

$$\left[E(X)\right]^2 = 9.61$$

$$E(Y) = 1\cdot 0.10 + 2\cdot 0.30 + 3\cdot 0.05 + 4\cdot 0.20 + 5\cdot 0.25 + 6\cdot 0.10 = 3.5$$

$$\left[E(Y)\right]^2 = 12.25$$

$$E\left(X^2\right) = 12.4$$

$$E\left(Y^2\right) = 14.8$$

$$E(X\cdot Y)=2\cdot 0.10+3\cdot 0.05+4\cdot 0.05+5\cdot 0.1+6\cdot 0.10+12\cdot 0.10+15\cdot 0.15+$$
$$+8\cdot 0.05+24\cdot 0.05+5\cdot 0.10+10\cdot 0.05+24\cdot 0.05+36\cdot 0.05=10.7$$

$$\rho=\frac{E(X\cdot Y)-E(X)\cdot E(Y)}{\sqrt{E(X^2)-\left[E(X)\right]^2}\sqrt{E(Y^2)-\left[E(Y)\right]^2}}=\frac{10.7-10.85}{\sqrt{2.79\cdot 2.55}}=$$
$$=\frac{-0.15}{2.667}=-0.056$$

<u>Задатак 11.</u> Из кутије у којој се налазе 3 беле и 5 црних куглица извлачи се два пута по једна куглица са враћањем. Ако означимо са X резултат првог извлачења:

(X=1 ако је извучена бела куглица)
(X=0 ако је извучена црна куглица)

и са Y резултат другог извлачења:

(Y=1 ако је извучена бела куглица)
(Y=0 ако је извучена црна куглица)

Одредити:

a) E(X), E(Y), E(X·Y),
b) $E(X^2)$, $E(Y^2)$, $\sigma^2(X)$, $\sigma^2(Y)$,
c) E(X/Y=1), $\sigma^2(Y/X=0)$,
d) $\rho_{x,y}$,
e) Условну расподелу вероватноћа случајне променљиве X под условом да је Y=1.

Решење:

$$X=\begin{cases}1 & -\textit{извучена}\quad \textit{бела}\quad \textit{куглица}\\ 0 & -\textit{извучена}\quad \textit{црна}\quad \textit{куглица}.\end{cases}$$

$$Y=\begin{cases}1 & -\textit{извучена}\quad \textit{бела}\quad \textit{куглица}\\ 0 & -\textit{извучена}\quad \textit{црна}\quad \textit{куглица}.\end{cases}$$

$$P\left\{X=0\,,Y=0\right\}=\frac{5}{8}\cdot\frac{5}{8}=\frac{25}{64}$$
$$P\left\{X=0\,,Y=1\right\}=\frac{5}{8}\cdot\frac{3}{8}=\frac{15}{64}$$
$$P\left\{X=1\,,Y=0\right\}=\frac{3}{8}\cdot\frac{5}{8}=\frac{15}{64}$$
$$P\left\{X=1\,,Y=1\right\}=\frac{3}{8}\cdot\frac{3}{8}=\frac{9}{64}$$

X \ Y	0	1	$p_{i.}$
0	$\frac{25}{64}$	$\frac{15}{64}$	$\frac{40}{64}$
1	$\frac{15}{64}$	$\frac{9}{64}$	$\frac{24}{64}$
$p_{.j}$	$\frac{40}{64}$	$\frac{24}{64}$	1

a)

$$X:\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{5}{8} & \frac{3}{8} \end{pmatrix} \qquad Y:\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{5}{8} & \frac{3}{8} \end{pmatrix}$$

$$E(X) = 0\cdot\frac{40}{64} + 1\cdot\frac{24}{64} = \frac{24}{64} = \frac{3}{8}$$

$$E(Y) = \frac{24}{64} = \frac{3}{8}$$

X и Y су независне случајне промењиве јер је за свако i=1, 2. и свако j=1, 2. заједничка вероватноћа p_{ij} једнака производу одговарајућих маргиналних вероватноћа $p_{i.}$ и $p_{.j}$, тј.

$$\frac{40}{64}\cdot\frac{40}{64} = \frac{25}{64}$$

$$\frac{24}{64}\cdot\frac{40}{64} = \frac{15}{64}$$

$$\frac{40}{64}\cdot\frac{24}{64} = \frac{15}{64}$$

$$\frac{24}{64}\cdot\frac{24}{64} = \frac{9}{64}$$

$$E(X\cdot Y) \underset{нез.}{\overset{по}{=}} E(X)\cdot E(Y) = \frac{24}{64}\cdot\frac{24}{64} = \frac{9}{64}$$

b)

$$E\left(X^2\right) = 0^2\cdot\frac{40}{64} + 1^2\cdot\frac{24}{64} = \frac{24}{64} = \frac{3}{8}$$

$$E\left(Y^2\right)=\frac{24}{64}=\frac{3}{8}$$

$$\sigma^2(X)=E\left(X^2\right)-\left[E(X)\right]^2=\frac{24}{64}-\left(\frac{24}{64}\right)^2=\frac{15}{64}$$

$$\sigma^2(Y)=\frac{15}{64}$$

c)

$$p_{i/j}=\frac{p_{ij}}{p_{.j}}$$

$$за \quad Y=1 \quad \Rightarrow \quad p_{.j}=\frac{24}{64}=\frac{3}{8}$$

$$P\left(x_1/Y=1\right)=\frac{\frac{15}{64}}{\frac{24}{64}}=\frac{15}{24}=\frac{5}{8}$$

$$P\left(x_2/Y=1\right)=\frac{\frac{9}{64}}{\frac{24}{64}}=\frac{9}{24}=\frac{3}{8}$$

$$X/Y=1: \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{5}{8} & \frac{3}{8} \end{pmatrix}$$

$$E\left(X/Y=1\right)=0\cdot\frac{15}{24}+1\cdot\frac{9}{24}=\frac{9}{24}=\frac{3}{8}$$

$$p_{j/i} = \frac{p_{ij}}{p_{i.}}$$

за $\quad X = 0 \quad \Rightarrow \quad p_{i.} = \frac{40}{64} = \frac{5}{8}$

$$P(y_1 / X = 0) = \frac{\frac{25}{64}}{\frac{40}{64}} = \frac{25}{40}$$

$$P(y_2 / X = 0) = \frac{\frac{15}{64}}{\frac{40}{64}} = \frac{15}{40}$$

$$Y / X = 0 : \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{5}{8} & \frac{3}{8} \end{pmatrix}$$

$$E(Y / X = 0) = 0 \cdot \frac{25}{40} + 1 \cdot \frac{15}{40} = \frac{15}{40} = \frac{3}{8}$$

$$E(Y^2 / X = 0) = 0^2 \cdot \frac{25}{40} + 1^2 \cdot \frac{15}{40} = \frac{15}{40} = \frac{3}{8}$$

$$\sigma^2(Y / X = 0) = E(Y^2 / X = 0) - [E(Y / X = 0)]^2 = \frac{15}{40} - \left(\frac{15}{40}\right)^2 = \frac{15}{64}$$

d)

ρ=0 (по дефиницији независности)

X и Y су независне случајне промењиве јер је:

$p_{ij} = p_{i.} \cdot p_{.j}$ за $\forall$ i, j i, j=1, 2

e)

$$X\ /\ Y=1:\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{5}{8} & \frac{3}{8} \end{pmatrix}$$

Код независних промењивих важи следеће: $P(X\|Y)=P(X)$ $P(Y\|X)=P(Y)$

<u>Задатак 12.</u> Из скупа цифара $\{1,2,3,4,5\}$ на случајан начин се бирају две цифре. Нека је X број непарних бројева, а Y број парних бројева међу изабраним цифрама.

a) Одредити закон вероватноће дводимензионалне промењиве (X,Y),

b) Наћи варијансе за X и Y, као и коваријансу,

c) Израчунати коефицијент корелације.

Решење:

X-број непарних
Y-број парних

Комбинације друге класе од датих цифара и одговарајуће вредности за X и Y дате су у табели:

Изабране цифре	X	Y
1,2	1	1
1,3	2	0
1,4	1	1
1,5	2	0
2,3	1	1
2,4	0	2
2,5	1	1
3,4	1	1
3,5	2	0
4,5	1	1

а) Закон вероватноће дводимензионалне промењиве (X,Y):

Y \ X	0	1	2	$p_{\cdot j}$
0	0	0	3/10	3/10
1	0	6/10	0	6/10
2	1/10	0	0	1/10
$p_{i\cdot}$	1/10	6/10	3/10	1

Маргинални закони су:

$$X:\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ \frac{1}{10} & \frac{6}{10} & \frac{3}{10} \end{pmatrix} \qquad \mathrm{Y}:\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ \frac{3}{10} & \frac{6}{10} & \frac{1}{10} \end{pmatrix}$$

b)

$$E(XY)=1\cdot 1\cdot \frac{6}{10}=\frac{6}{10}=\frac{3}{5}$$

$$E(X)=0\frac{1}{10}+1\frac{6}{10}+2\frac{3}{10}=\frac{12}{10}=\frac{6}{5}$$

$$E(X^2)=0^2\frac{1}{10}+1^2\frac{6}{10}+2^2\frac{3}{10}=\frac{18}{10}=\frac{9}{5}$$

$$\sigma_x^2=E(X^2)-(E(X))^2=\frac{18}{10}-\frac{144}{100}=\frac{36}{100}$$

$$\sigma_x=\frac{6}{10}$$

$$E(Y)=\frac{6}{10}+\frac{2}{10}=\frac{8}{10}=\frac{4}{5}$$

$$E(Y^2)=\frac{6}{10}+\frac{4}{10}=1$$

$$\sigma_y^2=E(Y^2)-(E(Y))^2=1-\frac{64}{100}=\frac{36}{100}$$

$$\sigma_y=\frac{6}{10}$$

c)

$$\rho=\frac{\operatorname{cov}(X,Y)}{\sqrt{\sigma_x^2\sigma_y^2}}=\frac{E(XY)-E(X)E(Y)}{\sigma_x\sigma_y}$$

$$\rho=\frac{\frac{6}{10}-\frac{12}{10}\frac{8}{10}}{\frac{6}{10}\frac{6}{10}}=-1$$

Случајне променљиве су потпуно корелисане и међу њима постоји линеарна веза:

X + Y = 2

<u>Задатак 13.</u> При бацању две хомогене коцке, чије су стране нумерисане бројевима од 1 до 6, посматрају се две случајне промењљиве: X представља број парних бројева који се појављују при бацању, а Y збир добијен при бацању.

Одредити:

a) Закон расподеле вероватноћа за (X,Y),

b) Маргиналне расподеле за X и Y,

c) E(3X+2Y).

Решење:

a) Закон расподеле вероватноћа за (X,Y) дат је у табели:

Y \ X	0	1	2	$p_{\cdot j}$
2	1/36	0	0	1/36
3	0	2/36	0	2/36
4	2/36	0	1/36	3/36
5	0	4/36	0	4/36
6	3/36	0	2/36	5/36
7	0	6/36	0	6/36
8	2/36	0	3/36	5/36
9	0	4/36	0	4/36
10	1/36	0	2/36	3/36
11	0	2/36	0	2/36
12	0	0	1/36	1/36
$p_{i\cdot}$	9/36	18/36	9/36	1

b) Маргинални закони су:

$$X:\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ \frac{9}{36} & \frac{18}{36} & \frac{9}{36} \end{pmatrix}$$

$$Y:\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ \frac{1}{36} & \frac{2}{36} & \frac{3}{36} & \frac{4}{36} & \frac{5}{36} & \frac{6}{36} & \frac{5}{36} & \frac{4}{36} & \frac{3}{36} & \frac{2}{36} & \frac{1}{36} \end{pmatrix}$$

c) E(3X + 2Y) = 3E(X) + 2E(Y)

$$E(X)=0\cdot\frac{9}{36}+1\cdot\frac{18}{36}+2\cdot\frac{9}{36}=\frac{36}{36}=1$$

$$E(Y)=\frac{2}{36}+\frac{6}{36}+\frac{12}{36}+\frac{20}{36}+\frac{30}{36}+\frac{42}{36}+\frac{40}{36}+\frac{36}{36}+\frac{30}{36}+\frac{22}{36}+\frac{12}{36}+=\frac{252}{36}=7$$

$$E(3X+2Y)=3\cdot 1+2\cdot 7=17$$

<u>Задатак 14.</u> У кутији се налази 7 белих куглица чија је маса по 5gr и 3 црне куглице чија је маса по 3gr. Из кутије се извлаче одједном 4 куглице. Нека је X број извучених белих куглица, а Y укупна маса извучених куглица. Одредити:

a) Расподелу за случајну промењиву (X, Y),
b) Маргиналне расподеле за X и Y,
c) Да ли су X и Y независне случајне промењиве,
d) Коефицијент корелације ρ.

Решење:

X∈{1,2,3,4}   Y∈{14,16,18,20}

Вероватноће које су различите од 0 су:

$$p_1 = P(X = 1, Y = 14) = -\frac{\binom{7}{1}\binom{3}{3}}{\binom{10}{4}} = \frac{7 \cdot 1}{210} = 0,033$$

$$p_2 = P(X = 2, Y = 16) = \frac{\binom{7}{2}\binom{3}{2}}{\binom{10}{7}} = \frac{\frac{7 \cdot 6}{2} \cdot \frac{3 \cdot 2}{2}}{210} = 0,3$$

$$p_3 = P(X = 3, Y = 18) = \frac{\binom{7}{3}\binom{3}{1}}{210} = \frac{\frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{3 \cdot 2} \cdot 3}{210} = 0,5$$

$$p_3 = P(X = 4, Y = 20)\frac{\binom{7}{4}\binom{3}{1}}{210} = \frac{\frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4}{4 \cdot 3 \cdot 2}}{210} = 0,167$$

а) Расподела вероватноћа за (X,Y) је:

X \ Y	14	16	18	20	$p_{i.}$
1	0,033	0	0	0	0,033
2	0	0,3	0	0	0,3
3	0	0	0,5	0	0,5
4	0	0	0	0,167	0,167
$p_{.j}$	0,033	0,3	0,5	0,167	

b) $$X:\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0.033 & 0.3 & 0.5 & 0.167 \end{pmatrix}$$

$$X:\begin{pmatrix} 14 & 16 & 18 & 20 \\ 0.033 & 0.3 & 0.5 & 0.167 \end{pmatrix}$$

c) $0{,}033 \neq 0{,}033 \cdot 0{,}033 \Rightarrow$ нису независне

d) Између случајних променљивих X и Y лако је уочити линеарну везу:

$$Y = X \cdot 5 + (4 - X) \cdot 3 = 2 \cdot X + 12 \quad \text{за} \quad X = 1, 2, 3, 4,$$

одакле следи да је $\rho = 1$

Задатак 15. Одредити дисперзиону матрицу (матрицу варијанси и коваријанси) за случајну променљиву (X,Y) чији је закон вероватноћа дат табелом:

X \ Y	0	1
-1	0.24	0.06
0	0.16	0.14
1	0.40	0.00

Решење:

Дисперзиона матрица (матрица варијанси и коваријанси) дводимензионалне случајне променљиве (X,Y) је облика

$$W=\begin{bmatrix} Var(X) & Cov(X,Y) \\ Cov(Y,X) & Var(Y) \end{bmatrix} \quad ; \quad Cov(X,Y)=Cov(Y,X)$$

$$Var(X)=\sigma_x^2=\sigma^2(X)=E(X^2)-\left[E(X)\right]^2$$

$$Var(Y)=\sigma_y^2=\sigma^2(Y)=E(Y^2)-\left[E(Y)\right]^2$$

$$Cov(X,Y)=E(X\cdot Y)-E(X)\cdot E(Y)$$

X \ Y	0	1	$p_{i.}$
-1	0.24	0.06	0.3
0	0.16	0.14	0.3
1	0.40	0.00	0.4
$p_{.j}$	0.80	0.20	1

$$X:\ \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0.30 & 0.30 & 0.40 \end{pmatrix} \qquad Y:\ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0.80 & 0.20 \end{pmatrix}$$

$$E(X)=(-1)\cdot 0.30+0\cdot 0.30+1\cdot 0.40=0.10$$

$$E(X^2)=(-1)^2\cdot 0.30+0^2\cdot 0.30+1^2\cdot 0.40=0.70$$

$$\sigma^2(X)=0.70-(0.10)^2=0.69$$

$$E(Y)=0\cdot 0.80+1\cdot 0.20=0.20$$

$$E(Y^2)=0^2\cdot 0.80+1^2\cdot 0.20=0.20$$

$\sigma^2\left(Y\right)=0.20-\left(0.20\right)^2=0.16$

$$E(XY)=\left(-1\right)\cdot 0\cdot 0.24+\left(-1\right)\cdot 1\cdot 0.06+0\cdot 0\cdot 0.16+$$
$$+0\cdot 1\cdot 0.14+1\cdot 0\cdot 0.40+1\cdot 1\cdot 0=-0.06$$

$\sigma_{xy}=\sigma_{yx}=\left(-0.06\right)-0.10\cdot 0.20=-0.08$

$$W=\begin{bmatrix} 0.69 & -0.08 \\ -0.08 & 0.16 \end{bmatrix}$$

<u>Задатак 16.</u> По завршетку пријемног испита коме је присуствовало 100 кандидата, забележени су остварени поени за сваког кандидата појединачно који се уписао на факултет. На крају школске године за исте студенте поновљен је тест и забележени су поени. Добијени су следећи резултати:

$$\sum x_i=10500;\sum x_i^2=1125000;\sum y_i=8000;\sum y_i^2=680000;$$
$$\sum x_i y_i=862500$$

где су x_1, ..., x_{100} поени забележени на пријемном испиту, а y_1, ..., y_{100} поени забележени на крају прве године.

Наћи:

a) Коефицијент корелације за дате податке,

b) Регресиону праву Y по X,

c) Очекивани број поена једног студента на крају године, ако је на пријемном испиту имао 110 поена.

Решење:

а) Ако су X и Y прекидне променљиве, а одговарајуће вероватноће P_{ij}, емпиријске вероватноће, тада је

$$\rho = \frac{\sum f_i x_i y_i - N\cdot \overline{x}\cdot \overline{y}}{\sqrt{\sum f_i x_i^{\,2} - N\cdot \overline{x}^{\,2}}\sqrt{\sum f_i y_i^{\,2} - N\cdot \overline{y}^{\,2}}}$$

$$N = 100$$

$$\overline{x} = \frac{1}{N}\cdot\sum x_i = \frac{10500}{100} = 105$$

$$\overline{y} = \frac{1}{N}\cdot\sum y_i = \frac{8000}{100} = 80$$

$$\rho = \frac{862500 - 100\cdot 105\cdot 80}{\sqrt{1125000 - 100\cdot 105^2}\sqrt{680000 - 100\cdot 80^2}}$$

$$\rho = \frac{22500}{\sqrt{1125000 - 11025000}\sqrt{680000 - 640000}} = \frac{22500}{150\cdot 200} = 0.75$$

$$\frac{y - m_y}{\sigma_y} = \rho\frac{x - m_x}{\sigma_x}$$

$$m_x = E(X) = \overline{x} = 105$$

b)

$$m_y = E(Y) = \overline{y} = 80$$

$$\sigma_x^2 = \frac{1}{N}\sum x_i^2 - x^2 = 11250 - 11025 = 225$$

$$\sigma_x = 15$$

$$\sigma_y^2 = \frac{1}{N}\sum_1 y_1^2 - y^2 = 6800 - 6400 = 400$$

$$\sigma_y = 20$$

$$\frac{y-80}{20} = 0{,}75\frac{x-105}{15} / \cdot 20$$

$$y - 80 = \frac{15x - 1575}{15}$$

$$y - 80 = x - 105$$

$x - y - 25 = 0$ регресиона права Y по X

c) $x_1, \ldots, x_{100}$ поени забележени на пријемном испиту а $y_1, \ldots, y_{100}$ поени забележени на крају прве године.

Регресија мери просечне промене једне величине у зависности од друге величине. Желимо да оценимо успех на крају године (Y) у зависности од пријемног испита x=110, тј. ако заменимо ову вредност за x у регресиону праву x-y-25=0 добићемо

110-y-25=0

y=85

Према томе, очекивани број поена студента, који је на пријемном испиту имао 110 поена, на крају године износи 85.

<u>Задатак 17.</u> Случајна величина (X, Y) дата је густином (законом вероватноће)

$$f(x,y)=\begin{cases} 2 & 0<x<y<1 \\ 0 & \text{ван} \end{cases}$$

a) Одредити маргиналне густине (маргинални закон вероватноћа) за X и Y,

b) Одредити условни закон вероватноће за X под условом да Y узме одређену вредност,

c) Одредити очекивање и дисперзију X под условом да Y узме одређену вредност,

d) Да ли су случајне величине X и Y независне?

Решење:

a)

$$f_1(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dy$$

$$f_2(y)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dx$$

$$f_1(x)=\int_x^1 2dy=2(1-x) \qquad 0<x<y<1$$

$$f_2(y)=\int_0^y 2dx=2y \qquad 0<x<y<1$$

b)

$$f(x/y)=\frac{f(x,y)}{f_2(y)}$$

$$f(x|y)=\frac{2}{2y}=\frac{1}{y} \qquad 0<x<y<1$$

c)

$$E\left(X/Y=y\right)=\int_{-\infty}^{+\infty}x\ f\left(x/y\right)dx$$

$$E\left(X^2/Y=y\right)=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2\ f\left(x/y\right)dx$$

$$\sigma^2\left(X/Y=y\right)=E\left(X^2/Y=y\right)-\left[E\left(X/Y=y\right)\right]^2$$

$$E\left(X/Y=y\right)=\int_0^y x\cdot\frac{1}{y}dx=\frac{1}{y}\cdot\frac{x^2}{2}\bigg|_0^y=\frac{y}{2}$$

$$E\left(X^2/Y=y\right)=\int_0^y x^2\cdot\frac{1}{y}dx=\frac{1}{y}\cdot\frac{x^3}{3}\bigg|_0^y=\frac{y^2}{3}$$

$$\sigma^2\left(X/Y=y\right)=\frac{y^2}{3}-\left(\frac{y}{2}\right)^2=\frac{y^2}{12}$$

d) Да би случајне величине X и Y биле независне, потребно је да буде задовољен услов:

$$f\left(x,y\right)=f_1(x)\cdot f_2\left(y\right)$$

тј. заједнички закон вероватноћа случајне променљиве (X, Y) мора бити једнак производу маргиналних закона вероватноћа X и Y.

Како је $\quad 2\neq 2(1-x)\cdot 2y$

следи да случајне величине X и Y нису независне.

<u>Задатак 18.</u> Случајна величина (X, Y) дата је законом вероватноће

$$f\left(x,y\right)=\begin{cases} x+y & 0<x<1 \quad , \quad 0<y<1 \\ 0 & \text{ван} \end{cases}$$

Израчунати коефицијент корелације.

Решење:

Прво проверавамо независност случајних величина X и Y, тј. да ли је задовољен услов:

$$f\left(x,y\right)=f_1(x)\cdot f_2\left(y\right)$$

Налазимо одговарајуће маргиналне законе вероватноћа

$$f_1(x)=\int_0^1\left(x+y\right)dy=\left(xy+\frac{y^2}{2}\right)\Bigg|_0^1=x+\frac{1}{2} \quad ; \quad 0<x<1$$

$$f_2(x)=\int_0^1\left(x+y\right)dx=\left(\frac{x^2}{2}+yx\right)\Bigg|_0^1=y+\frac{1}{2} \quad ; \quad 0<y<1$$

$x+y\neq\left(x+\frac{1}{2}\right)\cdot\left(y+\frac{1}{2}\right) \quad \Rightarrow \quad$ X и Y нису независне

$$\rho=\frac{E(X\cdot Y)-E(X)\cdot E(Y)}{\sqrt{\sigma^2(X)\sigma^2(Y)}}$$

$$E(X)=\int_0^1 x\left(x+\frac{1}{2}\right)dx=\left(\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{4}\right)\Big|_0^1=\frac{7}{12}$$

$$E(Y)=\int_0^1 y\left(y+\frac{1}{2}\right)dy=\frac{7}{12}$$

$$E\left(X^2\right)=\int_0^1 x^2\left(x+\frac{1}{2}\right)dx=\left(\frac{x^4}{4}+\frac{x^3}{6}\right)\Big|_0^1=\frac{5}{12}$$

$$E\left(Y^2\right)=\int_0^1 y^2\left(y+\frac{1}{2}\right)dy=\frac{5}{12}$$

$$\sigma^2(X)=E\left(X^2\right)-[E(X)]^2=\frac{5}{12}-\left(\frac{7}{12}\right)^2=0.076$$

$$\sigma^2(Y)=E\left(Y^2\right)-[E(Y)]^2=\frac{5}{12}-\left(\frac{7}{12}\right)^2=0.076$$

$$E(X\cdot Y)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} x\cdot yf(x,y)dxdy$$

$$E(X\cdot Y)=\int_{x=0}^{1}\left[\int_{y=0}^{1}(x\cdot y)(x+y)dy\right]dx=\int_{x=0}^{1} x\left[\left(\frac{y^2}{2}x+\frac{y^3}{3}\right)\Big|_{y=0}^{1}\right]dx=$$

$$=\int_{x=0}^{1} x\left(\frac{x}{2}+\frac{1}{3}\right)dx=\left(\frac{x^3}{6}+\frac{x^2}{6}\right)\Big|_{x=0}^{1}=\frac{1}{3}$$

$$\rho=\frac{\frac{1}{3}-\frac{7}{12}\cdot\frac{7}{12}}{\sqrt{0.409}}=-0.09$$

<u>Задатак 19.</u> Случајна величина (X, Y) има униформну расподелу

$$f(x,y)=\begin{cases}1 & 0\le x\le 1 \quad , \quad 0\le y\le 1\\ 0 & \text{ван}\end{cases}$$

Израчунати:

a) $P\{X>0.4;Y>0.8\}$;

b) $P\{X<0.4\}$.

Решење:

a)

$$P\{X>0.4;Y>0.8\}=\int_{x=0.4}^{1}\int_{y=0.8}^{1} f(x,y)\,dxdy=$$

$$=\int_{x=0.4}^{1}\left[\int_{0.8}^{1}1\cdot dy\right]dx=\int_{x=0.4}^{1}\left[y\Big|_{y=0.8}^{1}\right]dx=\int_{x=0.4}^{1}(1-0.8)dx=0.2\cdot\left(x\Big|_{0.4}^{1}\right)=0.2\cdot 0.6=0.12$$

b)

$$P\{X<0.4\}=\int_{x=0}^{0.4}f(x)dx$$

$$f(x)=\int_{y=0}^{1}f(x,y)\cdot dy=\int_{0}^{1}dy=y\Big|_{0}^{1}=1\ za\ 0\le x\le 1$$

$$p\{x<0.4\}=\int_{x=0}^{0.4}1\cdot dx=x\Big|_{0}^{0.4}=0.4$$

Може и на други начин:

$$P\{X<0.4\}=\int_{y=0}^{1}\int_{x=0}^{0,4}f(x,y)dxdy$$

<u>Задатак 20.</u> Дводимензионална случајна величина (X, Y) дата је законом вероватноће:

$$f(x,y)=\begin{cases} a\cdot xy & 0\le x\le 1 \quad , \quad 0\le y\le 1 \\ 0 & \text{ван} \end{cases}$$

a) Одредити непознату константу a,
b) Одредити маргинални закон вероватноћа случајне величине X,
c) Наћи условни закон вероватноћа $f_2(y/x)$.

Решење:

a)

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dx\cdot dy=1$$

$$\int_0^1\int_0^1 a\cdot x\cdot y\cdot dx\cdot dy$$

$$\int_{x=0}^{1}\left[\int_{y=0}^{1} a\cdot xy\cdot dy\right]dx=\int_0^1\left[a\cdot x\frac{y^2}{2}\bigg|_0^1\right]dx=\int_0^1\frac{1}{2}ax\cdot dx=$$

$$=\frac{a}{2}\cdot\left(\frac{x^2}{2}\bigg|_0^1\right)=\frac{a}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{a}{4}$$

$$\frac{a}{4}=1\Rightarrow a=4$$

b)

$$f_1(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy$$

$$f_1(x)=\int_0^1 4xy\cdot dy=4x\cdot\frac{y^2}{2}\Big|_0^1=2x \quad \text{за} \quad 0\le x\le 1$$

c)

$$f_2(y/x)=\frac{f(x,y)}{f_1(x)}=\frac{4xy}{2x}=2y \quad за \quad 0\le y\le 1$$

Задатак 21. Случајна променљива (X,Y) има закон вероватноћа дат следећом функцијом:

$$f(x,y)=\begin{cases} e^{-y} & \text{за} \quad x>0 \ и \ y>x \\ 0 & \text{за} \quad \text{остале} \quad \text{тачке} \end{cases}$$

a) Одредити маргиналне законе вероватноћа,
b) Испитати независност променљивих X и Y и израчунати коефицијент корелације,
c) Одредити условну вероватноћу P {X>2/Y=4}.

Решење:

a)

$$f_1(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy$$

$$f_1(x)=\int_{y=x}^{+\infty} e^{-y}dy=-e^{-y}\Big|_x^{\infty}=e^{-x}$$

$$f_2(y)=\int_{x=0}^{y} e^{-y}dx=e^{-y}\Big|_{x=0}^{y}dx=e^{-y}\cdot x\Big|_0^y=ye^{-y}$$

b) Услов независности

$$f(x,y) = f_1(x)\cdot f_2(y)$$

$e^{-y} \neq e^{-x}\cdot ye^{-y} \Rightarrow$ X i Y нису независне случајне променљиве

$$\rho = \frac{E(X\cdot Y) - E(X)\cdot E(Y)}{\sqrt{E(X^2) - \left[E(X)\right]^2}\sqrt{E(Y^2) - \left[E(Y)\right]^2}}$$

$$E(X) = \int_0^{\infty} xe^{-x}dx = 1$$

$$E(X^2) = \int_0^{\infty} x^2e^{-x}dx = 2$$

$$E(Y) = \int_0^{+\infty} y^2e^{-y}dy = 2$$

$$E(Y^2) = \int_0^{+\infty} y^3e^{-y}dy = 6$$

$$E(X\cdot Y) = \int_{x=0}^{\infty}\int_{y=x}^{+\infty} x\cdot ye^{-y}dxdy = 3$$

$$\rho = \frac{3-1\cdot 2}{\sqrt{(2-1)\cdot(6-4)}} = 0.707$$

c) Прво тражимо условни закон вероватноће за X под условом да је Y=4:

$$f_2(x/y=4) = \frac{f(x,4)}{f_y(4)} = \frac{e^{-4}}{4\cdot e^{-4}} = \frac{1}{4}$$

$$P\{X>2/Y=4\} = \int_2^4 f(x/4)dx = \int_2^4 \frac{1}{4}dx = \frac{1}{4}x\Big|_2^4 = \frac{1}{2}$$

<u>**Задатак 22.**</u> Нека су X и Y непрекидне случајне промењљиве са заједничком густином

$$f(x,y) = x + y, \qquad 0 < x < 1,\ \ 0 < y < 1$$

Наћи:

a) E(X), σ^2(X),
b) E(Y), σ^2(Y),
c) Коваријансу, коефицијенте линеарне корелације и детерминације,
d) Регресионе праве Y по X и X по Y,
e) Регресиону криву Y по X.

Решење:

a)

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f_1(x)dx$$

$$f_1(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy = \int_0^1 (x+y)dy = x \cdot y\Big|_0^1 + \frac{y^2}{2}\Big|_0^1 = x + \frac{1}{2}, \quad 0 < x < 1$$

$$E(X) = \int_0^1 x(x+\frac{1}{2})dx = \int_0^1 x^2 dx + \frac{1}{2}\int_0^1 xdx = \frac{x^3}{3}\Big|_0^1 + \frac{x^2}{4}\Big|_0^1 = \frac{7}{12}$$

$$E(X^2) = \int_0^1 x^2(x+\frac{1}{2})dx = \frac{5}{12}$$

$$\sigma^2(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = \frac{5}{12} - \left(\frac{7}{12}\right)^2 = \frac{11}{144}$$

b)

$$E(Y) = \frac{7}{12}$$

$$E(Y^2) = \frac{5}{12}$$

$$\sigma^2(Y) = \frac{11}{144}$$

c) Коваријанса

Cov(X,Y)=σ_{xy}=μ_{11}=m_{11}-$m_x \cdot m_y$

$$\sigma_{xy} = \int_{\infty}^{+\infty}\int_{\infty}^{+\infty} x \cdot y \ f(x,y)dxdy - m_x \cdot m_y$$

σ_{xy}=E(X·Y)-E(X)·E(Y)

$$\sigma_{xy} = \int_0^1\int_0^1 x \cdot y \cdot (x+y)dxdy - E(X) \cdot E(Y) = \frac{1}{3} - \frac{7}{12} \cdot \frac{7}{12} = -\frac{1}{144}$$

Коефицијент линеарне корелације = коефицијент корелације

$$\rho = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x \cdot \sigma_y}$$

$$\rho = \frac{E(X \cdot Y) - E(X) \cdot E(Y)}{\sqrt{E(X^2) - \left[E(X)\right]^2}\sqrt{E(Y^2) - \left[E(Y)\right]^2}} = -\frac{1}{11}$$

Коефицијент детерминације ρ^2

$$\rho^2 = \left(-\frac{1}{11}\right)^2 = \frac{1}{121}$$

d) Одређујемо регресиону праву Y по X

$$\frac{y-m_y}{\sigma_y}=\rho\frac{x-m_x}{\sigma_x}$$

$$\frac{y-\frac{7}{12}}{\sqrt{\frac{11}{144}}}=-\frac{1}{11}\frac{x-\frac{7}{12}}{\sqrt{\frac{11}{144}}}$$

$$y-\frac{7}{12}=-\frac{1}{11}\left(x-\frac{7}{12}\right)$$

$$y+\frac{x}{11}=\frac{7}{12}+\frac{7}{12\cdot 11}$$

$$11y+x=\frac{84}{12}$$

$x+11y-7=0$ регресиона права Y по X.

Одређујемо регресиону праву X по Y:

$$\frac{y-m_y}{\sigma_y}=\frac{1}{\rho}\frac{x-m_x}{\sigma_x}$$

$$\frac{y-\frac{7}{12}}{\sqrt{\frac{11}{144}}}=-11\frac{x-\frac{7}{12}}{\sqrt{\frac{11}{144}}}$$

$$y-\frac{7}{12}=-11x+\frac{77}{12}$$

$11x + y - 7 = 0$ регресиона права X по Y

e) Регресиона крива Y по X

$$E(Y/x) = \int_{-\infty}^{+\infty} y \cdot f(y/x)dy$$

$$f(y/x) = \frac{f(x,y)}{f_1(x)} = \frac{x+y}{x+\frac{1}{2}}$$

$$E(Y/x) = \int_0^1 y \cdot \frac{x+y}{x+\frac{1}{2}} dy = \frac{1}{x+\frac{1}{2}} \int_0^1 \left(xy + y^2\right) dy =$$

$$= \frac{1}{x+\frac{1}{2}} \cdot \frac{x}{2} + \frac{1}{x+\frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{3} = \frac{\frac{x}{2}+\frac{1}{3}}{x+\frac{1}{2}} = \frac{3x+2}{6x+3}$$

<u>Задатак 23.</u> Закон вероватноћа дводимензионалне случајне променљиве дат је функцијом

$$f(x,y) = \begin{cases} x+y & 0<x<1, 0<y<1 \\ 0 & \textit{ван} \end{cases}$$

a) Одредити регресиону криву за променљиву X у односу на Y,
b) Колика је варијанса променљиве X под условом да је Y=y?

Решење:

a)

$$E(X/y)=\int_{-\infty}^{+\infty} x\cdot f(x/y)dx$$

$$f_2(y)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dx$$

$$f_2(y)=\int_0^1 (x+y)dx = y+\frac{1}{2}$$

$$f(x/y)=\frac{f(x,y)}{f_2(y)}=\frac{x+y}{y+\frac{1}{2}}$$

$$E(X/y)=\int_0^1 x\cdot\frac{x+y}{y+\frac{1}{2}}dx=\frac{3y+2}{6y+3}$$

b)

$$\sigma^2(x/y)=E(X^2/y)-\left[E(X/y)\right]^2$$

$$E(X^2/y)=\int_{-\infty}^{+\infty} x^2\cdot f(x/y)dx$$

$$E(X^2/y)=\int_0^1 x^2\cdot\frac{x+y}{y+\frac{1}{2}}dy=\frac{1}{y+\frac{1}{2}}\int_0^1\left(x^3+x^2y\right)dy=$$

$$=\frac{1}{y+\frac{1}{2}}\cdot\frac{1}{4}+\frac{1}{y+\frac{1}{2}}\cdot\frac{y}{3}=\frac{4y+3}{12(y+\frac{1}{2})}$$

$$\sigma^2(x/y)=\frac{4y+3}{12(y+\frac{1}{2})}-\left(\frac{3y+2}{6y+3}\right)^2$$

<u>Задатак 24.</u> Наћи регресиону криву Y по X ако је заједничка густина пропорционална са

$$(2x+y)e^{-x-y} \qquad 0<x<\infty, \;\; 0<y<\infty$$

Решење:

$$f(x,y)=a(2x+y)e^{x-y}, 0<x,y<\infty$$
$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dxdy=1 \Rightarrow a=\frac{1}{3}$$
$$f_1(x)=\frac{1}{3}e^{-x}(2x+1)$$
$$f(y/x)=\frac{2x+y}{2x+1}e^{-y}$$
$$E(Y/x)=\frac{2x+2}{2x+1}$$

<u>Задатак 25.</u> Наћи регресиону криву Y по X ако је заједничка густина

$$f(x,y)=8xy \qquad 0<y<x<1$$

Решење:

$$f_1(x)=4x^3$$
$$f(y/x)=\frac{2y}{x^2}$$
$$E(Y/X)=\frac{2}{3}x$$

<u>Задатак 26.</u> Закон вероватноћа случајне променљиве (X,Y) дат је функцијом:

$$f(x,y)=\begin{cases} 0.5\sin\left(x+y\right) & \text{за} \quad 0\le x\le \dfrac{\pi}{2},\, 0\le y\le \dfrac{\pi}{2} \\ 0 & \text{за} \quad \text{све остале тачке} \end{cases}$$

a) Одредити очекиване вредности и варијансе случајних променљивих X и Y,

b) Одредити коефицијент корелације.

Решење:

a)

$$E(X)=\frac{\pi}{4}$$

$$E(Y)=\frac{\pi}{4}$$

$$\sigma^2(x)=\frac{\pi^2}{16}+\frac{\pi}{2}-2$$

$$\sigma^2(y)=\frac{\pi^2}{16}+\frac{\pi}{2}-2$$

$$E(X\cdot Y)=\frac{\pi}{2}-1$$

b)

$$\rho=-0.245$$

<u>Задатак 27.</u> Дата је функција густине случајне промењиве (X,Y)

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{8}(6-x-y) & 0<x<2, 2<y<4\\ 0 & \text{ван}\end{cases}$$

a) Одредити маргиналне законе вероватноћа за X и Y,
b) Одредити условни закон вероватноћа f(y/x),
c) Испитати независност X и Y и наћи коефицијент корелације.

Решење:

a)

$$f_1(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy \qquad f_2(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dx$$

$$f_1(x)=\int_2^4 \frac{1}{8}(6-x-y)dy=\frac{1}{8}\int_2^4 6dy-\frac{1}{8}\int_2^4 xdy-\frac{1}{8}\int_2^4 ydy=$$

$$=\frac{1}{8}\cdot 6y\Big|_2^4-\frac{1}{8}\cdot xy\Big|_2^4-\frac{1}{8}\cdot\frac{y^2}{2}\Big|_2^4=\frac{3-x}{4}$$

$$f_2(y)=\int_0^2 \frac{1}{8}(6-x-y)dx=\frac{5-y}{4}$$

b)

$$f(x/y)=\frac{f(x,y)}{f_2(y)} \qquad f(y/x)=\frac{f(x,y)}{f_1(x)}$$

$$f(y/x)=\frac{\frac{1}{8}(6-x-y)}{\frac{6-2x}{8}}=\frac{6-x-y}{6-2x}$$

c)

$$f(x,y) \underset{нез}{\overset{по}{=}} f_1(x)\cdot f_2(y)$$

$$\frac{1}{8}(6-x-y) \neq \frac{6-2x}{8}\cdot\frac{10-2y}{8} \Rightarrow \text{нису независне}$$

$$\rho_{x,y} = \frac{E(X\cdot Y) - E(X)\cdot E(Y)}{\sqrt{\sigma^2(X)\cdot\sigma^2(Y)}}$$

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_1(x)dx = \frac{5}{6}$$

$$E(Y) = \int_{-\infty}^{+\infty} y f_2(x)dy = \frac{17}{6}$$

$$E(X\cdot Y) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} x\cdot y\cdot f(x,y)dy = \frac{7}{3}$$

$$E(X^2) = \int_0^2 x^2\,\frac{3-x}{4}\,dx = 1$$

$$E(Y^2) = \int_2^4 y^2\,\frac{5-y}{4}\,dy = \frac{25}{3}$$

$$\sigma^2(X) = \frac{11}{36}$$

$$\sigma^2(Y) = \frac{11}{36}$$

$$\rho = \frac{\frac{7}{3} - \frac{5}{6}\cdot\frac{17}{6}}{\sqrt{\frac{11}{36}}\cdot\sqrt{\frac{11}{36}}} = \frac{-1}{11} = -0.09$$

<u>Задатак 28.</u> Дата је функција густине случајне промењиве (X, Y)

$$f(x,y)=\begin{cases} a(6-x-y) & 0<x<2, 2<y<4 \\ 0 & ван \end{cases}$$

Одредити:

a) вредност параметра *a*,

b) маргиналне законе вероватноћа за X и Y,

c) условни закон вероватноћа *f(x/y)*,

d) да ли су X и Y независне и колико је ρ?

Решење:

a)

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dx\cdot dy=1$$

$$a\int_2^4\int_0^2 (6-x-y)dxdy=1$$

$$\int_2^4\int_0^2 (6-x-y)dxdy=$$

$$=\int_2^4 (6x-\frac{x^2}{2}-xy)_{x=0}^2 dy=\int_2^4 (12-2-2y)dy=(10y-y^2)_{y=2}^4=$$

$$=40-16-20+4=8$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dxdy=8\cdot a=1=$$

$$a=\frac{1}{8}$$

b) $f_1(x) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy \quad f_2(y) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dx$

Решавањем ових интеграла, добијају се маргинални закони:

$$f_1(x) = \frac{3-x}{4}, \quad 0 < x < 2$$

$$f_2(y) = \frac{5-y}{4}, \quad 2 < y < 4$$

c) $f(x/y) = \dfrac{f(x,y)}{f_2(y)} = \dfrac{\frac{1}{8}(6-x-y)}{\frac{5-y}{4}} = \dfrac{6-x-y}{10-2y}, \quad 0 < x < 2, \quad 2 < y < 4$

d) X и Y нису независне јер је $f(x,y) \neq f_1(x) \cdot f_2(y)$

$$\rho_{x,y} = \frac{E(X \cdot Y) - E(X) \cdot E(Y)}{\sqrt{\sigma^2(X) \cdot \sigma^2(Y)}}$$

$$E(X) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x f_1(x) dx = \frac{5}{6}$$

$$E(Y) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} y f_2(x) dy = \frac{17}{6}$$

$$E(X \cdot Y) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x \cdot y \cdot f(x,y) dy = \frac{7}{3}$$

$$E(X^2) = \int\limits_{0}^{2} x^2 \frac{3-x}{4} dx = 1$$

$$E(Y^2)=\int_2^4 y^2\,\frac{5-y}{4}\,dy=\frac{25}{3}$$

$$\sigma^2(X)=\frac{11}{36}$$

$$\sigma^2(Y)=\frac{11}{36}$$

$$\rho=\frac{\frac{7}{3}-\frac{5}{6}\cdot\frac{17}{6}}{\sqrt{\frac{11}{36}}\cdot\sqrt{\frac{11}{36}}}=\frac{-1}{11}=-0.09$$

<u>**Задатак 29.**</u> Случајна величина (X,Y) дата је функцијом густине:

$$f(x,y)=\begin{cases} c & 0<x<y<2 \\ 0 & \textit{ван} \end{cases}$$

Одредити:

a) Константу c,

b) Маргиналне густине за X и Y,

c) Условни закон вероватноће за X, под условом да Y узме одређену вредност,

d) Очекивање и дисперзију X, под условом да Y узме одређену вредност,

e) Да ли су случајне величине X и Y независне.

Решење:

$$f(x,y)=\begin{cases} c & 0<x<y<2 \\ 0 & \textit{ван} \end{cases}$$

a)

$$\int_0^2\int_x^2 c\,dx\,dy = 1$$

$$c\cdot\int_0^2 y\Big|_x^2 dx = c\cdot\int_0^2 (2-x)dx = c\left(2x-\frac{x^2}{2}\right)\Big|_0^2 = c\cdot(4-2) = 2c = 1$$

$$c = \frac{1}{2}$$

b)

$$f_1(x) = \int_x^2 \frac{1}{2}dy = \frac{1}{2}y\Big|_x^2 = 1-\frac{x}{2},\quad 0<x<2$$

$$f_2(y) = \int_0^y \frac{1}{2}dx = \frac{1}{2}x\Big|_0^y = \frac{1}{2}y,\quad 0<y<2$$

c) $$f(x/y) = \frac{f(x,y)}{f_2(y)} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}y} = \frac{1}{y}$$

d) $$E(X/Y=y) = \int_0^y x\cdot\frac{1}{y}dx = \frac{1}{y}\cdot\frac{x^2}{2}\Big|_0^y = \frac{y}{2}$$

$$\sigma^2(X/Y=y) = \int_0^y x^2\cdot\frac{1}{y}dx - \left(\frac{y}{2}\right)^2 = \frac{y^2}{3}-\frac{y^2}{4} = \frac{y^2}{12}$$

e) $$f(x,y) = f_1(x)\cdot f_2\cdot(y)$$

$$\frac{1}{2} \neq \left(1-\frac{x}{2}\right)\cdot\frac{1}{2}y \Rightarrow \text{нису независне}$$

<u>**Задатак 30.**</u> Дводимензионална случајна променљива (X,Y) дата је законом вероватноћа:

$$f(x,y)=\begin{cases} c & x\ge 0, y\ge 0, x^2+y^2\le 1 \\ 0 & \text{ван} \end{cases}$$

Одредити:

a) Константу c,

b) Маргиналне густине расподела за X и Y,

c) E(X) и E(Y).

Решење:

$$f(x,y)=\begin{cases} c & x\ge 0, y\ge 0, x^2+y^2\le 1 \\ 0 & \text{ван} \end{cases}$$

a) Константа c се одређује из услова:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(x,y)dx=1$$

Област D, на којој је дата функција различита од 0, представља четвртину јединичног круга у првом квадранту.

D={(x,y) : $x\ge 0$; $y\ge 0$; $x^2+y^2\le 1$}

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(x,y)dxdy=c\cdot\iint_{D}dxdy=c\cdot P_D\ ,$$

где је P_D површина области D.

$$c \cdot \frac{\pi}{4} = 1 \Rightarrow \ c = \frac{4}{\pi}$$

b)

$$f_1(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dy = \int_{0}^{\sqrt{1-x^2}} \frac{4}{\pi} dy = \frac{4}{\pi} y \Big|_{0}^{\sqrt{1-x^2}} = \frac{4}{\pi}\sqrt{1-x^2} \quad x \in (0,1)$$

$$f_2(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dx = \int_{0}^{\sqrt{1-y^2}} \frac{4}{\pi} dx = \frac{4}{\pi}\sqrt{1-y^2} \qquad y \in (0,1)$$

c)

$$E(X) = \int_0^1 x \cdot \frac{4}{\pi}\sqrt{1-x^2}dx = \frac{4}{\pi}\int_0^1 x\sqrt{\left(1-x^2\right)}dx = \begin{Bmatrix} t = 1-x^2 \\ dt = -2xdx \end{Bmatrix}$$

$$= \frac{4}{2\pi}\int_0^1 \sqrt{t}dt = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{t^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\Bigg|_0^1 = \frac{4}{3\pi}$$

$$E(Y) = \frac{4}{3\pi}$$

5. РАЗНИ ИСПИТНИ ЗАДАЦИ

Задатак 1. Један студент је проценио да ће Теорију вероватноће положити са вероватноћом 2/3, Статистику са вероватноћом 4/9 и да ће бар један од ових предмета положити са вероватноћом 7/9. Одредити вероватноћу да студент:

a) положи Теорију вероватноће и Статистику,
b) положи само Теорију вероватноће,
c) положи само Статистику,
d) положи само један од ова два предмета,
e) положи највише један од ова два предмета,
f) не положи ниједан од ова два предмета.

Решење:

Означимо догађаје:
A – Студент је положио Теорију вероватноће.
B – Студент је положио Статистику.

Дате су вероватноће:
$P(A) = 2/3 \quad P(B) = 4/9 \quad P(A \cup B) = 7/9$

Сада се лако добијају следећи резултати:

a) $P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B) = \frac{2}{3} + \frac{4}{9} - \frac{7}{9} = \frac{1}{3}$

b) $P(A - B) = P(A) - P(A \cap B) = \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$

c) $P(B - A) = P(B) - P(A \cap B) = \frac{4}{9} - \frac{1}{3} = \frac{1}{9}$

d) $P(A\Delta B)=P(A)+P(B)-2P(A\cap B)=\frac{2}{3}+\frac{4}{9}-2\frac{1}{3}=\frac{4}{9}$

e) $P\left(\overline{A\cap B}\right)=1-P(A\cap B)=1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$

f) $P\left(\bar{A}\cap\bar{B}\right)=1-P(A\cup B)=1-\frac{7}{9}=\frac{2}{9}$

<u>Задатак 2.</u> У производњи неких производа прописана толеранција за једну димензију је у границама од 4 до 16 милиметара. Проценат шкарта испод доње границе толеранције је 3%, а изнад горње границе је 8%. Уз претпоставку да је уочена димензија случајна промењива са нормалном расподелом N (μ,σ) наћи параметре расподеле μ и σ.

Решење:

Из услова задатка имамо:

P(X>16) = 0.08 и P(X<4) = 0.03

Користећи први услов добијамо P(X<16) = 0.92 односно $P\left(\frac{X-\mu}{\sigma}<\frac{16-\mu}{\sigma}\right)=0.92$ па из таблица за нормалну расподелу добијамо да је $\phi\left(\frac{16-\mu}{\sigma}\right)=0.92$ односно $\frac{16-\mu}{\sigma}=1.41\,(*)$

Из другог услова је P(X<4) = 0.03 па користећи да је $\phi(-\alpha)=-\phi(\alpha)$ добијамо да је $\phi\left(\frac{\mu-4}{\sigma}\right)=0.97$ односно $\frac{\mu-4}{\sigma}=1.88\,(**)$

Из једначина (*) и (**) решавајући систем од две једначине са две непознате добијамо непознате параметре $\mu \approx 10.9$ и $\sigma \approx 3.67$.

<u>Задатак 3.</u> Имамо 6 споља идентичних кутија, од којих су три кутије типа А, две кутије типа В и једна кутија типа С. Кутије типа А садрже по 80 белих и 20 црних куглица, кутије типа В по 70 белих и 30 црних куглица, а кутија С 60 белих и 40 црних куглица. На случајан начин се бира једна кутија, а затим се из ње узима узорак од 10 куглица са враћањем. Ако је добијен узорак од 6 белих и 4 црне куглице, одредити вероватноћу да је изабрана кутија типа А.

Решење:

Нека су следећи догађаји означени са:
A – Изабрана је кутија типа А.
B – Изабрана је кутија типа В.
C – Изабрана је кутија типа С.

Могу се одредити вероватноће ових догађаја на основу броја ових кутија, па је

$$P(A)=\frac{3}{6},\ P(B)=\frac{2}{6},\ P(C)=\frac{1}{6}$$

Нека је догађај
D – Од 10 извучених куглица, 6 су беле и 4 су црне.

Остварење догађаја *D* зависи од тога из које је врсте кутије узет узорак, па је сада

$$P(D/A)=\binom{10}{6}\left(\frac{80}{100}\right)^6\left(\frac{20}{100}\right)^4=0.088$$

$$P(D/B)=\binom{10}{6}\left(\frac{70}{100}\right)^6\left(\frac{30}{100}\right)^4=0.2$$

$$P(D/C)=\binom{10}{6}\left(\frac{60}{100}\right)^6\left(\frac{40}{100}\right)^4=0.251$$

Сада је на основу формуле тоталне вероватноће лако израчунати вероватноћу да ће се остварити догађај *D*, па је

$$P(D)=P(A)P(D/A)+P(B)P(D/B)+P(C)P(D/C)$$

Односно, заменом одговарајућих вредности је $P(D)=0.1525$.

Тражену вероватноћу, одредићемо из Бајесове формуле, односно

$$P(A/D)=\frac{P(A)P(D/A)}{P(D)}=0.2885$$

<u>Задатак 4.</u> У кутији се налази по једна бела и једна црна куглица. Извлачи се једна по једна куглица. Ако је извучена куглица бела, она се враћа у кутију и додају се још две беле куглице, а затим се извлачење понавља. Извлачење се прекида ако се извуче црна куглица или најдуже после шестог извлачења. Нека је *X* случајна промењљива која представља број извлачења. Одредити:

a) закон вероватноћа случајне промењљиве *X*,

b) математичко очекивање и дисперзију за *X*,

c) $E(3X+6)$ и $\sigma^2(3X-7)$,

d) вероватноћу $P(X\le E(X))$.

Решење:

a) Јасно је да случајна променљива X узима вредности из скупа $\{1,2,3,4,5,6\}$.

Имајући у обзир мењање садржаја кутије у зависности од броја извлачења, добићемо следеће

$$X:\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4} & \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{6} & \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{8} & \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{7}{8}\cdot\frac{1}{10} & \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{7}{8}\cdot\frac{9}{10} \end{pmatrix}$$

односно

$$X:\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \frac{128}{256} & \frac{32}{256} & \frac{16}{256} & \frac{10}{256} & \frac{7}{256} & \frac{63}{256} \end{pmatrix}$$

b) $E(X)=\sum_{i=1}^{6} x_i p_i = \frac{693}{256} = 2.707$

$$E(X^2)=\sum_{i=1}^{6} x_i^2 p_i = \frac{3003}{256} = 11.73$$

$$\sigma^2(X) = E(X^2) - \left(E)(X)\right)^2 = 4.402$$

c) $E(3X+6) = 3E(X)+6 = 14.121$

$$\sigma^2(3X-7) = 9\sigma^2(X) = 39.618$$

d) $P(X \le E(X)) = P(X \le 2.707) = P(X=1) + P(X=2) = \frac{160}{256} = 0.625$

<u>Задатак 5.</u> Случајна промењива (X,Y) има функцију густине која је пропорционална са $e^{-x-\frac{y}{2}}$ за $0<X<\infty$, $0<y<\infty$, а за остале вредности X и Y функција густине $f(x,y)=0$.

a) Одредити функцију густине за (X,Y),
b) Одредити маргиналне густине за X и Y,
c) Израчунати коефицијент корелације између X и Y,
d) Израчунати вероватноћу $P(Y>X)$.

Решење:

Пошто је дато да је функција густине пропорционална са функцијом $e^{-x-\frac{y}{2}}$, онда ће функција густине бити једнака

$$f(x,y)=ce^{-x-\frac{y}{2}}\text{, где важи } c\in R$$

на основу особине функције густине да је $\iint\limits_D f(x,y)dxdy=1$ одредићемо непознату константу, а самим тим и функцију густине.

a) $$c\iint\limits_D e^{-x-\frac{y}{2}}dxdy=c\int\limits_0^{+\infty}e^{-x}dx\int\limits_0^{+\infty}e^{-\frac{y}{2}}dy=c(e^{-x}\,|_\infty^0)2(e^{-\frac{y}{2}}\,|_\infty^0)=2c$$

Изједначавањем последњег израза са 1 добијамо да је $c=\frac{1}{2}$, па је сада коначно функција густине дата са:

$$f(x,y)=\frac{1}{2}e^{-x-\frac{y}{2}}$$

b) маргиналне густине одређујемо по дефиницији, па је

$$f_1(x) = \int_0^{+\infty} f(x,y)dy = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} e^{-x-\frac{y}{2}}dy = \frac{1}{2}e^{-x}\int_0^{+\infty} e^{-\frac{y}{2}}dy = \frac{1}{2}e^{-x}2(e^{-\frac{y}{2}}\Big|_{\infty}^{0}) = e^{-x}$$

$$f_2(y) = \int_0^{\infty} f(x,y)dx = \frac{1}{2}e^{-\frac{y}{2}}\int_0^{\infty} e^{-x}dx = \frac{1}{2}e^{-\frac{y}{2}}e^{-x}\Big|_{\infty}^{0} = \frac{1}{2}e^{-\frac{y}{2}}$$

c) пошто је

$$f_1(x)f_2(y) = \frac{1}{2}e^{-x}e^{-\frac{y}{2}} = \frac{1}{2}e^{-x-\frac{y}{2}} = f(x,y)$$

закључујемо да су променљиве X и Y независне па је коефицијент корелације $\rho_{XY} = 0.$

d) догађај $\{Y > X\}$ образован је од свих тачака области

$$D_1 = \{(x,y): y > x, x > 0, y > 0\}$$

па тражену вероватноћу добијамо као

$$P(Y > X) = \iint_{D_1} \frac{1}{2}e^{-x-\frac{y}{2}}dxdy = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} e^{-\frac{y}{2}}dy\int_0^{y} e^{-x}dx = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} e^{-\frac{y}{2}}(1-e^{-y})dy = \frac{2}{3}$$

Задатак 6. Случајна променљива X има нормалну расподелу $N(50,100)$. Посматра се случајна променљива Y која је дефинисана са:

$$Y = \begin{cases} 1, & X \le a \\ 0, & X > a \end{cases}$$

Одредити непознату константу a тако да очекивана вредност случајне променљиве Y буде 0.2.

Решење:

На основу дефиниције очекиване вредности, знамо да је

$$E(Y)=1\cdot P(X\leq a)+0\cdot P(X>a)$$

Односно, $E(Y)=P(X\leq a)=0.2$ (по услову задатка).

Даље је $P\left(X\leq a\right)=P\left(\dfrac{X-\mu}{\sigma}\leq\dfrac{a-50}{10}\right)=\phi\left(\dfrac{a-50}{10}\right)=0.2$

Јасно је да је вредност аргумента негативна па је $\phi\left(-\dfrac{a-50}{10}\right)=0.8$ па на основу вредности за функцију расподеле за случајну променљиву која има стандардизовану нормалну расподелу, добијамо

$$-\frac{a-50}{10}=0.84,\ \text{ па је }\ a=50-10\cdot 0.84=50-8.4$$

$$a=41.6$$

<u>Задатак 7.</u> Сваке године, вероватноћа да возач мушкарац доживи незгоду која укључује потраживање од осигуравајуће компаније је μ, независно од осталих година. Еквивалента вероватноћа жена возача је λ. Претпоставимо да постоји једнак број мушкараца и жена возача који су осигурани у UNIQA осигурању, које случајно изабира једног од њих.

a) Колика је вероватноћа да ће изабрани возач имати потраживање ове године?

b) Колика је вероватноћа да ће изабрани возач имати потраживање две године за редом?

c) Ако осигураваjућа компанија изабира случајно подносиоца потраживања, колика је вероватноћа да ће овај подносилац имати још једно потраживање следеће године?

Решење:

a) Нека су A_1 и A_2 догађаји да случајно изабран возач има потраживање и у првој и у другој години. Онда у зависности од пола возача (*М* или *Ж*) имамо

$$P\left(A_1\right)=P\left(A_1\middle|M\right)P\left(M\right)+P\left(A_1\middle|Ж\right)P\left(Ж\right)=\frac{1}{2}\left(\mu+\lambda\right)$$

зато што је $P(Ж)=P(M)=\dfrac{1}{2}$.

b) Исто тако,

$$P(A_1\cap A_2)=P(A_1\cap A_2\mid M)P(M)+P(A_1\cap A_2\mid Ж)P(Ж)=\frac{1}{2}\left(\mu^2+\lambda^2\right).$$

c) По дефиницији,

$$P(A_2\mid A_1)=P(A_2\cap A_1)/P(A_1)=\frac{\mu^2+\lambda^2}{\mu+\lambda}$$

<u>Задатак 8.</u> Бацате новчић. Ако покаже писмо, бацате једну коцкицу и ваш резултат је број на њој. Ако новчић покаже главу, бацате још пет новчића и ваш резултат је збир глава које се виде (укључујући и први новчић). Ако ми кажете да је ваш резултат два, колика је вероватноћа да сте бацили коцкицу?

Решење:

Нека су следећи догађаји дефинисани као:

H_1 – На новчићу је пало писмо.
H_2 – На новчићу је пала глава.

Јасно је да је $P(H_1) = P(H_2) = \frac{1}{2}$.

Нека је догађај A – Резултат је два.

Сада можемо одредити следеће условне вероватноће:

$$P(A/H_1) = \frac{1}{6} \quad \text{и} \quad P(A/H_2) = \binom{5}{1}\frac{1}{2}\frac{1}{2^4}$$

односно, на основу формуле за тоталну вероватноћу добијамо:

$$P(A) = P(H_1)P(A/H_1) + P(H_2)P(A/H_2)$$

Па заменом одговарајућих вредности добијамо

$$P(A) = \frac{1}{2}\frac{1}{6} + \frac{1}{2}\frac{5}{32} = \frac{31}{192} = 0.16146$$

Тражена вероватноћа је условна вероватноћа коју добијамо из Бајесове формуле, односно:

$$P(H_1/A) = \frac{P(H_1)P(A/H_1)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{2}\frac{1}{6}}{\frac{31}{192}} = \frac{16}{31} = 0.5161$$

<u>Задатак 9.</u> Из кутије у којој су 3 беле, 3 црне и 4 плаве куглице извлаче се истовремено 3 куглице. Ако је X број белих, а Y број црних извучених куглица, одредити:

a) закон вероватноће дводимензионалне случајне промењљиве (X,Y),

b) вероватноћу $P(0 < X \leq 2, Y = 2)$.

Решење:

a) Истовременим извлачењем 3 куглице добијају се неуређени узорци без понављања.

Број свих истовремених извлачења 3 куглице из кутије са 10 куглица једнак броју свих неуређених 3-узорака без понављања основног 10-скупа, којих има $\binom{10}{3}$.

Да би одредили закон вероватноће случајне промењљиве (X,Y), треба одредити вероватноћу догађаја $\{X = x, Y = y\}$ за све могуће вредности X и у. Овај догађај се остварује када је извучено X белих и у црних куглица, и, према томе 3-X-у плавих куглица. Број повољних узорака догађаја $\{X = x, Y = y\}$износи:

$$\binom{3}{x}\binom{3}{y}\binom{4}{3-x-y}$$

па је сада лако формирати закон вероватноћа случајне промењљиве (X,Y):

$$f(x,y)=\begin{cases}\binom{3}{x}\binom{3}{y}\binom{4}{3-x-y}\Big/\binom{10}{3} & x,y=0,1,2,3\ \text{и}\ x+y\le 3\\ 0 & \text{за остале}\ x\ \text{и}\ y\end{cases}$$

b) $P(0<X\le 2,Y=2)=P(X=1,Y=2)+P(X=2,Y=2)$

$$P(0<X\le 2,Y=2)=\binom{3}{1}\binom{3}{2}\binom{4}{3-1-2}/\binom{10}{3}+0=\frac{3}{40}$$

јер је $\quad x+y=4>3 \ \Rightarrow\ P(X=2,Y=2)=0$

<u>Задатак 10.</u> Случајна променљива X има нормалну расподелу са параметрима $m=20,\sigma^2=4$. Израчунати следеће вероватноће:

a) $P(18<X<24)$,

b) $P(|X-20|<3)$,

c) $P(X<25)$,

d) $P(X=20)$.

Решење:

a)

$$P(18<X<24)=P\left(\frac{18-20}{2}<\frac{X-\mu}{\sigma}<\frac{24-20}{2}\right)=$$
$$=P\left(-1<X^*<2\right)=\phi(2)-\phi(-1)=\phi(2)+\phi(1)-1=$$
$$=0.9772+0.8413-1=0.8185$$

b)

$$P(|X-20|<3)=P(-3<X-20<3)=P(-\frac{3}{2}<X^*<\frac{3}{2})=$$
$$=\phi(1.5)-\phi(-1.5)=2\phi(1.5)-1=0.8664$$

c) $P\left(X<25\right)=P\left(X^*<\dfrac{25-20}{2}\right)=P\left(X^*<\dfrac{5}{2}\right)=\phi(2.5)=0.9938$

d) $P(X=20)=0$

<u>Задатак 11.</u> Случајна промењљива X има униформну расподелу $U(-1,b)$. Ако је $\sigma^2=\dfrac{1}{4}$, одредити константу b и математичко очекивање случајне промењљиве X под условом да је $b>0$.

Решење:

Функција густине за случајну промењљиву X дата је изразом

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b+1} & -1<x<b\\ 0 & \text{за остале тачке}\end{cases}$$

Пошто је $\sigma^2=E\left(X^2\right)-\left(E\left(X\right)\right)^2$ имамо следеће

$$E\left(X^2\right)=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2f(x)dx=\frac{1}{b+1}\int_{-1}^{b}x^2dx=\frac{1}{b+1}\frac{x^3}{3}\Big|_{-1}^{b}=\frac{b^3+1}{3(b+1)}=\frac{b^2-b+1}{3}$$

$$E(X)=\frac{b-1}{2}, \text{ па сада добијамо}$$

$$\sigma^2=E\left(X^2\right)-\left(E\left(X\right)\right)^2=\frac{b^2-b+1}{3}-\left(\frac{b-1}{2}\right)^2=$$

$$=\frac{4b^2-4b+4-3b^2+6b-3}{12}=\frac{b^2+2b+1}{12}=\frac{\left(b+1\right)^2}{12}$$

односно, по услову задатка је

$$\frac{\left(b+1\right)^2}{12}=\frac{1}{4}, \text{ тј. } \left(b+1\right)^2=3,$$

па решавањем ове једначине добијамо да је $b=\sqrt{3}-1$. (решење $b=-\sqrt{3}-1$ не узимамо у обзир јер је речено у задатку да је b>0). Сада је лако добити математичко очекивање случајне променљиве X.

$$E(X)=\frac{\sqrt{3}-2}{2}$$

<u>Задатак 12.</u> Случајна променљива X има расподелу чија је функција густине дата са

$$f(x)=ae^{-\lambda|x|}, \quad \left(\lambda>0\right)$$

a) Одредити константу a,
b) Одредити функцију расподеле,
c) Израчунати P(0<X<2).

Решење:

a) Узимајући у обзир да је $|x| = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$ функција густине је

$$f(x) = \begin{cases} ae^{-\lambda x} & x \geq 0 \\ ae^{\lambda x} & x < 0 \end{cases}$$

Па на основу особине да је $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$, одредићемо константу *a*.

Дакле,

$$\int\limits_{0}^{+\infty} f(x)dx = \frac{1}{2}$$

јер је функција парна, па је

$$a\int\limits_{0}^{+\infty} e^{-\lambda x}dx = \frac{a}{\lambda}e^{-\lambda x}\Big|_{\infty}^{0} = \frac{a}{\lambda}$$

и коначно је $a = \dfrac{\lambda}{2}$

b) Функцију расподеле одређујемо по дефиницији

за $-\infty < x < 0$

$$F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f(x)dx = a\int\limits_{-\infty}^{x} e^{\lambda x}dx = \frac{a}{\lambda}e^{\lambda x}\Big|_{-\infty}^{x} = \frac{a}{\lambda}e^{\lambda x} = \frac{1}{2}e^{\lambda x}$$

за $x > 0$

$$F(x) = \int_{-\infty}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{x} f(x)dx = \frac{1}{2} + a\int_{0}^{x} e^{-\lambda x} = \frac{1}{2} + \frac{a}{-\lambda} e^{-\lambda x} |_0^x =$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{a}{-\lambda}(e^{-\lambda x} - 1) = 1 - \frac{1}{2} e^{-\lambda x}$$

Односно

$$F(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} e^{\lambda x} & x < 0 \\ 1 - \frac{1}{2} e^{-\lambda x} & x > 0 \end{cases}$$

c) $$P(0 < X < 2) = F(2) - F(0) = \frac{1}{2}(1 - e^{-2\lambda x})$$

<u>Задатак 13.</u> Хомогена коцка чије су стране нумерисане бројевима од 1 до 6, баца се два пута и посматрају се следеће случајне променљиве: X представља број који се појављује при првом бацању, Y при другом, $Z = \min\{X,Y\}$ і $V = |X\text{-}Y|$. Одредити:

a) Закон расподеле вероватноћа за дводимензионалну случајну променљиву (Z,V)

b) Маргиналне расподеле за Z и V

c) $E(Z/V=3)$

Решење:

a) У табели је дат закон вероватноће за дводимензионалну случајну променљиву (Z, V).

Z \ V	0	1	2	3	4	5	$\sum$
1	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{11}{36}$
2	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	0	$\frac{9}{36}$
3	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	0	0	$\frac{7}{36}$
4	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	0	0	0	$\frac{5}{36}$
5	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	0	0	0	0	$\frac{3}{36}$
6	$\frac{1}{36}$	0	0	0	0	0	$\frac{1}{36}$
$\sum$	$\frac{6}{36}$	$\frac{10}{36}$	$\frac{8}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{2}{36}$	1

b) Маргиналне расподеле за *Z* и *V*

$$Z:\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \frac{11}{36} & \frac{9}{36} & \frac{7}{36} & \frac{5}{36} & \frac{3}{36} & \frac{1}{36} \end{pmatrix}$$

$$V:\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \frac{6}{36} & \frac{10}{36} & \frac{8}{36} & \frac{6}{36} & \frac{4}{36} & \frac{2}{36} \end{pmatrix}$$

c) E(*Z*/*V*=3) = ?

$$p(z_1 / v = 3) = \frac{\frac{2}{36}}{\frac{6}{36}} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} \qquad p(z_2 / v = 3) = \frac{\frac{2}{36}}{\frac{6}{36}} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

$$p(z_3 / v = 3) = \frac{\frac{2}{36}}{\frac{6}{36}} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} \qquad p(z_4 / v = 3) = \frac{0}{\frac{6}{36}} = 0$$

$$p(z_5 / v = 3) = \frac{0}{\frac{3}{36}} = 0 \qquad p(z_6 / v = 3) = \frac{0}{\frac{3}{36}} = 0$$

Условни закон вероватноће променљиве *Z*, под условом да променљива *V* има једну одређену вредност (*V*= 3) је:

$$Z / V = 3 : \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Условна очекивана вредност E (*Z*/*V*=3), рачуна се по формули:

$$E(X / Y = y) = \sum_{i=1} x_i \cdot p_{i/j}$$

$$E(Z / V = 3) = 2$$

<u>Задатак 14.</u> Ако је *К* случајна променљива са униформном расподелом на интервалу [0,5], наћи вероватноћу да корени једначине $4x^2 + 4kx + k + 2 = 0$ буду реални.

Решење:

$K:U(0,5) \;\Rightarrow\; a=0,\;\; b=5$

Догађај *A* – Корени су реални.

Да би корени квадратне једначине били реални, дискриминанта мора бити $D \geq 0$

$$D = b^2 - 4ac$$

У датој квадратној једначини је: *a = 4, b = 4к, c = к + 2*

У једначини $D = b^2 - 4ac$, замењују се вредности за *a, b* и *c*:

$$D = (4k)^2 - 4\cdot 4\cdot (k+2) = 16k^2 - 16(k+2) = 16k^2 - 16k - 32$$

То јест:

$$16k^2 - 16k - 32 \geq 0$$

Сада се решава једначина:

$$16k^2 - 16k - 32 = 0$$

ако поделимо обе стране једначине са 16, добијамо

$$k^2 - k - 2 = 0$$

У овој квадратној једначини је: *a* = 1, *b* = -1, *c* = -2

Квадратна једначина се решава по формули:

$$k_{1/2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

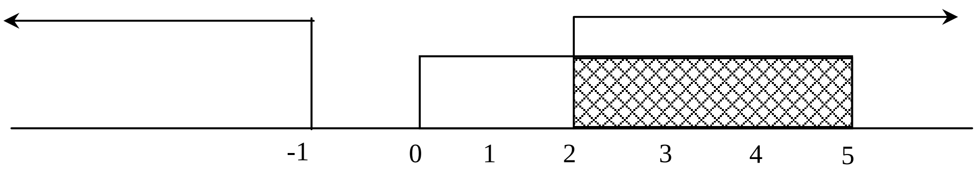
Вредности за *a, b* и *c* се замењују у формули за решавање квадратне једначине:

$$k_{1/2} = \frac{1 \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2)}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \frac{1 \pm 3}{2}$$

Израчунавају се вредности за $к_1$ и $к_2$:

$$k_1 = \frac{1+3}{2} = \frac{4}{2} = 2$$
$$k_2 = \frac{1-3}{2} = -\frac{2}{2} = -1$$

Пошто дискриминанта мора бити: $D \geq 0 \Rightarrow k \in (-\infty, -1) \cup (2, +\infty)$



У поставци задатка, дато је: U(0,5) , па се са дијаграма види да је однос дужина:

$$P(A) = \frac{3}{5} = 0.6$$

Вероватноћа да су корени дате једначине реални је P(*A*) = 0.6

<u>Задатак 15.</u> Закон расподеле случајне променљиве (X,Y) дат је табелом:

$X \backslash Y$	-1	0	2
1	p_{11}	p_{12}	p_{13}
2	0.12	0.3	0.18
3	p_{31}	0.05	p_{33}

Ако се зна да су случајне променљиве X и Y независне:

a) Одредити у потпуности закон расподеле случајне променљиве (X,Y),

b) Израчунати E(X/Y=0) и Var(Y/X=3),

c) Израчунати E(4X+2Y),

d) Израчунати Cov(X,Y).

Решење:

a)

Пошто су случајне променљиве X и Y независне, онда је $p_{ij} = p_{i\bullet} \cdot p_{\bullet j}$. Маргинална вероватноћа $p_{i\bullet}$ се рачуна по формули:

$$p_{2\bullet} = p_{21} + p_{22} + p_{23} = 0.6$$

Користећи ове формуле, израчунавају се заједничке вероватноће, као и маргиналне вероватноће које недостају у табели.

Након израчунавања свих вероватноћа по наведеној формули, у табели је приказан закон расподеле случајно променљиве (X,Y).

Y \ X	−1	0	2	∑
1	0.06	0.15	0.09	0.3
2	0.12	0.3	0.18	0.6
3	0.02	0.05	0.03	0.1
∑	0.2	0.5	0.3	1

b) Условна очекивана вредност E(*X*/*Y*=0), рачуна се по формули:

$$E(X/Y=y)=\sum_{i=1} x_i \cdot p_{i/j}$$

Условна вероватноћа P(*X*/*Y*=0) рачуна се по формули:

$$p_{i/j}=\frac{p(X=x_i, Y=y_j)}{p(Y=y_j)}=\frac{p_{ij}}{p_{\bullet j}}, \quad \text{односно} \quad p_{i/j}=\frac{p_{ij}}{\sum\limits_{i=1} p_{ij}}$$

$$p(X_1/Y=0)=\frac{0.15}{0.5}=0.3$$
$$p(X_2/Y=0)=\frac{0.3}{0.5}=0.6$$
$$p(X_3/Y=0)=\frac{0.05}{0.5}=0.1$$

Условни закон вероватноће X/Y=0:

$$X/Y=0:\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0.3 & 0.6 & 0.1 \end{pmatrix}$$

$$E(X/Y=0)=1\cdot 0.3+2\cdot 0.6+3\cdot 0.1=1.8$$

Варијанса случајне промењиве Y/X=3:

$$Var(Y/X=3)=E(Y^2/X=3)-\left[E(Y/X=3)\right]^2$$

$$p(Y_1/X=3)=\frac{0.02}{0.1}=0.2$$
$$p(Y_2/X=3)=\frac{0.05}{0.1}=0.5$$
$$p(Y_3/X=3)=\frac{0.03}{0.1}=0.3$$

Условни закон вероватноће промењиве Y/X=3:

$$Y/X=3:\begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0.2 & 0.5 & 0.3 \end{pmatrix}$$

$$E(Y/X=3)=-1\cdot 0.2+0\cdot 0.5+2\cdot 0.3=0.4$$

$$E(Y^2/X=3)=(-1)^2\cdot 0.2+0^2\cdot 0.5+2^2\cdot 0.3=1.4$$

$$Var(Y/X=3)=E(Y^2/X=3)-\left[E(Y/X=3)\right]^2=1.4-0.4^2=1.24$$

$$Var(Y/X=3)=1.24$$

c)

$$X:\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0.3 & 0.6 & 0.1 \end{pmatrix}$$

$$E(X)=1\cdot 0.3+2\cdot 0.6+3\cdot 0.1=1.8$$

$$Y:\begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0.2 & 0.5 & 0.3 \end{pmatrix}$$

$$E(Y)=-1\cdot 0.2+0\cdot 0.5+2\cdot 0.3=0.4$$

$$E(4X+2Y)=4E(X)+2E(Y)=4\cdot 1.8+2\cdot 0.4=8$$

d) Обзиром да су X и Y независне случајне промењљиве, Cov(X,Y)=0

Задатак 16. За округлим столом краља Артура седи 12 витезова. Сваки од њих је у свађи са својим суседом. Треба изабрати 5 витезова, да ослободе заробљену принцезу. На колико се начина то може учинити, тако да су међу изабраним витезовима сви међу собом у слози.

Решење:

Уочимо једног витеза за округлим столом. Нека је то сер Ланселот. Тада имамо две врсте комбинација које долазе у обзир.
(1) Ако сер Ланселот улази у избор, онда морамо искључити његова два суседа, а од преосталих 9 бирају се 4 витеза, али тако да међу њима нема суседа.

То се може урадити на $\binom{6}{4}=15$ начина.

(2) Ако сер Ланселот није међу одабраним, онда и његова два суседа долазе у обзир, па од 11 бирамо 5 витезова.

То се може урадити на $\binom{7}{5}=21$ начина.

Дакле, укупно 15+21=36 могућности.

<u>Задатак 17.</u> Свака страница квадрата подељена је на n једнаких делова. Колико троуглова можемо конструисати тако да им темена буду деоне тачке? (Сматрамо да су и темена квадрата деоне тачке)

Решење:

Укупно је $\binom{4n}{3}$ тројки тачака, а колинеарних има $\binom{n+1}{3}$ на свакој страници квадрата, па је укупан број троуглова $\binom{4n}{3}-4\binom{n+1}{3}$.

<u>Задатак 18.</u> Непрекидна случајна променљива X задата је густином:

$$f(x)=\begin{cases} a\cos 2x & -\pi/4 \le x \le \pi/4 \\ 0 & \textit{за остале вредности} \end{cases}$$

a) Одредити непознату константу *a*,

b) Наћи функцију расподеле F(*X*),

c) Израчунати вероватноћу P(0<*X*<π/8),
d) Одредити E(3*X*+5).

Решење:

Из услова да је $\int_{-\pi/4}^{\pi/4} f(x)dx = 1$ имамо да је $\int_{-\pi/4}^{\pi/4} a\cos 2xdx = 1$, одакле се добија да је *a*=1.

a) Функцију расподеле лако добијамо по дефиницији па је

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < -\dfrac{\pi}{4} \\ \displaystyle\int_{-\pi/4}^{\pi/4} \cos 2xdx = \frac{1}{2}(\sin 2x + 1) & -\dfrac{\pi}{4} \le x \le \dfrac{\pi}{4} \\ 1 & x > \dfrac{\pi}{4} \end{cases}$$

b) $P(0 < X < \pi/8) = F(\pi/8) - F(0) = \dfrac{\sqrt{2}}{4}$

c) E(*X*)=0 (ово проверити, урадити преко дефиниције или увидети да је функција густине парна функција на задатом интервалу па је њена очекивана вредност једнака нули)

$$E(3X + 4) = 3E(X) + 5 = 5$$

<u>Задатак 19.</u> Мерења даљине до неког објекта садрже систематске и случајне грешке. Систематска грешка смањује свако мерење за 50м, а случајне грешке су потчињене нормалном закону расподеле вероватноћа са стандардним одступањем σ=100м. Одредити:

a) Вероватноћу да грешка измерене даљине не премашује 150м по апсолутној вредности,

b) Вероватноћу да измерена даљина не премашује тачну вредност.

Решење:

Означимо са X сумарну грешку измерене даљине. Систематска грешка смањује СВАКО мерење (из текста задатка) па је $\mu = -50m$. Сада се лако добија уз напомену да се мора урадити стандардизација случајне променљиве X следеће:

a)

$$P\left(|X| < 150\right) = P\left(-150 < X < 150\right) = P\left(\frac{-150+50}{100} < \frac{X+50}{100} < \frac{150+50}{100}\right) =$$

$$= P\left(-1 < X^* < 2\right) = \phi(2) - \phi(-1) = 0.8186$$

b) $P\left(-\infty < X < 0\right) = P\left(-\infty < \frac{X+50}{100} < \frac{50}{100}\right) = P\left(-\infty < X^* < \frac{1}{2}\right) = 0.6915$

Задатак 20. Закон расподеле дводимензионалне случајне променљиве (X,Y) је приказан табелом

$X \backslash Y$	2	5	6
1	10c	20c	5c
2	0	25c	10c
4	15c	5c	10c

a) Одредити $E(X/Y=6)$ и $\sigma^2(Y/X=1)$,

b) Израчунати коефицијент корелације између X и Y.

Решење:

a) Прво морамо одредити вредност константе c.

Пошто је $\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} p_{ij} = 1$ лако се добија да је c=0.01.

$$P(X=1/Y=6) = 0.05/0.25 = 0.2$$

$$P(X=2/Y=6) = 0.1/0.25 = 0.4$$

$$P(X=4/Y=6) = 0.1/0.25 = 0.4$$

Сада је по дефиницији:

$$E(X/Y=6) = 1*0.2+2*0.4+4*0.4=2.6$$

$$P(Y=2/X=1) = 0.1/0.35=0.29$$

$$P(Y=5/X=1) = 0.2/0.35 = 0.57$$

$$P(Y=6/X=1) = 0.05/0.35 = 0.14$$

Даље се лако добија да је

$E(Y/X=1) = 30/7 = 4.29$

$E(Y^2/X=1) = 144/7 = 20.57$ па је коначно

$\sigma^2(Y/X=1)=E(Y^2/X=1)-(E(Y/X=1))^2= 2.2$

b) Одредимо прво маргиналне расподеле за промењљиве X и Y, а затим се по дефиницији редом добијају:

$E(X)=2.25$ $\quad E(X^2)=6.55$ $\quad \sigma^2(X)=E(X^2)-(E(X))^2= 1.4875$

$E(Y)=4.5$ $\quad E(Y^2)=22.5$ $\quad \sigma^2 (Y)=E(Y^2)-(E(Y))^2= 2.25$

$E(XY) = 9.8$

Обзиром да је коефицијент корелације између X и Y дат са

$$\rho_{XY} = \frac{E(XY) - E(X)E(Y)}{\sigma_X \sigma_Y}$$

На основу горе израчунатих вредности коначно се добија да је

$$\rho_{XY} = -0.178$$

<u>Задатак 21.</u> Вероватноћа да се књига налази у библиотеци је k. Ако је књига у библиотеци, са истом вероватноћом се налази на једној од n полица. Прегледано је m $(m<n)$ полица и књига није нађена. Колика је сада вероватноћа да је књига у библиотеци?

Решење:

Означимо следеће догађаје са:

A – Књига је у библиотеци.
$\overline{A}$ – Књига није у библиотеци.
B – Књига је на прегледаних m полица.
$\overline{B}$ – Књига није на прегледаних m полица.

У задатку се тражи вероватноћа да је књига у библиотеци ако није на прегледаних m полица – $P(A/\overline{B})$.
Из текста задатка можемо уочити вероватноће следећих догађаја:

$$P(A)=k$$
$$P(\overline{A})=1-k$$
$$P(B/A)=\frac{m}{n}$$
$$P(\overline{B}/A)=1-\frac{m}{n}$$
$$P(\overline{B}/\overline{A})=1$$

Користећи формулу условне вероватноће:

$$P(A/B)=\frac{P(AB)}{P(B)} \quad \Rightarrow \quad P(AB)=P(B)\cdot P(A/B)$$

Можемо одредити вероватноћу догађаја $\overline{B}$:

$$P(\overline{B})=P(A\overline{B})+P(\overline{A}\overline{B})=P(A)\cdot P(\overline{B}/A)+P(\overline{A})\cdot P(\overline{B}/\overline{A})=$$

$$k \cdot (1 - \frac{m}{n}) + (1-k) \cdot 1 = 1 - k\frac{m}{n}$$

Тражену вероватноћу $P(A/\overline{B})$ добијамо као:

$$P(A/\overline{B}) = \frac{P(A\overline{B})}{P(\overline{B})} = \frac{P(A) \cdot P(\overline{B}/A)}{P(\overline{B})} = \frac{k \cdot (1 - \frac{m}{n})}{1 - k \cdot \frac{m}{n}} = \frac{k \cdot (n-m)}{n - mk}$$

<u>**Задатак 22.**</u> У кутији се налази једна куглица која може бити бела или црна. У кутију се ставља једна бела куглица, па се из кутије на случајан начин бира једна куглица. Колика је вероватноћа да је у кутији већ била бела куглица ако је извучена куглица беле боје?

Решење:

Означимо догађаје са:
H_1 – У кутији је била бела куглица.
H_2 – У кутији је била црна куглица.
A – Извучена је бела куглица.

Из задатка можемо одредити:

$$P(H_1) = P(H_2) = \frac{1}{2}$$

$$P(A/H_1) = 1 \qquad\qquad P(A/H_2) = \frac{1}{2}$$

Помоћу формуле за тоталну вероватноћу можемо наћи вероватноћу догађаја A:

$$P(A)=P(H_1)\cdot P(A/H_1)+P(H_2)\cdot P(A/H_2)=\frac{1}{2}\cdot 1+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{3}{4}$$

Одатле користећи Бајесову формулу одређујемо тражену вероватноћу $P(H_1/A)$:

$$P(H_1/A)=\frac{P(H_1)\cdot P(A/H_1)}{P(A)}=\frac{\frac{1}{2}\cdot 1}{\frac{3}{4}}=\frac{2}{3}$$

Задатак 23. Из кутије у којој је било 6 новчића од 2 динара и 4 новчића од 5 динара, изгубљен је један новчић. Да би се одредила његова вредност из кутије се истовремено извлаче 2 новчића. Колика је вероватноћа да је изгубљен новчић од 2 динара, ако се зна да су оба извучена новчића исте вредности?

Решење:

Означимо догађаје на следећи начин:

H_1 – Изгубљен је новчић од 2 динара.
H_2 – Изгубљен је новчић од 5 динара.
A – Оба извучена новчића су исте вредности.

У задатку треба одредити вероватноћу догађаја H_1/A. Претходно из текста задатка можемо одредити следеће вероватноће:

$$P(H_1)=\frac{6}{6+4}=\frac{6}{10}=0.6$$

$$P(H_2)=\frac{4}{6+4}=\frac{4}{10}=0.4$$

Догађај да су оба извучена новчића исте вредности ће се реализовати или ако су извучене 2 новчића од 2 динара или ако су извучена 2 новчића од 5 динара, при том водећи рачуна о томе који је новчић изгубљен. Одатле добијамо вредности условних вероватноћа:

Вероватноћа да су оба извучена новчића исте вредности ако је претходно изгубљен новчић од 2 динара:

$$P(A/H_1)=\frac{\binom{5}{2}+\binom{4}{2}}{\binom{9}{2}}=\frac{16}{36}=0.44$$

Вероватноћа да су оба извучена новчића исте вредности ако је претходно изгубљен новчић од 5 динара:

$$P(A/H_2)=\frac{\binom{6}{2}+\binom{3}{2}}{\binom{9}{2}}=\frac{18}{36}=0.5$$

Одатле формулом за тоталну вероватноћу, а потом Бајесовом формулом добијамо:

$$P(A)=P(H_1)\cdot P(A/H_1)+P(H_2)\cdot P(A/H_2)=0.6\cdot 0.44+0.4\cdot 0.5=0.46$$

$$P(H_1/A)=\frac{P(H_1)\cdot P(A/H_1)}{P(A)}=\frac{0.6\cdot 0.44}{0.46}=0.574$$

<u>Задатак 24.</u> У једној серији је a исправних и b неисправних производа, а у другој је c исправних и d неисправних производа. Из прве серије се на случајан начин бира један производ и пребацује у другу серију, а затим се из друге серије бира један производ и враћа у прву серију. Сада се из прве серије случајно бира један производ. Колика је вероватноћа да је извучени производ исправан?

Решење:

Нека су догађаји:

H_1 – У првој серији исправан производ замењен неисправним.
H_2 – У првој серији исправан производ замењен исправним.
H_3 – У првој серији неисправан производ замењен неисправним.
H_4 – У првој серији неисправан производ замењен исправним.
A – после пребацивања из прве серије извучен исправан производ.

Тада можемо одредити следеће вероватноће:

$$P(H_1) = \frac{a}{a+b} \cdot \frac{d}{c+d+1}$$

где је $\frac{a}{a+b}$ вероватноћа да је из прве серије у другу пребачен исправан производ, а $\frac{d}{c+d+1}$ вероватноћа да је из друге у прву серију пребачен неисправан производ

$$P(H_2) = \frac{a}{a+b} \cdot \frac{c}{c+d+1}$$

где је $\frac{a}{a+b}$ вероватноћа да је из прве серије у другу пребачен исправан производ, а $\frac{c}{c+d+1}$ вероватноћа да је из друге у прву серију пребачен исправан производ

$$P(H_3) = \frac{b}{a+b} \cdot \frac{d}{c+d+1}$$

где је $\frac{b}{a+b}$ вероватноћа да је из прве серије у другу пребачен неисправан производ, а $\frac{d}{c+d+1}$ вероватноћа да је из друге у прву серију пребачен неисправан производ

$$P(H_4) = \frac{b}{a+b} \cdot \frac{c}{c+d+1}$$

где је $\frac{b}{a+b}$ вероватноћа да је из прве серије у другу пребачен неисправан производ, а $\frac{c}{c+d+1}$ вероватноћа да је из друге у прву серију пребачен исправан производ.

Обзиром да у сва четири случаја знамо шта је пребачено из друге у прву серију можемо да одредимо и следеће условне вероватноће:

$$P(A / H_1) = \frac{a-1}{a+b}$$

$$P(A/H_2)=\frac{a}{a+b}$$

$$P(A/H_3)=\frac{a}{a+b}$$

$$P(A/H_4)=\frac{a+1}{a+b}$$

По формули за тоталну вероватноћу добићемо да је:

$$P(A)=\sum_{i=1}^{4}P(H_i)\cdot P(A/H_i)$$

$$P(A)=\frac{a}{a+b}\cdot\frac{d}{c+d+1}\cdot\frac{a-1}{a+b}+\frac{a}{a+b}\cdot\frac{c}{c+d+1}\cdot\frac{a}{a+b}+$$

$$+\frac{b}{a+b}\cdot\frac{d}{c+d+1}\cdot\frac{a}{a+b}+\frac{b}{a+b}\cdot\frac{c}{c+d+1}\cdot\frac{a+1}{a+b}=$$

$$=\frac{a(a+b)(c+d)+bc-ad}{\left(a+b\right)^2(c+d+1)}$$

<u>**Задатак 25.**</u> Човек има свежањ од *n* кључева од којих је само један кључ од куће. Наћи вероватноћу да ће из тачно *k* покушаја ($k\geq1$) наћи кључ од куће ако кључеве проба на случајан начин и то:

a) без враћања у свежањ,
b) са враћањем у свежањ.

Решење:

Ако са A_i означимо догађаје да је човек у *i*-том покушају пронашао кључ од куће (*i*=1,2,...,n), а са *B* догађај да је тачно у *k*-том покушају пронашао кључ од куће, онда догађај *B* можемо да представимо као пресек догађаја A_1, A_2 до $A_к$:

$$B = \overline{A}_1 \cap \overline{A}_2 \cap \ldots \cap \overline{A}_{k-1} \cap A_k$$

Према томе вероватноћа догађаја B биће:

$$P(B) = P(\overline{A}_1 \cap \overline{A}_2 \cap \ldots \cap \overline{A}_{k-1} \cap A_k)$$

a) За случај без враћања кључева у свежањ

$$P(B) = P(\overline{A}_1 \cap \overline{A}_2 \cap \ldots \cap \overline{A}_{k-1} \cap A_k)$$

$$P(\overline{A}_1) \cdot P(\overline{A}_2 / \overline{A}_1) \cdot \ldots \cdot P(A_k / \overline{A}_1 \cap \overline{A}_2 \cap \ldots \cap \overline{A}_{k-1})$$

$$\frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-2}{n-1} \cdot \ldots \cdot \frac{n-k}{n-k+1} \cdot \frac{1}{n-k} = \frac{1}{n}$$

b) За случај са враћањем у свежањ, вероватноћа да кључ неће бити пронађен у сваком од k покушаја је иста и износи $\frac{n-1}{n}$ па ће вероватноћа догађаја *B* бити:

$$P(B)=P(\overline{A}_1\cap\overline{A}_2\cap\ldots\cap\overline{A}_{k-1}\cap A_k)=\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-1}{n}\cdot\ldots\cdot\frac{n-1}{n}\cdot\frac{1}{n}=\left(\frac{n-1}{n}\right)^{k-1}\cdot\frac{1}{n}$$

<u>Задатак 26.</u> Функција густине случајне променљиве *X* је:

$$f(x)=\begin{cases} ax^2e^{-kx} & x\geq 0,\ k>0 \\ 0 & x<0 \end{cases}$$

Наћи:

a) Константу a,

b) Функцију расподеле случајне променљиве *X*,

c) $P\left(X\in\left(0,\frac{1}{k}\right)\right)$.

Решење:

a) Из особине функције густине

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=1$$

имамо да је:

$$\int_{0}^{+\infty} ax^2e^{-kx}dx=1$$

Уз помоћ парцијалне интеграције добићемо да је:

$$a\int_{0}^{+\infty} x^2 e^{-kx}dx = \frac{2a}{k^3} = 1 \quad \Rightarrow \quad a = \frac{k^3}{2}$$

b) Функција расподеле је:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx = \begin{cases} 0 & x \le 0 \\ \displaystyle\int_0^x \frac{k^3}{2} x^2 e^{-kx}dx & x > 0 \end{cases}$$

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x \le 0 \\ 1 - \dfrac{x^2k^2 + 2kx + 2}{2} e^{-kx} & x > 0 \end{cases}$$

c)

$$P(0 < X < \frac{1}{k}) = F(\frac{1}{k}) - F(0) = \frac{\left(\frac{1}{k}\right)^2 \cdot k^2 + 2k \cdot \frac{1}{k} + 2}{2} \cdot e^{-\frac{1}{k}\cdot k} - 0 = \frac{2}{5e} \approx 0.086$$

<u>**Задатак 27.**</u> Из шпила од 52 карте на случајан начин се бирају 2 карте са враћањем. Ако је *X* број извучених дама, а *Y* број извучених трефова, наћи закон расподеле вероватноћа променљиве (*X*,*Y*).

Решење:

Обзиром да у шпилу има 4 даме и 13 треф карата (од тих 13 карата 1 је дама), при извлачењу 2 карте број дама и број трефова може бити 0, 1 или 2.

У случају са враћањем имаћемо следеће вероватноће:

$$P(X=0,Y=0)=\left(\frac{52-4-12}{52}\right)^2=\left(\frac{36}{52}\right)^2=0.4792$$

$$P(X=0,Y=1)=2\cdot\frac{12}{52}\cdot\frac{36}{52}=0.3195$$

$\frac{12}{52}$ је вероватноћа да ће бити извучена карта треф која није дама, док је $\frac{36}{52}$ вероватноћа да неће бити извучена ни карта треф ни дама. Обзиром да ове две карте можемо да извучемо на 2 начина овај производ се множи са 2.

$$P(X=0,Y=2)=\left(\frac{12}{52}\right)^2=0.0532$$

На исти начин добијамо и остале вероватноће које су приказане у следећој табели закона вероватноћа промењљиве (X,Y):

$X \backslash Y$	0	1	2
0	$\left(\frac{36}{52}\right)^2$	$2\cdot\frac{12}{52}\cdot\frac{36}{52}$	$\left(\frac{12}{52}\right)^2$
1	$2\cdot\frac{3}{52}\cdot\frac{36}{52}$	$\frac{2\cdot 3\cdot 12+2\cdot 1\cdot 36}{52\cdot 52}$	$2\cdot\frac{1}{52}\cdot\frac{12}{52}$
2	$\left(\frac{3}{52}\right)^2$	$2\cdot\frac{1}{52}\cdot\frac{3}{52}$	$\left(\frac{1}{52}\right)^2$

Задатак 28. Две машине производе артикле исте врсте. Вероватноћа да артикал буде I класе износи 0,92 за прву машину и 0,8 за другу машину. Прва машина производи 3 пута више артикала него друга и сви артикли се стављају у исто складиште. Одредити вероватноћу да међу 5 случајно одабраних артикала, са враћањем, буде тачно 2 артикла I класе.

Решење:

Означимо догађаје:
H_1 – Случајно изабрани артикал је произведен на првој машини.
H_2 – Случајно изабрани артикал произведен на другој машини.
A – Случајно изабран артикал је I класе.

Обзиром да случајно изабрани артикал мора бити произведен на некој од две машине важи да:

$P(H_1)+P(H_2)=1$

Такође обзиром да прва машина производи 3 пута више артикала од друге важи да је:

$$P(H_1)=3P(H_2)$$

Из ове две једнакости добијамо да је

$$P(H_1)=\frac{3}{4}=0.75 \qquad\qquad P(H_2)=\frac{1}{4}=0.25$$

Из текста задатка имамо да је:

$$P(A/H_1)=0.92 \qquad\qquad P(A/H_2)=0.8$$

Тако да је вероватноћа да је случајно изабрани артикал I класе:

$$P(A)=P(H_1)\cdot P(A/H_1)+P(H_2)\cdot P(A/H_2)=$$

$$=0.75\cdot 0.92+0.25\cdot 0.8=0.89$$

Обзиром да је свако од 5 извлачења са враћањем, вероватноћа да ће случајно изабрани артикал бити I класе биће иста 0.89. Вероватноћа да међу 5 случајно одабраних артикала, са враћањем, буде тачно 2 артикла I класе биће:

$$P(B)=\binom{5}{2}\cdot 0.89^2\cdot(1-0.89)^3\approx 0.11$$

<u>**Задатак 29.**</u> У корпи се налази 8 тениских лоптица, од којих су 4 нове. За прву партију се на случајан начин бирају 3 лоптице, које се после игре враћају у корпу, па се за другу партију поново на

случајан начин бирају 3 лоптице. Колика је вероватноћа да се друга партија игра само са новим лоптицама?

Решење:

Означимо са:

A_i - догађај да смо за прву партију изабрали i нових лоптица. (i=0,1,2,3)

B – Друга партија се игра новим лоптицама.

Тада можемо да израчунамо следеће вероватноће:

$$P(A_0) = \frac{\binom{4}{0}\binom{4}{3}}{\binom{8}{3}} = \frac{4}{56} \qquad P(A_2) = \frac{\binom{4}{2}\binom{4}{1}}{\binom{8}{3}} = \frac{24}{56}$$

$$P(A_1) = \frac{\binom{4}{1}\binom{4}{2}}{\binom{8}{3}} = \frac{24}{56} \qquad P(A_3) = \frac{\binom{4}{3}\binom{4}{0}}{\binom{8}{3}} = \frac{4}{56}$$

Одатле можемо да одредимо условне вероватноће:

$$P(B / A_0) = \frac{\binom{4}{3}}{\binom{8}{3}} = \frac{4}{56}$$

$$P(B/A_1)=\frac{\binom{4-1}{3}}{\binom{8}{3}}=\frac{\binom{3}{3}}{\binom{8}{3}}=\frac{1}{56}$$

$$P(B/A_2)=P(B/A_3)=0$$

Из формуле за тоталну вероватноћу добијамо тражену вероватноћу P(B):

$$P(B)=\sum_{i=0}^{3}P(A_i)\cdot P(B/A_i)$$

$$P(B)=\frac{4}{56}\cdot\frac{4}{56}+\frac{24}{56}\cdot\frac{1}{56}+\frac{24}{56}\cdot 0+\frac{4}{56}\cdot 0=\frac{5}{392}=0.0127$$

Задатак 30. Марина је предложила Вељку да одиграју партију шаха. Да би партија била што занимљивија, увели су следеће правило: пре почетка партије, Марина баца коцкицу. Ако добије 1, 2 или 3, Вељко уклања једну своју фигуру са табле; ако падне 4 или 5, Вељко уклања две своје фигуре са табле; ако падне 6, Вељко уклања 3 своје фигуре. Вероватноћа да Марина победи у партији ако је на почетку имала фигуру предности је 0.1; ако је имала 2 фигуре предности Марина ће победити са вероватноћом 0.15; ако је имала 3 фигуре предности са вероватноћом 0.4. Напослетку, Марина је победила. Колика је вероватноћа да је на почетку партије Марина имала 2 фигуре предности?

Решење:

Хипотезе су следеће:
H_1 – Марина је на почетку партије имала 1 фигуру предности.
H_2 – Марина је на почетку партије имала 2 фигуре предности.
H_3 – Марина је на почетку партије имала 3 фигуре предности.
A – Марина је победила.

$$P(H_1)=\frac{3}{6}$$

$$P(H_2)=\frac{2}{6}$$

$$P(H_3)=\frac{1}{6}$$

$$P(A/H_1)=0.1$$

$$P(A/H_2)=0.15$$

$$P(A/H_3)=0.4$$

$$P(A)=\sum_{i=1}^{3}P(H_i)P(A/H_i)=\frac{3}{6}\cdot 0.1+\frac{2}{6}\cdot 0.15+\frac{1}{6}\cdot 0.4=0.1666$$

$$P(H_2/A)=\frac{P(H_2)P(A/H_2)}{P(A)}=\frac{\frac{2}{6}\cdot 0.15}{\frac{3}{6}\cdot 0.1+\frac{2}{6}\cdot 0.15+\frac{1}{6}\cdot 0.4}=0.3$$

<u>Задатак 31.</u> Дате су две урне: у првој се налази a белих и b црних куглица, а у другој c белих и d црних. На случајан начин се бира једна од урни и из ње се узима једна куглица. Добијена је бела куглица. Наћи вероватноћу да следећа куглица, коју узимамо из исте урне, буде такође бела.

Решење:

Хипотезе:
H_1 – Изабрана је прва урна.
H_2 – Изабрана је друга урна.
Нека A означава појаву беле куглице при првом извлачењу.

$$P(H_1) = P(H_2) = \frac{1}{2}$$

$$P(A/H_1) = \frac{a}{a+b} \qquad P(A/H_2) = \frac{c}{c+d}$$

$$P(A) = \frac{1}{2}\frac{a}{a+b} + \frac{1}{2}\frac{c}{c+d}$$

$$P(H_1/A) = \frac{\frac{a}{a+b}}{\frac{a}{a+b} + \frac{c}{c+d}}$$

$$P(H_2/A) = \frac{\frac{c}{c+d}}{\frac{a}{a+b} + \frac{c}{c+d}}$$

Нека B означава појаву беле куглице при другом извлачењу

$$P(B/A) = P(H_1/A)P\big(B/(H_1/A)\big) + P(H_2/A)P\big(B/(H_2/A)\big)$$

Условна вероватноћа појаве друге беле куглице, под условом да је изабрана прва урна, и из ње извучена бела куглица, једнака је

$$P\left(B/\left(H_1/A\right)\right)=\frac{a-1}{a+b-1}$$

Аналогно је

$$P\left(B/\left(H_2/A\right)\right)=\frac{c-1}{c+d-1}$$

И следи

$$P\left(B/A\right)=\frac{1}{\frac{a}{a+b}+\frac{c}{c+d}}\left[\frac{a(a-1)}{(a+b)(a+b-1)}+\frac{c(c-1)}{(c+d)(c+d-1)}\right]$$

Задатак 32. Машина се састоји из два дела: рад сваког дела је неопходан за рад машине. Поузданост (вероватноћа непрекидног рада у току времена t првог дела једнака је p_1 а другог p_2. Машина је испитивана у току времена t када је дошло до прекида у раду. Наћи вероватноћу да је отказао први део, а да је други исправан.

Решење:

Хипотезе су:
H_0 – Оба дела су исправна.
H_1 – Први део отказао, а други је исправан.
H_2 – Први део је исправан, а други је отказао.
H_3 – Оба дела су отказала.

$$P(H_0) = p_1 p_2$$
$$P(H_1) = (1-p_1)\,p_2$$
$$P(H_2) = p_1(1-p_2)$$
$$P(H_3) = (1-p_1)(1-p_2)$$

Нека A означава догађај да је машина отказала.

$$P(A/H_0) = 0$$
$$P(A/H_1) = P(A/H_2) = P(A/H_3) = 1$$

$$P(A) = p_1 p_2 \cdot 0 + (1-p_1)\,p_2 \cdot 1 + p_1(1-p_2)\cdot 1 + (1-p_1)(1-p_2)\cdot 1$$

Према Бајесовој формули имамо:

$$P(H_1/A) = \frac{(1-p_1)\,p_2}{(1-p_1)\,p_2 + p_1(1-p_2) + (1-p_1)(1-p_2)} = \frac{(1-p_1)\,p_2}{1-p_1 p_2}$$

Задатак 33. Познато је да се у једној од две урне налазе само беле куглице, а да је у другој $\frac{1}{4}$ куглица црне боје. Нека смо на случајан начин изабрали једну урну и из ње извукли једну белу куглицу. Одредити вероватноћу да је куглица узета из урне у којој се налазе и црне куглице. Затим, вратимо ову куглицу у исту урну из које смо је и извукли, па из ње извуцимо опет једну куглицу. Која је вероватноћа да сада ова друга куглица буде црна?

Решење:

Ако означимо са H_1 догађај да је одабрана урна са црним куглицама, са H_2 догађај да је одабрана урна са белим куглицама и са A да је прва извучена куглица бела, следи:

$$P(H_1)=P(H_2)=\frac{1}{2} \qquad P(A/H_1)=\frac{3}{4} \qquad P(A/H_2)=1$$

$$P(A)=P(H_1)P(A/H_1)+P(H_2)P(A/H_2)=\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}+\frac{1}{2}\cdot 1=\frac{7}{8}$$

$$P(H_1/A)=\frac{P(H_1)P(A/H_1)}{P(A)}=\frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}}{\frac{7}{8}}=\frac{3}{7}$$

$$P(H_2/A)=\frac{P(H_2)P(A/H_2)}{P(A)}=\frac{\frac{1}{2}\cdot 1}{\frac{7}{8}}=\frac{4}{7}$$

Нека се догађај B састоји у томе да се при другом извлачењу добије црна куглица, тада је

$$P\big(B/(H_1/A)\big)=\frac{1}{4}$$
$$P\big(B/(H_2/A)\big)=0$$

и

$$P(B/A)=P(H_1/A)P\big(B/(H_1/A)\big)+P(H_2/A)P\big(B/(H_2/A)\big)=$$
$$=\frac{3}{7}\cdot\frac{1}{4}+\frac{4}{7}\cdot 0=\frac{3}{28}$$

<u>Задатак 34.</u> Имамо две коцке различитих типова: коцку I типа која има 2 беле и 4 црне стране, и коцку II типа која има 4 беле и 2 црне стране. Баца се новчић само једанпут: ако падне глава баца се коцка I типа, ако падне писмо баца се коцка II типа. Одредити вероватноћу:

a) да падне бела страна у првом бацању,

b) да падне црна страна у трећем бацању, ако је познато да је у претходна два бацања пала црна страна.

Решење:

Догађај A_i – Пала је црна страна у i-том бацању. $i = 1, 2, 3$
се може се остварити само заједно са једном од хипотеза или узрока:
H_1 – Баца се коцка I типа.
H_2 – Баца се коцка II типа.

Ако претпоставимо да је новчић правилан, вероватноће хипотеза су

$$P(H_1) = P(H_2) = \frac{1}{2}$$

a) Пошто коцка I типа има 4 црне стране, а коцка II типа 2 црне стране, биће

$$P(A_1 / H_1) = \frac{4}{6},\ P(A_1 / H_2) = \frac{2}{6}$$

На основу формуле тоталне вероватноће сада добијамо

$$P(A_1) = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{6} + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{6} = \frac{1}{2}$$

b) Тражимо условну вероватноћу

$$P(A_3 / A_1 \cap A_2) = \frac{P(A_1 \cap A_2 \cap A_3)}{P(A_1 \cap A_2)}.$$

Догађај $A_1 \cap A_2$ може се остварити само заједно са једном од хипотеза H_1, H_2, па се његова вероватноћа може одредити по формули тоталне вероватноће, која сада има облик

$$P(A_1 \cap A_2) = P(H_1)P(A_1 \cap A_2 / H_1) + P(H_2)P(A_1 \cap A_2 / H_2)$$

Јасно је да остварење хипотезе H_1 чини догађаје $A_1\, i\, A_2$ условно независним у односу на H_1, па на основу тога имамо

$$P(A_1 \cap A_2 / H_1) = P(A_1 / H_1)P(A_2 / H_1) = \frac{4}{6} \cdot \frac{4}{6} = \left(\frac{2}{3}\right)^2$$

Из истог разлога имамо

$$P(A_1 \cap A_2 / H_2) = P(A_1 / H_2)P(A_2 / H_2) = \frac{2}{6} \cdot \frac{2}{6} = \left(\frac{1}{3}\right)^2$$

Па заменом добијамо

$$P(A_1 \cap A_2) = \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{5}{18}$$

Догађај $A_1 \cap A_2 \cap A_3$ такође се може остварити само заједно са једним од узрока H_1, H_2, па се и његова вероватноћа слично претходном може израчунати као

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(H_1)P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 / H_1) + P(H_2)P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 / H_2)$$

Догађаји A_1, A_2, A_3 су условно независни у односу на догађаје H_1 *и* H_2, па сада лако добијамо

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 / H_1) = P(A_1 / H_1)P(A_2 / H_1)P(A_3 / H_1) = \left(\frac{2}{3}\right)^3$$

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 / H_2) = P(A_1 / H_2)P(A_2 / H_2)P(A_3 / H_2) = \left(\frac{1}{3}\right)^3$$

Тако прво добијамо да је

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = \frac{1}{6}$$

А затим добијамо и тражену вероватноћу

$$P(A_3 / A_1 \cap A_2) = \frac{3}{5}$$

<u>Задатак 35.</u> Случајна величина (X,Y) дата је густином:

$$f(x,y) = \begin{cases} c(2+xy) & 0 < x < 1, 0 < y < 1 \\ 0 & \textit{ван} \end{cases}$$

a) Одредити константу c,
b) Да ли су X и Y независне случајне променљиве?
c) Одредити очекивање за X под условом да Y узме одређену вредност,
d) Одредити регресиону криву за Y по X.

Решење:

$$f(x,y)=\begin{cases} c(2+xy) & 0<x<1, 0<y<1 \\ 0 & \textit{ван} \end{cases}$$

a) $c = ?$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dxdy = 1$$

$$c\int_0^1\int_0^1 (2+xy)dxdy = 1$$

$$c = \frac{4}{9}$$

b) X и Y су независне случајне променљиве ако је њихов заједнички закон вероватноће једнак производу маргиналних закона вероватноћа, тј. ако је $f(X, y) = f_1(X) \cdot f_2(y)$

$$f_1(x) = \int_0^1 \frac{4}{9}(2+xy)dy = \frac{4}{9}\int_0^1 (2+xy)\,dy = \frac{4}{9}\left(\int_0^1 2dy + \int_0^1 xy\,dy\right) = \frac{4}{9}\cdot\left(2y\Big|_0^1 + x\frac{y^2}{2}\Big|_0^1\right)$$

$$f_1(x) = \frac{2(4+x)}{9}$$

$$f_2(y) = \int_0^1 \frac{4}{9}(2+xy)dx = \frac{4}{9}\int_0^1 (2+xy)\,dx = \frac{4}{9}\left(\int_0^1 2dx + \int_0^1 xy\,dx\right) = \frac{4}{9}\cdot\left(2x\Big|_0^1 + y\frac{x^2}{2}\Big|_0^1\right)$$

$$f_2(y) = \frac{2(4+y)}{9}$$

Да ли важи: $f_1(x)\cdot f_2(y)=\frac{2(4+y)}{9}\cdot\frac{2(4+y)}{9}=\frac{4\cdot(16+4y+4x+xy)}{81}$

$$\frac{4}{9}(2+xy)\neq\frac{4(16+4y+4x+xy)}{81}$$

Пошто није задовољен услов да је f (X, y) = f_1 (X) $\cdot$ f_2 (y), следи закључак да X и Y нису независне случајне променљиве

c) $E(X/Y=y)=?$

Условни закон вероватноће променљиве X под условом да Y узме одређену вредност је:

$$f(X/Y)=\frac{f(x,y)}{f_2(y)}=\frac{\frac{4}{9}(2+xy)}{\frac{2}{9}(4+y)}=\frac{2(2+xy)}{4+y}$$

Очекивање за X, под условом да Y узме одређену вредност:

$$E(X/Y=y)=\int_{-\infty}^{\infty}x\cdot f(x/y)dx$$

$$E(X/Y=y)=\int_0^1\left(x\cdot\frac{2(2+xy)}{(4+y)}\right)dx=\frac{1}{4+y}\int_0^1(4x+2x^2y)dx$$

$$E(X/Y=y)=\frac{1}{4+y}\left(\int_0^1 4xdx+\int_0^1 2x^2y\,dx\right)=\frac{1}{4+y}\left(4\cdot\frac{x^2}{2}\Big|_0^1+2y\cdot\frac{x^3}{3}\Big|_0^1\right)$$

$$E(X/Y=y)=\frac{1}{4+y}\left(4\cdot\frac{1}{2}+2y\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{4+y}\left(2+\frac{2y}{3}\right)=\frac{1}{4+y}\left(\frac{6+2y}{3}\right)$$

$$E(X/Y=y)=\frac{6+2y}{3(4+y)}$$

d) Одредити регресиону криву за Y по X

$$E(Y/X)=?$$

Регресиона крива Y по X, рачуна се по формули:

$$E(Y/X)=\int_{-\infty}^{\infty} yf(y/x)dy$$

где је условни закон вероватноће:

$$f(y/x)=\frac{f(x,y)}{f_1(x)}$$

$$f(y/x)=\frac{f(xy)}{f_1(x)}=\frac{\frac{4}{9}(2+xy)}{\frac{2}{9}(4+x)}=\frac{2(2+xy)}{4+x}$$

$$E(Y/X)=\int_0^1 y\cdot\frac{2(2+xy)}{4+x}dy=\int_0^1 y\cdot\frac{4+2xy}{4+2x}dy=\frac{1}{4+x}\cdot\int_0^1\left(4y+2xy^2\right)dy$$

$$E(Y/X)=\frac{1}{4+x}\left(\int_0^1 4ydy+\int_0^1 2xy^2dy\right)=\frac{1}{4+x}\left(4\frac{y^2}{2}\Big|_0^1+2x\frac{y^3}{3}\Big|_0^1\right)=$$

$$E(Y/X)=\frac{1}{4+x}\left(4\frac{1}{2}+2x\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{4+x}\left(2+\frac{2x}{3}\right)=\frac{6+2x}{3(4+x)}$$

$$E(Y/X)=\frac{6+2x}{3(4+x)}$$

<u>Задатак 36.</u> Једна фабрика производи 4 типа истог производа, при чему, зависно од типа, неисправних производа има: 5%, 5%, 8%, 10%. У једној самопослузи 4 типа овог производа изложена су у 4 различите преграде, при чему се типови производа не могу разликовати. Из случајно одабране преграде узима се узастопно са враћањем узорак од 10 производа. Ако је констатовано да узорак садржи 2 неисправна производа, одредити вероватноћу да је узет из типа производа са:

a) 5%,
b) 8%,
c) 10%.

Решење:

Догађај A – Узорак садржи 2 неисправна производа.

може се остварити само заједно са једном од хипотеза, тј. само под дејством једног од узрока:

H_1 – Тип производа који садржи 5% неисправних производа.
H_2 – Тип производа који садржи 8% неисправних производа.
H_3 – Тип производа који садржи 10% неисправних производа.

Пошто се случајно бира преграда, случајно се бира тип производа, па су вероватноће хипотеза:

$$P(H_1)=\frac{2}{4} \qquad P(H_2)=\frac{1}{4} \qquad P(H_3)=\frac{1}{4}$$

Условну вероватноћу да узорак садржи 2 неисправна производа, ако је познато да је узет из типа производа са p_i процената неисправних производа, добијамо на основу закона вероватноће случајне променљиве која има биномну расподелу, па је

$$P(A/H_i)=\binom{10}{2}p_i^{\,2}(1-p_i)^8,\ i=1,2,3,$$

где је, зависно од усвојене хипотезе, $p_1=0.05;\ p_2=0.08;\ p_3=0.10;$

Тако добијамо

$$P(A/H_1)=\binom{10}{2}(0.05)^2(0.95)^8=0.0746,$$

$$P(A/H_2)=\binom{10}{2}(0.08)^2(0.92)^8=0.1478,$$

$$P(A/H_3)=\binom{10}{2}(0.10)^2(0.90)^8=0.1937,$$

Вероватноћу да је узорак са 2 неисправна производа узет од производа првог типа, добијамо на основу Бајесове формуле, па је сада

a)

$$P(H_1/A)=\frac{P(H_1)P(A/H_1)}{P(H_1)P(A/H_1)+P(H_2)P(A/H_2)+P(H_3)P(A/H_3)}\approx 0.304$$

b)

$$P(H_2/A)=\frac{P(H_2)P(A/H_2)}{P(H_1)P(A/H_1)+P(H_2)P(A/H_2)+P(H_3)P(A/H_3)}\approx 0.301$$

c)

$$P(H_3/A)=\frac{P(H_3)P(A/H_3)}{P(H_1)P(A/H_1)+P(H_2)P(A/H_2)+P(H_3)P(A/H_3)}\approx 0.395$$

<u>**Задатак 37.**</u> Случајна величина (X,Y) дата је функцијом густине:

$$f(x,y)=\begin{cases} a\left(x^2+4xy\right) & 0<x<1, 0<y<1 \\ 0 & van \end{cases}$$

a) Одредити константу a,
b) Одредити маргиналне густине за X и Y,
c) Условни закон вероватноће за X под условом да Y узме одређену вредност,
d) Регресиону криву за Y по X.

Решење:

a)

$$f(x,y)=\begin{cases} a\left(x^2+4xy\right) & 0<x<1, 0<y<1 \\ 0 & van \end{cases}$$

$$a=?\rightarrow \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f\left(x,y\right)dx,dy=1 \qquad \Rightarrow \qquad a=\frac{3}{4}$$

Функција густине је:

$$f(x,y)=\begin{cases} \frac{3}{4}\left(x^2+4xy\right) & 0<x<1, 0<y<1 \\ 0 & van \end{cases}$$

b) Маргинални закон вероватноћа непрекидне случајне променљиве X је функција:

$$f_1(x)=\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dy=\int\limits_{0}^{1}\frac{3}{4}\left(x^2+4xy\right)dy=\frac{3}{4}\left[x^2\cdot y\Big|_0^1+4x\cdot\frac{y^2}{2}\Big|_0^1\right]=\frac{3}{4}\left(x^2+2x\right)$$

Маргинални закон вероватноћа непрекидне случајне променљиве Y је функција:

$$f_2(y)=\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dx=\int\limits_{0}^{1}\frac{3}{4}\left(x^2+4xy\right)dx=\frac{3}{4}\left[\frac{x^3}{3}\cdot\Big|_0^1+4y\cdot\frac{x^2}{2}\Big|_0^1\right]=\frac{3}{4}\left(2y+\frac{1}{3}\right)$$

c) Условни закон вероватноћа за X, под условом да Y узме једну одређену вредност, дат је функцијом:

$$f(x/y)=\frac{f(x,y)}{f_2(y)}=\frac{\frac{3}{4}(x^2+4xy)}{\frac{3}{4}(2y+\frac{1}{3})}=\frac{x^2+4xy}{2y+\frac{1}{3}}$$

d) Регресиона крива *Y* по *X*, израчунава се по формули:

$$E(Y/X)=\int_{-\infty}^{\infty} y\cdot f(y/x)dy=\int_{-\infty}^{\infty} y\cdot\frac{f(x,y)}{f_1(x)}dy$$

$$f(y/x)=\frac{f(x,y)}{f_1(x)}=\frac{\frac{3}{4}(x^2+4xy)}{\frac{3}{4}(x^2+2x)}=\frac{x(4+4y)}{x(x+2)}=\frac{x+4y}{x+2}$$

Регресиона крива за случајну променљиву *Y* у односу на *X* :

$$E(Y/X)=\int_0^1 y\cdot\frac{x+4y}{x+2}dy=\frac{1}{x+2}\left[x\cdot\frac{y^2}{2}\Big|_0^1+4\cdot\frac{y^3}{3}\Big|_0^1\right]=\frac{3x+8}{6x+12}$$

Задатак 38. Један студент је проценио да ће положити: математику са вероватноћом 0.6; статистику са вероватноћом 0.8; програмирање са вероватноћом 0.9; математику и статистику са вероватноћом 0.48; математику и програмирање са вероватноћом 0.54; статистику и програмирање са вероватноћом 0.72; математику, статистику и програмирање са вероватноћом 0.432. Одредити вероватноћу да студент положи:

a) Само математику,

b) Само математику и статистику,

c) Програмирање или статистику, а да не положи математику,

d) Најмање један од ових предмета,
e) Само два од ових предмета,
f) Највише два од ових предмета.

Решење:

Означимо догађаје:
A_1 – Студент је положио математику.
A_2 – Студент је положио статистику.
A_3 – Студент је положио програмирање.

Дате су следеће вероватноће:

$$P(A_1)=0.6 \qquad P(A_1\cap A_2)=0.48 \qquad P(A_1\cap A_2\cap A_3)=0.432$$
$$P(A_2)=0.8 \qquad P(A_1\cap A_3)=0.54$$
$$P(A_3)=0.9 \qquad P(A_2\cap A_3)=0.72$$

a) $P(A_1\cap A_2^C\cap A_3^C)=0.6-0.48-0.54+0.432=0.012$

b) $P(A_1\cap A_2\cap A_3^C)=0.48-0.432=0.048$

c) $P((A_2\cup A_3)\cap A_1^C)=0.8+0.9-0.72-0.48-0.54+0.432=0.392$

d) $P(A_1\cup A_2\cup A_3)=0.6+0.8+0.9-0.48-0.54-0.72+0.432=0.992$

e) $P(A_1\cap A_2\cap A_3^C+A_1\cap A_2^C\cap A_3+A_1^C\cap A_2\cap A_3)=$
$=0.48+0.54+0.72-3\cdot 0.432=0.444$

f) $P((A_1\cap A_2\cap A_3)^C)=1-P(A_1\cap A_2\cap A_3)=1-0.432=0.568$

Задатак 39. Урна садржи три новчића за које знамо да су вероватноће појављивања грба 0.45, 0.5 и 0.75 респективно. Из урне се на случајан начин извлачи један новчић и баца се 10 пута. Ако је приликом бацања 4 пута пао грб, наћи вероватноћу да је извучен исправан новчић.

Решење:

Дефинисаћемо догађаје:
H_i –Изабран је i-ти новчић. i=1,2,3
A – Од 10 бацања, 4 пута је пао грб.

$$P(H_i) = \frac{1}{3}$$

$$P(A/H_1) = \binom{10}{4} 0.45^4 \cdot 0.55^6 = 0.2383$$

$$P(A/H_2) = \binom{10}{4} 0.5^4 \cdot 0.6^6 = 0.2051$$

$$P(A/H_3) = \binom{10}{4} 0.75^4 \cdot 0.25^6 = 0.0162$$

$$P(A) = \sum_{i=1}^{3} P(H_i)P(A/H_i) = 0.1532$$

Тражена вероватноћа је вероватноћа догађаја да је изабран други новчић, а она се добија преко Бајесове формуле.

$$P(H_2/A)=\frac{P(H_2)P(A/H_2)}{P(A)}=\frac{\frac{1}{3}\cdot 0.2051}{0.1532}=0.4461$$

Задатак 40. Дата је случајна променљива $X{:}N(16,4)$. Пронаћи симетричан интервал око тачке m=16 у коме случајна променљива X узима вредности са вероватноћом:

a) 0.95,

b) 0.99.

Решење:

Случајна променљива X има Нормалну расподелу: $X{:}N(16,4)$, тј. m=16, $\sigma^2=4$

Вероватноћа да се случајна променљива X нађе у околини тачке m=16 дата је у следећем изразу:

$$P\left(16-a<X<16+a\right)=p$$
$$P\left(\frac{16-a-16}{2}<X^*<\frac{16+a-16}{2}\right)=p$$
$$P\left(-\frac{a}{2}<X^*<\frac{a}{2}\right)=p$$

Заменом одговарајућих вероватноћа са p добићемо:

a)

$$2\phi\left(\frac{a}{2}\right)-1=0.95$$

$$\phi\left(\frac{a}{2}\right)=0.975$$

$$\frac{a}{2}=1.95 \qquad \Rightarrow \qquad a=3.92$$

Интервал у околини 16 је: $\left[12.08\ ;\ 18.92\right]$

b)

$$2\phi\left(\frac{a}{2}\right)-1=0.99$$

$$\phi\left(\frac{a}{2}\right)=0.995$$

$$\frac{a}{2}=2.57$$

$$a=5.14$$

$$\left[10.86\ ;\ 21.14\right]$$

<u>Задатак 41.</u> Случајна промењљива X дата је функцијом густине

$$f\left(x\right)=\begin{cases} ae^{x} & -\infty < X \le 0 \\ a & 0 < X \le 1 \\ a\left(2-x\right) & 1 < X \le 2 \\ 0 & X > 2 \end{cases}$$

a) Одредити непознату константу a,
b) Одредити функцију расподеле F(X),
c) Одредити P(X>0) и P(X<a).

Решење:

a)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$$

$$\int_{-\infty}^{0} ae^{x}dx + \int_{0}^{1} adx + \int_{1}^{2} 2adx - \int_{1}^{2} axdx = \frac{5}{2}a = 1 \qquad \Rightarrow \qquad a = \frac{2}{5}$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2}{5}e^{x} & -\infty < X \le 0 \\ \frac{2}{5} & 0 < X \le 1 \\ \frac{2}{5}(2-x) & 1 < X \le 2 \\ 0 & X > 2 \end{cases}$$

b)

$$F_1(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{2}{5}e^{x}dx = \frac{2}{5}e^{x}$$

$$F_2(x) = \int_{-\infty}^{0} \frac{2}{5}e^{x}dx + \int_{0}^{x} \frac{2}{5}dx = \frac{2}{5} + \frac{2}{5}x$$

$$F_3(x) = \int_{-\infty}^{0} \frac{2}{5}e^{x}dx + \int_{0}^{1} \frac{2}{5}dx + \int_{1}^{x} \frac{4}{5}dx - \int_{1}^{x} \frac{2}{5}xdx = -\frac{x^{2}}{5} + \frac{4}{5}x + \frac{1}{5}$$

$$F(x)=\begin{cases} \dfrac{2}{5}e^{x} & -\infty < X \le 0 \\ \dfrac{2}{5}+\dfrac{2}{5}x & 0 < X \le 1 \\ -\dfrac{x^2}{5}+\dfrac{4}{5}x+\dfrac{1}{5} & 1 < X \le 2 \\ 1 & X > 2 \end{cases}$$

c)

$$P\left(X<\frac{2}{5}\right)=F\left(\frac{2}{5}\right)=\frac{2}{5}+\frac{2}{5}\cdot\frac{2}{5}=0.56$$

$$P(X<0)=F(0)=\frac{2}{5}e^{0}=\frac{2}{5}=0.4$$

<u>Задатак 42.</u> Случајна променљива *X* има *N*(5, 25). Нека је:

$$Y=\begin{cases} 1 & X \le a \\ 0 & X > a \end{cases}$$

Наћи *a* тако да је E(*Y*)=0.8.

Решење:

$$Y=\begin{cases} 1 & X \le a & p \\ 0 & X > a & q \end{cases}$$

$$E(Y)=0.8=1\cdot p+0\cdot q \qquad \Rightarrow \qquad p=0.8$$

$$P(X\le a)=0.8=P\left(\frac{X-5}{5}\le\frac{a-5}{5}\right)=P\left(X^{*}\le\frac{a-5}{5}\right)$$

$$\phi\left(\frac{a-5}{5}\right)=0.8$$

$$\frac{a-5}{5}=0.84 \qquad \Rightarrow \qquad a=9.2$$

<u>Задатак 43.</u> У кутији је b белих и c црних куглица. Извлаче се једна по једна куглица, без враћања. Колика је вероватноћа да је прва извучена куглица била бела, ако знамо да је друга извучена куглица била црна?

Решење:

Дефинисаћемо догађаје:
B_1 – Изабрана бела куглица у првом извлачењу.
C_1 – Изабрана црна куглица у првом извлачењу.
B_2 – Изабрана бела куглица у другом извлачењу.
C_2 – Изабрана црна куглица у другом извлачењу.

Прво се тражи вероватноћа да је друга извучена куглица црна, коју ћемо пронаћи коришћењем формуле тоталне вероватноће. Тражена вероватноћа да је прва извучена куглица била бела, ако знамо да је друга извучена куглица била црна се добија преко Бајесове формуле.

$$P(C_2)=P(B_1)P(C_2/B_1)+P(C_1)P(C_2/C_1)=\frac{b}{b+c}\cdot\frac{c}{b+c-1}+\frac{c}{b+c}\cdot\frac{c-1}{b+c-1}$$

$$P(B_1/C_2)=\frac{P(B_1)P(C_2/B_1)}{P(C_2)}=\frac{\frac{b}{b+c}\cdot\frac{c}{b+c-1}}{\frac{b}{b+c}\cdot\frac{c}{b+c-1}+\frac{c}{b+c}\cdot\frac{c-1}{b+c-1}}=$$

$$= \frac{bc}{bc + c\left(c-1\right)} = \frac{b}{b+c-1}$$

<u>Задатак 44.</u> Приликом преноса речи, вероватноћа да дође до грешке је 0.01.

a) Одредити вероватноћу да приликом преноса 300 речи буду погрешно пренете највише две,

b) Колико се највише речи може пренети да би вероватноћа да се није појавила ни једна грешка била већа од 0.6?

Решење:

n = 300
A – Једна реч је погрешно пренета.
$p = p(A) = 0.01$
$q = p(\overline{A}) = 0.99$

a) Тражи се вероватноћа да не буду погрешно пренете више од две речи, а то обухвата да буду погрешно пренете две или мање, тј. 0, 1 или 2.

P{X=k} = P{ „Од n речи k је погрешно пренето“ }

Закључујемо да променљива има Биномну расподелу $X : B(n;p)$

$$p(0 \le x \le 2) = p(x=0) + p(x=1) + p(x=2)$$

$$P(k) = P(X = k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot q^{n-k}$$

$$P(X=0)=\binom{300}{0}\cdot 0.01^0\cdot 0.99^{300}$$
$$P(X=1)=\binom{300}{1}\cdot 0.01^1\cdot 0.99^{299}$$
$$P(X=2)=\binom{300}{2}\cdot 0.01^2\cdot 0.99^{298}$$

Ради лакшег рачуна, а пошто је $\lambda=n\cdot p=300\cdot 0.01=3$, вршимо апроксимацију Пуасоновом расподелом:

$$P\{x\le m\}\approx\sum_{k=0}^{m}e^{-\lambda}\cdot\frac{\lambda^k}{k!}$$
$$P\{X\le 2\}\underset{P(3)}{\overset{таб}{\Rightarrow}}0.42319$$

b)

$$P\{P(0)>0.6\}=?$$
$$P(0)=\binom{n}{0}\cdot 0.01^0\cdot 0.99^n>0.6$$

$$0.99^n>0,6\quad\Big|\log$$
$$n\log 0.99<\log 0.6$$
$$n<\frac{\log 0.6}{\log 0.99}$$
$$n<\frac{-0.221848}{-0.004364}$$
$$n<50.83$$

Може се пренети највише 50 речи.

Задатак 45. Према евиденцији о потражњи резервних делова за један тип аутомобила установљено је да се део D_1 замењује у 36% случајева, део D_2 у 42% случајева, а оба та дела у 30% случајева.

a) Може ли, на основу ових података, да се изведе закључак о зависности замене делова D_1 и D_2, код једног аутомобила?

b) Наћи вероватноћу да приликом сервиса мотора, део D_2 буде замењен, ако је део D_1 замењен.

Решење:

a) Најпре дефинишимо догађаје D_1 и D_2:
D_1 – Део D_1 је замењен.
D_2 – Део D_2 је замењен.

$P(D_1) = 0.36$ $\qquad$ $P(D_2) = 0.42$ $\qquad$ $P(D_1D_2) = 0.30$

Ако важи следећа једнакост: $P(D_1)\cdot P(D_2) = P(D_1D_2)$ можемо претпоставити да замене делова D_1 и D_2 не зависе један од другог. Како је $0.36 \cdot 0,42 \neq 0.30$ из тога следи да догађаји D_1 і D_2 нису независни.

b)

$$P(D_2 / D_1) = \frac{P(D_1D_2)}{P(D_1)} = \frac{0.30}{0.36} = 0.83333$$

6. ЗАДАЦИ ЗА ВЕЖБУ

Задатак 1. У кутији се налази 6 белих и 4 црне куглице. Извлаче се три куглице без враћања. Колика је вероватноћа да су све три исте боје?

Задатак 2. Нека је $P(A)$=0.59, $P(B)$=0.29 и $P(AB)$=0.19. Одредити $P(A\text{-}B)$, $P(\overline{A}\,\overline{B})$, $P(\overline{AB})$.

Задатак 3. Прва кутија садржи 2 беле и 3 црне, а друга 4 беле и 1 црну куглицу. На случајан начин бирамо кутију и из ње извлачимо једну куглицу. Пронаћи вероватноћу да је извучена куглица црна.

Задатак 4. Вероватноћа да ће студент положити први део испита износи 0.55, а вероватноћа да неће положити други део испита ако је положио први део износи 0.2. Студент је положио испит ако положи оба дела. Пронаћи вероватноћу да ће студент положити овај испит?

Задатак 5. Баца се правилна хомогена коцка. Ако се на коцки појави 1 или 6 тачака узима се куглица из прве кутије, у супротном се узима куглица из друге кутије. Прва кутија садржи 8 белих и 3 црне куглице, а друга 5 белих и 4 црне куглице. Колика је вероватноћа да извучена куглица буде бела ?

Задатак 6. На случајан начин формира се низ дужине 10, који се састоји од нула и јединица. Одредити вероватноћу да у датом низу има тачно 7 јединица.

Задатак 7. Кутија В садржи три црвене и две беле лоптице, а кутија В садржи две црвене и две беле лоптице. Баца се коцкица. Ако се добије 1 или 2, извлачи се једна лоптица из кутије А и пребацује у кутију В, па се онда извлачи једна лоптица из кутије В. Ако се добије 3, 4, 5 или 6, извлачи се једна лоптица из кутије В и пребацује у кутију А, па се онда извлачи једна лоптица из кутије А. Колике су вероватноће

a) да је друга извучена лоптица бела?

b) да су обе извучене лоптице црвене?

Задатак 8. У првој кутији се налази 20 белих и 80 црних куглица, у другој кутији 40 белих и 60 црних куглица, а у трећој кутији по 50 белих и црних куглица. На случајан начин се бира једна кутија и из ње извлачи једна куглица. Наћи вероватноћу да је извучена куглица бела.

Задатак 9. У кутији се налази 7 белих и 3 црне куглице. Извлаче се три куглице без враћања. Колика је вероватноћа да су све три исте боје?

Задатак 10. Прва кутија садржи 4 беле и 2 црне, а друга 3 беле и 1 црну куглицу. На случајан начин бирамо кутију и из ње извлачимо једну куглицу. Наћи вероватноћу да је извучена куглица црна?

Задатак 11. Нека су A и B независни догађаји. Ако је $P(A-B)=\frac{3}{7}$ и $P(AB)=\frac{1}{8}$, одредити $P(B)$.

Задатак 12. Експеримент се састоји у бацању два динара. Уочимо догађаје: A – појава грба на првом динару, B – појава макар једног писма, C – појава грба на другом динару. Одредити да ли су зависни или независни парови догађаја:

a) A и B,

b) A и C.

Задатак 13. Познато је да се у продукцији извесног производа налази 5% шкарта и да се међу производима, који задовољавају одређени стандард, налази 80% производа I класе. Наћи вероватноћу да случајно одабрани производ који није шкарт, буде прве класе.

Задатак 14. Нека су x и y два случајно изабрана броја из интервала [-1,1]. Наћи вероватноћу да је $y > 4x^2$.

Задатак 15. У једном пакету је a касета са озбиљном музиком и b касета са забавном музиком, а у другом пакету је c касета са озбиљном музиком и d касета са забавном музиком. На случајан начин се из сваког пакета бира по једна касета и узајамно им се замене места. Затим се из првог пакета бира једна касета. Колика је вероватноћа да је изабрана касета са озбиљном музиком?

Задатак 16. Одредити вероватноћу да једначина $x^2 + bx + c = 0$ има реалне корене, ако параметри b и c случајно узимају вредности из интервала [-1,1].

Задатак 17. Један машински елемент се производи у три серије од по 20 комада. У првој серији је 15, у другој 18 и трећој 16 исправних комада. На случајан начин се бира серија из ње један елемент. Показало се да је он исправан. Затим се извучени елемент враћа у серију из које је извучен и из те серије се поново на случајан начин бира један елемент. Колика је вероватноћа да је он исправан?

Задатак 18. Вероватноћа да ће стрелац погодити мету када је ветровито је 0.4; када није ветровито, његова вероватноћа погађања мете је 0.7. Код сваког гађања, вероватноћа изненадног удара ветра је 0.3. Пронађите вероватноћу да:

a) За дато гађање, дође до удара ветра и он погоди мету,

b) Он погоди мету у првом гађању,

c) Он погоди мету тачно једном у два гађања,

d) Није било налета ветра у случају када је промашио.

Задатак 19. Играмо карте са непознатим противником. Игра се тако што се извлаче карте из комплета од 32 карте и при том противник увек први извлачи карту. Вероватноћа да нам је противник варалица износи 0.1 и ако је варалица, вероватноћа да извуче кеца је 0.25.

a) Ако је противник у првој партији извукао кеца (најјачу карту) одредити вероватноћу да је варалица,

b) Ако је противник и у другој партији извукао кеца, одредити вероватноћу да је варалица.

Задатак 20. Производи једне велике серије, која садржи 0.7% шкарта, пакују се у кутије од по 100 комада. Колики ће проценат кутија бити без иједног шкарта?

Задатак 21. Густина случајне променљиве X дата је са:

$$f(x)=\begin{cases} Cx^2, & x\in(0,1) \\ 0, & x\notin(0,1) \end{cases}$$

Наћи константу C и одредити модус и медијану.

<u>Задатак 22.</u> Случајна променљива *X* дата је функцијом густине:

$$f(x)=\begin{cases} cx+\dfrac{1}{3} & -1\le x\le 0 \\ -cx+1 & 0<x\le 1 \\ 0 & x<-1, x>1 \end{cases}$$

Одредити:

a) Константу *c* и скицирати график функције густине,

b) Функцију расподеле F(x) и скицирати њен график,

c) E(2*X*+3), $\sigma^2(3X+5)$,

d) P(*X*<0),

e) Модус и медијану.

<u>Задатак 23.</u> Из кутије у којој је 10 куглица и које су нумерисане од 1 до 10, одједном се извлаче три куглице. Ако случајна променљива *X* представља најмањи број на извученим куглицама, одредити:

a) Закон вероватноћа случајне променљиве *X*,

b) Очекивање и дисперзију за *X*,

c) $P(X\le E(X))$,

d) Вероватноћу да број на бар једној извученој куглици не буде мањи од 6.

<u>Задатак 24.</u>

a) Дата је случајна променљива *X*:*N*(20,4). Одредити $P(|X-20|<3)$,

b) Одредити t тако да је $P(T\ge t)=0.688$, ако је T случајна променљива која има стандардизовану нормалну расподелу,

c) Ако је дата функција густине:

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}x+\frac{1}{2} & -1\le x\le 0\\ -\frac{1}{2}x+1 & 0<x\le 1\\ 0 & x<-1, x>1\end{cases}$$

одредити медијану.

<u>Задатак 25.</u> Десет куглица нумерисано је бројевима од 1 до 10. На случајан начин бира се једна по једна куглица (са враћањем), све док се не извуче куглица са бројем 2, или док се не изврши 5 извлачења. Нека случајна променљива X представља број извлачења.

a) Одредити закон вероватноћа случајне променљиве X,

b) Одредити очекивање и дисперзију за X,

c) Нека је $Y=3X+1$. Одредити очекивање и дисперзију за Y,

d) Одредити $P(Y\le E(Y))$.

<u>Задатак 26.</u> Правилан новчић се баца 7 пута. Наћи математичко очекивање и дисперзију броја појављивања грбова.

<u>Задатак 27.</u> Из кутије у којој се налазе две беле и три црне куглице, извлаче се две куглице одједном. Наћи математичко очекивање и дисперзију броја белих куглица.

<u>Задатак 28.</u>

a) Дата је случајна променљива $X:N(12,49)$. Одредити $P(|X-12|<6)$,

b) Одредити т тако да је $P(T\ge t)=0.536$, ако је T случајна променљива која има стандардизовану нормалну расподелу,

c) Ако је дата функција густине

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{4}e^{x} & -\infty < x \le 0\\ -\frac{2}{3}x+1 & 0<x\le \frac{3}{2}\\ 0 & x>\frac{3}{2}\end{cases}$$

одредити медијану.

Задатак 29. Нека је густина случајне променљиве X дата са

$$f(x)=\begin{cases}C(x+1), & 2<x<4\\ 0, & \text{ван}\end{cases}$$

Наћи константу C и $P(X<3.2)$.

Задатак 30. Нека случајна променљива X има униформну расподелу $X:U(0,a)$. Ако је $P(X<1.5)=\frac{3}{4}$, пронаћи a.

Задатак 31. Из серије од 100 производа, од којих су 10 шкарт, изабран је на случајан начин узорак од пет производа. Ако са X означимо случајну променљиву која представља број производа у узорку који су шкарт, одредити математичко очекивање за X.

Задатак 32. Дводимензионална случајна променљива (X,Y) дата је законом вероватноћа:

$$f(x,y)=\begin{cases}q & x\ge 0,\quad y\ge 0,\quad x^2+y^2\le 4\\ 0 & \textit{ван}\end{cases}$$

Одредити:
a) Константу q,
b) Маргиналне густине расподела за X и Y,
c) $E(X)$ и $E(Y)$.

Задатак 33. У кутији се налази по једна бела и једна црна куглица. Извлачи се једна по једна куглица. Ако је извучена куглица бела, она се враћа у кутију и додају се још две беле куглице, а затим се извлачење понавља. Извлачење се прекида ако се извуче црна куглица или најдуже после шестог извлачења. Нека је X случајна променљива која представља број извлачења. Одредити:
a) Закон расподеле случајне променљиве X,
b) Математичко очекивање и дисперзију за X,
c) $E(3X+6)$ и $\sigma^2(3X-7)$,
d) Вероватноћу $P(X \le E(X))$.

Задатак 34. Дате су две независне случајне величине X и Y које имају нормалну расподелу: X има $N(2,4)$, а Y има $N(-3,16)$. Одредити:
a) $P(|X-3|<1)$,
b) $E(3X+2Y)$,
c) $\sigma^2(3X-4Y)$,
d) $P(2X-Y<4)$.

Задатак 35. За сваку од пет куглица у кутији подједнако је вероватно да ли је бела или црна. Из кутије се, на случајан начин, извлаче две куглице без враћања. Ако су обе куглице беле, одредити вероватноћу да су се у кутији налазиле три беле и две црне куглице.

<u>Задатак 36.</u> Случајна променљива *X* дата је функцијом расподеле на следећи начин:

$$F(x)=\begin{cases} 0 & x<-1 \\ \dfrac{x^2}{4}+\dfrac{mx}{2}+\dfrac{1}{4}, & -1\le x\le 0 \\ \dfrac{1}{4}+mx-\dfrac{x^2}{4}, & 0<x\le 1 \\ 1 & x>1 \end{cases}$$

Одредити:

a) Непознату константу *m*,

b) Функцију густине и нацртати њен график,

c) $E(4X+3)$ и $\sigma^2(-2X+5)$,

d) Вероватноћу $P\left(X>\dfrac{m}{2}\right)$.

<u>Задатак 37.</u> Из кутије која садржи 30 артикала, од којих су 4 дефектна, узима се узорак од 3 артикла. Нека је *X* број дефектних артикала у узорку. Одредити средњу вредност и стандардну девијацију за *X*:

a) за случај избора без враћања,

b) за случај избора са враћањем.

<u>Задатак 38.</u> Наћи регресиону криву *Y* по *X* ако је заједничка густина дата са

$$f(x,y)=\begin{cases} cxy & 0<y<x<1 \\ 0 & \text{ван} \end{cases}$$

<u>Задатак 39.</u> У једној кутији се налази 5 белих и 7 црвених куглица, а у другој 3 беле и 4 црвене куглице. На случајан начин се из прве у другу кутију пребацују 3 куглице. Затим се из друге кутије извлачи једна куглица.

a) Одредити вероватноћу да је извучена куглица беле боје,

b) Ако је извучена куглица беле боје, одредити вероватноћу да су из прве у другу кутију пребачене једна бела и две црвене куглице.

ЛИТЕРАТУРА

1. Вуковић, Н., Делић, М., Вукмировић, Д., Радојичић, З.; "Решени задаци из вероватноће и статистике"; Збирка задатака; Факултет организационих наука; Београд, 2003.

2. Вуковић, Н.; "Основе вероватноће"; Факултет организационих наука, Београд, 2006.

3. Малишић, Ј; "Збирка задатака из теорије вероватноће са применама"; Грађевинска књига, Београд, 1990.

4. Малишић, Ј., Јевремовић, В.; "Статистичка анализа и случајни процеси", Научна књига, Београд, 1991.

5. Меркле, М.; "Вероватноћа и статистика за инжењере и студенте технике"; Академска мисао, Београд, 2002.

6. Жижић, М., Ловрић, М., Павличић, Д.; "Методи статистичке анализе"; Економски факултет, Београд,2000.

7. Милошевић, В.; "Теорија вероватноће I – Вероватноћа случајног догађаја"; Завод за уџбенике и наставна средства, Београд, 1998.

8. Вукадиновић, С., Поповић, Ј.; "Збирка решених задатака из математичке статистике"; Саобраћајни факултет Универзитета у Београду, Београд, 1998.

9. Salvatore, D., Reagle, D.; “Statistics and Econometrics” 2nd edition; Shaum’s Outline Series; McGraw-Hill; New York, 2001.

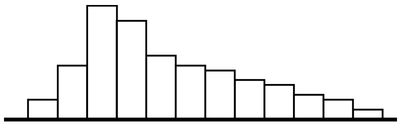
10. Montgomery, D., Runger, G, “Applied statistics and probability for engineers”, 2nd edition, John Wiley & Sons, Inc, New York, 1999.

11. Anthony D., Hicks C., *Understanding Advanced Statistics*, Churchill Livingstone, London,1999.

ПРИЛОГ

Табела А-1. POISSON-ОВА РАСПОДЕЛА – ЗАКОН ВЕРОВАТНОЋА

Вредности $P_k(\lambda) = \dfrac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$



λ / k	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6
0	0.904837	0.818731	0.740818	0.670320	0.606531	0.548812
1	0.090484	0.163746	0.222245	0.268128	0.303265	0.329287
2	0.004524	0.016375	0.033337	0.053626	0.075816	0.098786
3	0.000151	0.001091	0.003334	0.007150	0.012636	0.019757
4	0.000004	0.000055	0.000250	0.000715	0.001580	0.002964
5		0.000002	0.000015	0.000057	0.000158	0.000356
6			0.000001	0.000004	0.000013	0.000035
7					0.000001	0.000003

λ / k	0.7	0.8	0.9	1.0	2.0	3.0
0	0.496585	0.449329	0.406570	0.367879	0.135335	0.049787
1	0.347610	0.359463	0.365913	0.367879	0.270671	0.149361
2	0.121663	0.143785	0.164661	0.183940	0.270671	0.224042
3	0.028388	0.038343	0.049398	0.061313	0.180447	0.224042
4	0.004968	0.007669	0.011115	0.015328	0.090224	0.168031
5	0.000695	0.001227	0.002001	0.003066	0.036089	0.100819
6	0.000081	0.000164	0.000300	0.000511	0.012030	0.050409
7	0.000008	0.000019	0.000039	0.000073	0.003437	0.021604
8		0.000002	0.000004	0.000009	0.000859	0.008101
9				0.000001	0.000191	0.002701
10					0.000038	0.000810
11					0.000007	0.000221
12					0.000001	0.000055
13						0.000013
14						0.000003
15						0.000001

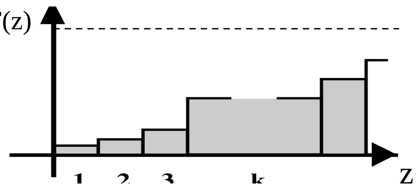
Табела А-1. **POISSON**-ОВА РАСПОДЕЛА – ЗАКОН ВЕРОВАТНОЋА (наставак)

λ / k	4.0	5.0	6.0	7.0	8.0	9.0
0	0.018316	0.006738	0.002479	0.000912	0.000335	0.000123
1	0.073263	0.033690	0.014873	0.006383	0.002684	0.001111
2	0.146525	0.084224	0.044618	0.022341	0.010735	0.004998
3	0.195367	0.140374	0.089235	0.052129	0.028626	0.014994
4	0.195367	0.175467	0.133853	0.091226	0.057252	0.033737
5	0.156293	0.165467	0.160623	0.127717	0.091604	0.060727
6	0.104194	0.146223	0.160623	0.149003	0.122138	0.091090
7	0.059540	0.104445	0.137677	0.149003	0.139587	0.117116
8	0.029770	0.065278	0.103258	0.130377	0.139587	0.131756
9	0.013231	0.036266	0.068838	0.101405	0.124077	0.131756
10	0.005292	0.018133	0.041303	0.070983	0.099262	0.118580
11	0.001925	0.008242	0.022529	0.045171	0.072190	0.097020
12	0.000642	0.003434	0.011262	0.026350	0.048127	0.072765
13	0.000197	0.001321	0.005199	0.014188	0.029616	0.050374
14	0.000056	0.000472	0.002228	0.007094	0.016924	0.032384
15	0.000015	0.000157	0.000891	0.003311	0.009026	0.019431
16	0.000004	0.000049	0.000334	0.001448	0.004513	0.010930
17	0.000001	0.000014	0.000118	0.000596	0.002124	0.005786
18		0.000004	0.000059	0.000232	0.000944	0.002893
19		0.000001	0.000012	0.000085	0.000397	0.001370
20			0.000004	0.000030	0.000159	0.000617
21			0.000001	0.000010	0.000061	0.000264
22				0.000003	0.000022	0.000108
23				0.000001	0.000008	0.000042
24					0.000003	0.000016
25					0.000001	0.000006
26						0.000002
27						0.000001

Табела А-2. POISSON-ОВА РАСПОДЕЛА – ФУНКЦИЈА РАСПОЕДЛЕ

Вредности функције

$$F(k)=\sum_{i=0}^{k}\frac{\lambda^{i}e^{-\lambda}}{i!}$$



λ / k	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6
0	0.904837	0.818731	0.740818	0.670320	0.606531	0.548812
1	0.995321	0.982477	0.963063	0.938448	0.909796	0.878099
2	0.999845	0.998852	0.996400	0.992074	0.985612	0.976885
3	0.999996	0.999943	0.999734	0.999224	0.998248	0.996642
4	1.000000	0.999998	0.999984	0.999939	0.999828	0.999606
5	1.000000	1.000000	0.999999	0.999996	0.999986	0.999962
6	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	0.999999	0.999997
7	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000

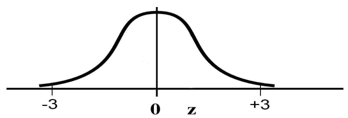
λ / k	0.7	0.8	0.9	1.0	2.0	3.0
0	0.496585	0.449329	0.406570	0.367879	0.135335	0.049787
1	0.844195	0.808792	0.772483	0.735759	0.406006	0.199148
2	0.965858	0.952577	0.937144	0.919699	0.676677	0.423190
3	0.994246	0.990920	0.986542	0.981012	0.857124	0.647232
4	0.999214	0.998589	0.997657	0.996340	0.947348	0.815263
5	0.999909	0.999816	0.999658	0.999406	0.983437	0.916082
6	0.999990	0.999980	0.999958	0.999917	0.995467	0.966491
7	0.999998	0.999999	0.999997	0.999990	0.998904	0.988095
8	1.000000	1.000000	1.000000	0.999999	0.999763	0.996196
9				1.000000	0.999954	0.998897
10					0.999992	0.999707
11					0.999999	0.999928
12					1.000000	0.999983
13						0.999996
14						0.999999
15						1.000000

Табела А-2. POISSON-ОВА РАСПОДЕЛА – ФУНКЦИЈА РАСПОЕДЛЕ (наставак)

λ / k	4.0	5.0	6.0	7.0	8.0	9.0
0	0.018316	0.006738	0.002479	0.000912	0.000335	0.000123
1	0.091579	0.040428	0.017352	0.007295	0.003019	0.001234
2	0.238105	0.124652	0.061970	0.029636	0.013754	0.006232
3	0.433472	0.265026	0.151205	0.081765	0.042380	0.021228
4	0.628839	0.440493	0.285058	0.172991	0.099632	0.054963
5	0.785132	0.615960	0.445681	0.300708	0.191235	0.115690
6	0.889326	0.762183	0.606304	0.449711	0.313374	0.206780
7	0.948866	0.866628	0.743981	0.598714	0.452961	0.323896
8	0.978636	0.931806	0.847239	0.729091	0.592548	0.455662
9	0.991867	0.968172	0.916077	0.830496	0.716625	0.587408
10	0.997159	0.986305	0.957380	0.901479	0.815887	0.705988
11	0.999084	0.994547	0.979909	0.946650	0.888077	0.803008
12	0.999726	0.997981	0.991173	0.973000	0.936204	0.875773
13	0.999923	0.999202	0.996372	0.987188	0.965820	0.926149
14	0.999979	0.999774	0.998600	0.994282	0.982744	0.958533
15	0.999994	0.999031	0.999491	0.997593	0.991770	0.977964
16	0.999998	0.999980	0.999825	0.999041	0.996283	0.988894
17	0.999999	0.999994	0.999943	0.999637	0.998407	0.994680
18	0.999999	0.999998	0.999982	0.999869	0.999351	0.997573
19	0.999999	0.999999	0.999994	0.999955	0.999748	0.998943
20	1.000000	0.999999	0.999998	0.999985	0.999907	0.999560
21		1.000000	0.999999	0.999995	0.999967	0.999824
22			0.999999	0.999998	0.999989	0.999932
23			1.000000	0.999999	0.999997	0.999974
24				0.999999	0.999999	0.999990
25				1.000000	0.999999	0.999996
26					1.000000	0.999998
27						0.999999
28						1.000000

Табела А-3. НОРМАЛНА РАСПОДЕЛА – ЗАКОН ВЕРОВАТНОЋА (ФУНКЦИЈА ГУСТИНЕ)

Вредност функције $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$



x.x x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.0	0.3989	0.3989	0.3989	0.3988	0.3986	0.3984	0.3982	0.3980	0.3977	0.3973
0.1	3970	3965	3961	3956	3951	3945	3939	3932	3925	3918
0.2	3910	3902	3894	3885	3876	3876	3876	3847	3836	3825
0.3	3814	3802	3790	3778	3765	3752	3739	3726	3712	3697
0.4	3683	3668	3653	3637	3621	3605	3589	3572	3555	3538
0.5	3521	3503	3485	3467	3448	3429	3410	3391	3372	3352
0.6	3332	3312	3292	3271	3251	3230	3209	3187	3166	3144
0.7	3123	3101	3079	3056	3034	3011	2989	2966	2943	2920
0.8	2897	2874	2850	2827	2803	2780	2756	2732	2709	2685
0.9	2661	2637	2613	2589	2565	2541	2516	2492	2468	2444
1.0	0.2420	0.2396	0.2371	0.2347	0.2323	0.2299	0.2275	0.2251	0.2227	0.2203
1.1	2179	2155	2131	2107	2083	2059	2036	2012	1989	1965
1.2	1942	1919	1895	1872	1849	1826	1804	1781	1758	1736
1.3	1714	1691	1669	1647	1626	1604	1582	1561	1539	1518
1.4	1497	1476	1456	1435	1415	1394	1374	1354	1334	1315
1.5	1295	1276	1257	1238	1219	1200	1182	1163	1145	1127
1.6	1109	1092	1074	1057	1040	1023	1006	0989	0973	0957
1.7	0940	0925	0909	0893	0878	0863	0848	0833	0818	0804
1.8	0790	0775	0761	0748	0734	0721	0707	0694	0681	0669
1.9	0656	0644	0632	0620	0608	0596	0584	0573	0562	0551

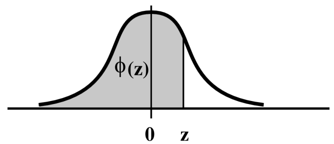
Табела А-3-1

Табела А-3. НОРМАЛНА РАСПОДЕЛА – ЗАКОН ВЕРОВАТНОЋА (ФУНКЦИЈА ГУСТИНЕ)
(наставак)

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2.0	0.0540	0.0529	0.0519	0.0508	0.0498	0.0488	0.0478	0.0468	0.0459	0.0449
2.1	0440	0431	0422	0413	0404	0396	0387	0379	0371	0363
2.2	0355	0347	0339	0332	0325	0317	0310	0303	0297	0290
2.3	0283	0277	0270	0264	0258	0252	0246	0241	0235	0229
2.4	0224	0219	0213	0208	0203	0198	0194	0189	0184	0180
2.5	0175	0171	0167	0163	0158	0154	0151	0147	0143	0139
2.6	0136	0132	0129	0126	0122	0119	0116	0113	0110	0107
2.7	0104	0101	0099	0096	0093	0091	0088	0086	0084	0081
2.8	0079	0077	0075	0073	0071	0069	0067	0065	0063	0061
2.9	0060	0058	0056	0055	0053	0051	0050	0048	0047	0046
3.0	0.0044	0.0043	0.0042	0.0040	0.0039	0.0038	0.0037	0.0036	0.0035	0.0034
3.1	0033	0032	0031	0030	0029	0028	0027	0026	0025	0025
3.2	0024	0023	0022	0022	0021	0020	0020	0019	0018	0018
3.3	0017	0017	0016	0016	0015	0015	0014	0014	0013	0013
3.4	0012	0012	0012	0011	0011	0010	0010	0010	0009	0009
3.5	0009	0008	0008	0008	0008	0007	0007	0007	0007	0006
3.6	0006	0006	0006	0005	0005	0005	0005	0005	0005	0004
3.7	0004	0004	0004	0004	0004	0004	0003	0003	0003	0003
3.8	0003	0003	0003	0003	0003	0002	0002	0002	0002	0002
3.9	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0001	0001

Табела А-4. НОРМАЛНА РАСПОДЕЛА – ФУНКЦИЈА РАСПОДЕЛЕ

Вредност функције $\Phi(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\displaystyle\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx$: N(0,1)



z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	5398	5438	5478	5517	5557	5596	5636	5675	5714	5753
0.2	5793	5832	5871	5910	5948	5987	6026	6064	6103	6141
0.3	6179	6217	6255	6293	6331	6368	6406	6443	6480	6517
0.4	6554	6591	6628	6664	6700	6736	6772	6808	6844	6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	7257	7291	7324	7357	7389	7422	7454	7486	7517	7549
0.7	7580	7611	7642	7673	7704	7734	7764	7794	7823	7852
0.8	7881	7910	7939	7967	7995	8023	8051	8078	8106	8133
0.9	8159	8186	8212	8238	8264	8289	8315	8340	8365	8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	8643	8665	8686	8708	8729	8749	8770	8790	8810	8830
1.2	8849	8869	8888	8907	8925	8944	8962	8980	8997	9015
1.3	9032	9049	9066	9082	9099	9115	9131	9147	9162	9177
1.4	9192	9207	9222	9236	9251	9265	9279	9292	9306	9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	9452	9463	9474	9484	9495	9509	9515	9525	9535	9545
1.7	9554	9564	9573	9582	9591	9599	9608	9616	9625	9633
1.8	9641	9649	9656	9664	9671	9678	9686	9693	9699	9706
1.9	9713	9719	9726	9732	9738	9744	9750	9756	9761	9767

Табела А-4-1

Табела А-4. НОРМАЛНА РАСПОДЕЛА – ФУНКЦИЈА РАСПОДЕЛЕ

(наставак)

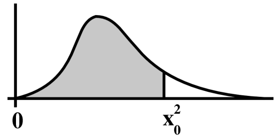
z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	9821	9826	9830	9834	9838	9842	9846	9850	9854	9857
2.2	9861	9864	9868	9871	9875	9878	9881	9884	9887	9890
2.3	9893	9896	9898	9901	9904	9906	9909	9911	9913	9916
2.4	9918	9920	9922	9925	9927	9929	9933	9932	9934	9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	9953	9955	9956	9958	9959	9960	9961	9962	9963	9964
2.7	9965	9966	9967	9968	9969	9970	9971	9972	9973	9974
2.8	9974	9975	9976	9977	9977	9978	9979	9979	9980	9981
2.9	9981	9982	9982	9983	9984	9984	9985	9985	9986	9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	9990	9991	9991	9991	9992	9992	9992	9992	9993	9993
3.2	9993	9993	9994	9994	9994	9994	9994	9995	9995	9995
3.3	9995	9995	9995	9996	9996	9996	9996	9996	9996	9997
3.4	9997	9997	9997	9997	9997	9997	9997	9997	9997	9998

Табела А-4-2

Табела А-5. χ^2 РАСПОДЕЛА – ФУНКЦИЈА РАСПОДЕЛЕ

Вредност χ_0^2 за које је функција расподеле

$$K_n(\chi_0^2) = p = \int_0^{\chi_0^2} k_n(x)dx; \quad k_n(x) = C_n x^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{\pi}{2}}$$



Степени слободе n	$K_n(\chi_0^2)=p$												
	0.01	0.02	0.05	0.10	0.20	0.30	0.50	0.70	0.80	0.90	0.95	0.98	0.99
1	0.000157	0.000628	0.00393	0.0158	0.0642	0.148	0.455	1.074	1.642	2.706	3.841	5.412	6.635
2	0.0201	0.0404	0.103	0.211	0.446	0.713	1.386	2.408	3.219	4.605	5.991	7.824	9.210
3	0.115	0.185	0.352	0.584	1.005	1.424	2.366	3.665	4.642	6.251	7.815	9.837	11.341
4	0.297	0.429	0.711	1.064	1.649	2.195	3.357	4.878	5.989	7.779	9.488	11.668	13.277
5	0.554	0.752	1.145	1.610	2.343	3.000	4.351	6.064	7.289	9.236	11.070	13.388	15.086
6	0.872	1.134	1.635	2.204	3.070	3.828	5.348	7.231	8.558	10.645	12.592	15.033	16.812
7	1.239	1.564	2.167	2.833	3.822	4.671	6.346	8.383	9.803	12.017	14.067	16.622	18.475
8	1.646	2.032	2.733	3.490	4.594	5.527	7.344	9.524	11.030	13.362	15.507	18.168	20.090
9	2.088	2.532	3.325	4.168	5.380	6.393	8.343	10.656	12.242	14.684	16.919	19.679	21.666
10	2.558	3.059	3.940	4.865	6.179	7.267	9.342	11.781	13.442	15.987	18.307	21.161	23.209
11	3.053	3.609	4.575	5.578	6.989	8.148	10.341	12.899	14.631	17.275	19.675	22.618	24.725
12	3.571	4.178	5.226	6.304	7.807	9.034	11.340	14.011	15.812	18.549	21.026	24.054	26.217
13	4.107	4.765	5.892	7.042	8.634	9.926	12.340	15.119	16.985	19.812	22.362	25.472	27.688
14	4.660	5.368	6.571	7.790	9.467	10.821	13.339	16.222	18.151	21.064	23.685	26.873	29.141
15	5.229	5.985	7.261	8.547	10.307	11.721	14.339	17.322	19.311	22.307	24.996	28.259	30.578
16	5.812	6.614	7.962	9.312	11.152	12.624	15.338	18.418	20.465	23.542	26.296	29.633	32.000
17	6.408	7.255	8.672	10.085	12.002	13.531	16.338	19.511	21.615	24.769	27.587	30.995	33.409
18	7.015	7.906	9.390	10.865	12.857	14.440	17.338	20.601	22.760	25.989	28.869	32.346	34.805
19	7.633	8.567	10.117	11.651	13.716	15.352	18.338	21.689	23.900	27.204	30.144	33.687	36.191
20	8.260	9.237	10.851	12.443	14.578	16.266	19.337	22.775	25.038	28.412	31.410	35.020	37.566

Табела А-5. χ^2 РАСПОДЕЛА – ФУНКЦИЈА РАСПОДЕЛЕ

(наставак)

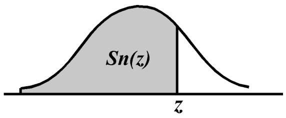
Степени слободе n	$K_n(\chi_0^2)=p$												
	0.01	0.02	0.05	0.10	0.20	0.30	0.50	0.70	0.80	0.90	0.95	0.98	0.99
21	8.897	9.915	11.591	13.240	15.445	17.182	20.337	23.858	26.171	29.615	32.671	36.347	38.932
22	9.542	10.600	12.338	14.041	16.314	18.101	21.337	24.939	27.301	30.813	33.924	37.659	40.289
23	10.196	11.293	13.091	14.848	17.187	19.021	22.337	26.018	28.249	32.007	35.172	38.968	41.638
24	10.856	11.992	13.848	15.659	18.062	19.943	23.337	27.096	29.553	33.196	36.415	40.270	42.980
25	11.524	12.697	14.611	16.473	18.940	20.867	24.337	28.172	30.675	34.382	37.652	41.566	44.314
26	12.198	13.409	15.379	17.292	19.820	21.792	25.336	29.246	31.795	35.563	38.885	42.856	45.642
27	12.879	14.125	16.151	18.114	20.703	22.719	26.336	30.319	32.912	36.741	40.113	44.140	46.963
28	13.565	14.847	16.928	18.939	21.588	23.647	27.336	31.391	34.027	37.916	41.337	45.419	48.278
29	14.256	15.574	17.708	19.768	22.475	24.577	28.336	32.461	35.139	39.087	42.557	46.693	49.588
30	14.953	16.306	18.493	20.599	23.364	25.508	29.336	33.530	36.250	40.256	43.773	47.962	50.892

Табела А-5-2

Табела А-6. **STUDENT**-ОВА РАСПОДЕЛА – ФУНКЦИЈА РАСПОДЕЛЕ

Вредност функције

$$S_n(z)=\int_{-\infty}^{z} f(x)\,dx\,;\qquad f(x)=C_n\left(1+\frac{x^2}{2}\right)^{-\frac{n+1}{2}}$$



n z	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	0.500	0.500	0.500	0.500	0.500	0.500	0.500	0.500	0.500	0.500
0.1	532	535	537	537	538	538	538	539	539	539
0.2	563	570	573	574	575	576	576	577	577	577
0.3	593	604	608	610	612	613	614	614	614	615
0.4	621	636	642	645	647	648	649	650	651	651
0.5	648	667	674	678	681	683	684	685	685	686
0.6	672	695	705	710	713	715	716	717	718	719
0.7	694	722	733	739	742	745	747	748	649	750
0.8	715	746	759	766	770	773	775	777	778	779
0.9	733	768	783	790	795	799	801	803	804	805
1.0	0.750	0.789	0.804	0.813	0.818	0.822	0.825	0.827	0.828	0.830
1.1	765	807	824	833	839	843	846	848	850	851
1.2	779	823	842	852	858	862	865	868	870	871
1.3	791	838	858	868	875	879	883	885	887	889
1.4	803	852	872	883	890	894	898	900	902	904
1.5	813	864	885	896	903	908	911	914	916	918
1.6	822	875	896	908	915	920	923	926	928	930
1.7	831	884	906	918	925	930	933	936	938	940
1.8	839	893	915	927	934	939	943	945	947	949
1.9	846	901	923	935	942	947	950	953	955	957
2.0	0.852	0.908	0.930	0.942	0.949	0.954	0.957	0.960	0.962	0.963
2.1	858	915	937	948	955	960	963	965	967	969
2.2	864	921	942	954	960	965	968	970	972	974
2.3	869	926	947	958	965	969	972	975	976	978
2.4	874	931	952	963	969	973	976	978	980	981
2.5	879	935	956	967	973	977	979	981	983	984
2.6	883	939	960	970	976	980	982	984	986	987
2.7	887	943	963	973	979	982	985	986	988	989
2.8	891	946	966	976	981	984	987	988	990	991
2.9	894	949	969	978	983	986	988	990	991	992
3.0	898	952	971	980	985	988	990	991	992	993

Табела А-6. **STUDENT**-ОВА РАСПОДЕЛА – ФУНКЦИЈА РАСПОДЕЛЕ (наставак)

n / z	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
3.1	0.901	0.955	0.973	0.982	0.987	0.989	0.991	0.993	0.994	0.994
3.2	904	957	975	983	988	991	992	994	995	995
3.3	906	960	977	985	989	992	993	995	995	996
3.4	909	962	979	986	990	993	994	995	996	997
3.5	911	964	980	988	991	994	995	996	997	997
3.6	914	965	982	989	992	994	996	996	997	998
3.7	916	967	983	990	993	995	996	997	997	998
3.8	918	969	984	990	994	995	997	997	998	998
3.9	920	970	985	991	994	996	997	998	998	998
4.0	922	971	986	992	995	996	997	998	998	999
4.1	0.924	0.973	0.987	0.993	0.995	0.997	0.998	0.998	0.999	0.999
4.2	926	974	988	993	996	997	998	998	999	999
4.3	927	975	988	994	996	997	998	999	999	999
4.4	929	976	989	994	996	998	998	999	999	999
4.5	930	977	990	995	997	998	999	999	999	999
4.6	932	978	990	995	997	998	999	999	999	999
4.7	933	979	991	995	997	998	999	999	999	999
4.8	935	980	991	996	998	998	999	999	999	1.000
4.9	936	980	992	996	998	999	999	999	1.000	
5.0	937	981	992	996	998	999	999	999		
5.1	0.938	0.982	0.993	0.996	0.998	0.999	0.999	0.999		
5.2	939	982	993	997	998	999	999	1.000		
5.3	941	983	993	997	998	999	999			
5.4	942	984	994	997	998	999	999			
5.5	943	984	994	997	999	999	999			
5.6	944	985	994	997	999	999	1.000			
5.7	945	985	995	998	999	999				
5.8	946	986	995	998	999	999				
5.9	947	986	995	998	999	999				
6.0	947	987	995	998	999	999				

Табела А-6. **STUDENT**-ОВА РАСПОДЕЛА – ФУНКЦИЈА РАСПОДЕЛЕ (наставак)

n / z	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
0	0.500	0.500	0.500	0.500	0.500	0.500	0.500	0.500	0.500	0.500
0.1	539	539	539	539	539	539	539	539	539	539
0.2	577	578	578	578	578	578	578	578	578	578
0.3	615	615	615	616	616	616	616	616	616	616
0.4	652	652	652	652	653	653	653	653	653	653
0.5	686	686	687	688	688	688	688	688	689	689
0.6	720	720	721	721	721	721	722	722	722	722
0.7	751	751	752	752	753	753	753	754	754	754
0.8	780	780	781	781	782	782	783	783	783	783
0.9	806	807	808	808	809	809	810	810	811	811
1.0	0.831	0.831	0.832	0.833	0.833	0.834	0.834	0.835	0.835	0.835
1.1	853	833	854	855	856	856	857	857	857	858
1.2	872	873	874	875	876	876	877	877	877	878
1.3	890	891	892	893	893	894	894	895	895	896
1.4	905	907	907	908	909	910	910	911	911	912
1.5	919	920	921	922	923	923	924	924	925	925
1.6	931	932	933	934	935	935	936	936	937	937
1.7	941	943	943	944	945	946	946	947	947	948
1.8	950	951	952	953	954	955	955	956	956	956
1.9	958	959	960	961	962	962	963	963	964	964
2.0	0.965	0.966	0.967	0.967	0.968	0.969	0.969	0.970	0.970	0.970
2.1	970	971	972	973	973	974	974	975	975	976
2.2	975	976	977	977	978	979	979	979	980	980
2.3	979	980	981	981	982	982	983	983	983	984
2.4	982	983	984	985	985	985	986	986	987	987
2.5	985	986	987	987	988	988	988	989	989	989
2.6	988	988	989	989	990	990	991	991	991	991
2.7	990	990	991	991	992	992	992	993	993	993
2.8	991	992	992	993	993	994	994	994	994	994
2.9	993	993	994	994	994	994	995	995	995	996
3.0	994	994	995	995	995	996	996	996	996	996

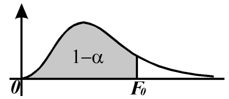
Табела А-6. **STUDENT**-ОВА РАСПОДЕЛА – ФУНКЦИЈА РАСПОДЕЛЕ (наставак)

n z	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
3.1	0.995	0.995	0.996	0.996	0.996	0.997	0.997	0.997	0.997	0.997
3.2	996	996	996	997	997	997	997	997	998	998
3.3	996	997	997	997	998	998	998	998	998	998
3.4	997	997	998	998	998	998	998	998	998	999
3.5	997	998	998	998	998	998	999	999	999	999
3.6	0.998	0.998	0.998	0.999	0.999	0.999	0.999	0.999	0.999	0.999
3.7	998	998	999	999	999	999	999	999	999	999
3.8	998	999	999	999	999	999	999	999	999	999
3.9	999	999	999	999	999	999	999	999	999	1.000
4.0	999	999	999	999	999	999	999	1.000	1.000	
4.1	0.999	0.999	0.999	0.999	0.999	1.000	1.000			
4.2	999	999	999	1.000	1.000					
4.3	999	999	1.000							
4.4	999	1.000								
4.5	999									
4.6	1.000									

Табела А-7. F – РАСПОДЕЛА – ФУНКЦИЈА РАСПОДЕЛЕ

Вредности F_0 за које је функција расподеле једнака

$$P\left(F_{n_1,n_2} \le F_0\right) = 1-\alpha = \int_0^{F_0} f(F)\,dF\,;\quad f(F) = C_{n_1,n_2} F^{\frac{n_1}{2}-1}\left(n_1+n_2F\right)^{-\frac{n_1+n_2}{2}}$$



1-α=0.95

n_2 \ n_1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	16	20	24	30	50	100	∞
1	161	200	216	225	230	234	237	239	241	242	244	246	248	249	250	252	253	254
2	18.51	19.00	19.16	19.25	19.30	19.33	19.36	19.37	19.38	19.39	19.41	19.43	19.44	19.45	19.46	19.47	19.49	19.50
3	10.13	9.55	9.28	9.12	9.01	8.94	8.88	8.84	8.81	8.78	8.74	8.69	8.66	8.64	8.62	8.58	8.56	8.53
4	7.71	6.94	6.59	6.39	6.26	6.16	6.09	6.04	6.00	5.96	5.91	5.84	5.80	5.77	5.74	5.70	5.66	5.63
5	6.61	5.79	5.41	5.19	5.05	4.95	4.88	4.82	4.78	4.74	4.68	4.60	4.56	4.53	4.50	4.44	4.40	4.36
6	5.99	5.14	4.76	4.53	4.39	4.28	4.21	4.15	4.10	4.06	4.00	3.92	3.87	3.84	3.81	3.75	3.71	3.67
7	5.59	4.74	7.35	4.12	3.97	3.87	3.79	3.73	3.68	3.63	3.57	3.49	3.44	3.41	3.38	3.32	3.28	3.23
8	5.32	4.46	4.07	3.84	3.69	3.58	3.50	3.44	3.39	3.34	3.28	3.20	3.15	3.12	3.08	3.03	2.98	2.93
9	5.12	4.26	3.86	3.63	3.48	3.37	3.29	3.23	3.18	3.13	3.07	2.98	2.93	2.90	2.86	2.80	2.76	2.71
10	4.96	4.10	3.71	3.48	3.33	3.22	3.14	3.07	3.02	2.97	2.91	2.82	2.77	2.74	2.70	2.64	2.59	2.54
11	4.84	3.98	3.59	3.36	3.20	3.09	3.01	2.95	2.90	2.86	2.79	2.70	2.65	2.61	2.57	2.50	2.45	2.40
12	4.75	3.88	3.49	3.26	3.11	3.00	2.92	2.85	2.80	2.76	2.69	2.60	2.54	2.50	2.46	2.40	2.35	2.30
13	4.67	3.80	3.41	3.18	3.02	2.92	2.84	2.77	2.72	2.67	2.60	2.51	2.46	2.42	2.38	2.32	2.26	2.21
14	4.60	3.74	3.34	3.11	2.96	2.85	2.77	2.70	2.65	2.60	2.53	2.44	2.39	2.35	2.31	2.24	2.19	2.13
15	4.54	3.68	3.29	3.06	2.90	2.79	2.70	2.64	2.59	2.55	2.48	2.39	2.33	2.29	2.25	2.18	2.12	2.07
16	4.49	3.63	3.24	3.01	2.85	2.74	2.66	2.59	2.54	2.49	2.42	2.33	2.28	2.24	2.20	2.13	2.07	2.01
17	4.45	3.59	3.20	2.96	2.81	2.70	2.62	2.55	2.50	2.45	2.38	2.29	2.23	2.19	2.15	2.08	2.02	1.96
18	4.41	3.55	3.16	2.93	2.77	2.66	2.58	2.51	2.46	2.41	2.34	2.25	2.19	2.15	2.11	2.04	1.98	1.92
19	4.38	3.52	3.13	2.90	2.74	2.63	2.55	2.48	2.43	2.38	2.31	2.21	2.15	2.11	2.07	2.00	1.94	1.88
20	4.35	3.49	3.10	2.87	2.71	2.60	2.52	2.45	2.40	2.35	2.28	2.18	2.12	2.08	2.04	1.96	1.90	1.84
22	4.30	3.44	3.05	2.82	2.66	2.55	2.47	2.40	2.35	2.30	2.23	2.13	2.07	2.03	1.98	1.91	1.84	1.78
24	4.26	3.40	3.01	2.78	2.62	2.51	2.43	2.36	2.30	2.26	2.18	2.09	2.02	1.98	1.94	1.86	1.80	1.73
26	4.22	3.37	2.98	2.74	2.59	2.47	2.39	2.32	2.27	2.22	2.15	2.05	1.99	1.95	1.90	1.82	1.76	1.69
28	4.20	3.34	2.95	2.71	2.56	2.44	2.36	2.29	2.24	2.19	2.12	2.02	1.96	1.91	1.87	1.78	1.72	1.65
32	4.15	3.30	2.90	2.67	2.51	2.40	2.32	2.25	2.19	2.14	2.07	1.97	1.91	1.86	1.82	1.74	1.67	1.59
36	4.11	3.26	2.86	2.63	2.48	2.36	2.28	2.21	2.15	2.10	2.03	1.93	1.87	1.82	1.78	1.69	1.62	1.55
40	4.08	3.23	2.84	2.61	2.45	2.34	2.25	2.18	2.12	2.07	2.00	1.90	1.84	1.79	1.74	1.66	1.59	1.51
60	4.00	3.15	2.76	2.52	2.37	2.25	2.17	2.10	2.04	1.99	1.92	1.81	1.75	1.70	1.65	1.56	1.48	1.39
100	3.94	3.09	2.70	2.46	2.30	2.19	2.10	2.03	1.97	1.92	1.85	1.75	1.68	1.63	1.57	1.48	1.39	1.28
200	3.89	3.04	2.65	2.41	2.26	2.14	2.05	1.98	1.92	1.87	1.80	1.69	1.62	1.57	1.52	1.42	1.32	1.19
∞	3.84	2.99	2.60	2.37	2.21	2.09	2.01	1.94	1.88	1.83	1.75	1.64	1.57	1.52	1.46	1.35	1.24	1.00

Табела А-7. F – РАСПОДЕЛА – ФУНКЦИЈА РАСПОДЕЛЕ

(наставак)

1-α=0.99

n_2 \ n_1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	16	20	24	30	50	100	∞
1	4.052	4.999	5.403	5.625	5.764	5.859	5.928	5.981	6.022	6.056	6.106	6.169	6.208	6.234	6.258	6.302	6.334	6.366
2	98.49	99.00	99.17	99.25	99.30	99.33	99.34	99.36	99.38	99.40	99.42	99.44	99.45	99.46	99.47	99.48	99.49	99.50
3	34.12	30.82	29.46	28.71	28.74	27.91	27.67	27.49	27.34	27.23	27.05	26.83	26.69	26.60	26.50	26.35	26.23	26.12
4	21.20	18.00	16.69	15.98	15.52	15.21	14.98	14.80	14.66	14.54	14.37	14.15	14.02	13.93	13.83	13.69	13.57	13.46
5	16.26	13.27	12.06	11.39	10.97	10.67	10.45	10.27	10.15	10.05	9.89	9.68	9.55	9.47	9.38	9.24	9.13	9.02
6	13.74	10.92	9.78	9.15	8.75	8.47	8.26	8.10	7.98	7.87	7.72	7.52	7.39	7.31	7.23	7.09	6.99	6.88
7	12.25	9.55	8.45	7.85	7.46	7.19	7.00	6.84	6.71	6.62	6.47	6.27	6.15	6.07	5.98	5.85	5.75	5.65
8	11.26	8.65	7.59	7.01	6.63	6.37	6.19	6.03	5.91	5.82	5.67	5.48	5.36	5.28	5.20	5.06	4.96	4.86
9	10.56	8.02	6.99	6.42	6.06	5.80	5.62	5.47	5.35	5.26	5.11	4.92	4.80	4.73	4.64	4.51	4.41	4.31
10	10.04	7.56	6.55	5.99	5.64	5.39	5.21	5.06	4.95	4.85	4.71	4.52	4.41	4.33	4.25	4.12	4.01	3.91
11	9.65	7.20	6.22	5.67	5.32	5.07	4.88	4.74	4.63	4.54	4.40	4.21	4.10	4.02	3.94	3.80	3.70	3.60
12	9.33	6.93	5.95	5.41	5.06	4.82	4.65	4.50	4.39	4.30	4.16	3.98	3.86	3.78	3.70	3.56	3.46	3.36
13	9.07	6.70	5.74	5.20	4.86	4.62	4.44	4.30	4.19	4.10	3.96	3.78	3.67	3.59	3.51	3.37	3.27	3.16
14	8.86	6.51	5.56	5.03	4.69	4.46	4.28	4.14	4.03	3.94	3.80	3.62	3.51	3.43	3.34	3.21	3.11	3.00
15	8.68	6.63	5.42	4.89	4.56	4.32	4.14	4.00	3.89	3.80	3.67	3.48	3.36	3.29	3.20	3.07	2.97	2.87
16	8.53	6.23	5.29	4.77	4.44	4.20	4.03	3.89	3.78	3.69	3.55	3.37	3.25	3.18	3.10	2.96	2.86	2.75
17	8.40	6.11	5.18	4.67	4.34	4.10	3.93	3.79	3.68	3.59	3.45	3.27	3.16	3.08	3.00	2.86	2.76	2.65
18	8.28	6.01	5.09	4.58	4.25	4.01	3.85	3.71	3.60	3.51	3.37	3.19	3.07	3.00	2.91	2.78	2.68	2.57
19	8.18	5.93	5.01	4.50	4.17	3.94	3.77	3.63	3.52	3.43	3.30	3.12	3.00	2.92	2.84	2.70	2.60	2.49
20	8.10	5.85	4.94	4.43	4.10	3.87	3.71	3.56	3.45	3.37	3.23	3.05	2.94	2.86	2.77	2.63	2.53	2.42
22	7.94	5.72	4.82	4.31	3.99	3.76	3.59	3.45	3.35	3.26	3.12	2.94	2.83	2.75	2.67	2.53	2.42	2.31
24	7.82	5.61	4.72	4.22	3.90	3.67	3.50	3.36	3.25	3.17	3.03	2.85	2.74	2.66	2.58	2.44	2.33	2.21
26	7.72	5.53	4.64	4.14	3.28	3.59	3.42	3.29	3.17	3.09	2.96	2.77	2.66	2.58	2.50	2.36	2.25	2.13
28	7.64	5.45	4.57	4.07	3.76	3.53	3.36	3.23	3.11	3.03	2.90	2.71	2.60	2.52	2.44	2.30	2.18	2.06
32	7.50	5.34	4.46	3.97	3.66	3.42	3.25	3.12	3.01	2.94	2.80	2.62	2.51	2.42	2.34	2.20	2.08	1.96
36	7.39	5.25	4.38	3.89	3.58	3.35	3.18	3.04	2.94	2.86	2.72	2.54	2.43	2.35	2.26	2.12	2.00	1.87
40	7.31	5.18	4.31	3.83	3.51	3.29	3.12	2.99	2.88	2.80	2.66	2.49	2.37	2.29	2.20	2.05	1.94	1.81
60	7.08	4.98	4.13	3.65	3.34	3.12	2.95	2.82	2.72	2.63	2.50	2.32	2.20	2.12	2.03	1.87	1.74	1.60
100	6.90	4.82	3.98	3.51	3.20	2.99	2.82	2.69	2.59	2.51	2.36	2.19	2.06	1.98	1.89	1.73	1.59	1.43
200	6.76	4.71	3.88	3.41	3.11	2.90	2.73	2.60	2.50	2.41	2.28	2.09	1.97	1.88	1.79	1.62	1.48	1.28
∞	6.64	4.60	3.78	3.32	3.02	2.80	2.64	2.51	2.41	2.32	2.18	1.99	1.87	1.79	1.69	1.52	1.36	1.00