# Домаћи задаци из ДМС, 2008.

Радите по један задатак који вам генерише програм на основу броја индекса (остали задаци могу вам послужити за вежбу при спремању колоквијума, односно писменог дела испита). Сваки задатак носи 0, 1 или 2 поена. Потребно је детаљно образложити решења.

## 1. Исказни рачун

**1.** Пера, Рака и Сава су другари који често излазе заједно на пиће у кафану. Познато је да свако од њих пије увек исто пиће и то или вино или пиво (само једно од тога). У вези тога ко од њих шта пије, познати су следећи искази:

1° Ако Пера пије пиво, онда Рака пије исто пиће као и Сава.

2° Ако Рака наручује пиво, онда Сава пије другачије пиће од Периног.

3° Ако Сава наручује вино, онда Пера пије исто пиће као и Сава.

Да ли су ове изјаве непротивречне?

За кога од њих са сигурношћу можете да тврдите шта пије?

**2.** Перица живи у кући у Улици Вртирепа. Када је Верица требало да дође код њега питала га је за број његове куће. Перица је одговорио следеће:

- „Ако је мој број куће дељив са 3, онда је то број између 50 и 59.“
- „Ако мој број куће није дељив са 4, онда је то број између 60 и 69.“
- „Ако је мој број куће дељив са 6, онда је то број између 70 и 79.“

Да ли су ове изјаве непротивречне?

Да ли је Верица успела да одреди број Перицине куће? Ако није помозите јој!

**3.** Пет студената, Аца, Беба, Цаца, Доки и Ема су одговарали на тест који се састоји од 5 питања са вишеструким одговорима. Прва два питања су имала одговоре $a$, $b$ и $c$, док је на остала одговор тачно–нетачно ($\perp$–$\top$). Они су одговорили на питања на следећи начин:

| | I | II | III | IV | V |
|---|---|---|---|---|---|
| Аца | $a$ | $a$ | $\top$ | $\top$ | $\top$ |
| Беба | $b$ | $b$ | $\top$ | $\perp$ | $\top$ |
| Цаца | $a$ | $b$ | $\top$ | $\top$ | $\perp$ |
| Доки | $b$ | $c$ | $\top$ | $\top$ | $\perp$ |
| Ема | $c$ | $a$ | $\perp$ | $\top$ | $\top$ |

Познато је да на прва два питања тачан одговор није под $a$.[1]

Познато је да не постоје два студента који имају једнак број тачних одговора.

Одредити који су тачни одговори. Ко је од студената најбоље урадио тест?

**4.** Аца, Бане и Цепи припадају породицама Лажића и Истинољубића (свако припада само једној од те две породице). Као што им и презимена говоре сваки Лажић увек лаже, а сваки Истинољубић увек говори истину. Аца рекао следеће:

„Или ја или Бане припадамо различитој породици од остале двојице.“

Да ли овај исказ може да буде тачан? (Ако је одговор потврдан у ком је то случају?)

Чије презиме са сигурношћу можемо да утврдимо?

[1] Овај услов је вишак, али олакшава решавање задатка!

**5.** Ана, Беба, Цока, Даца и Ема су другарице. Претходну суботу су издвојиле за међусобна трачарења, али како је Ема имала сломљену ногу решиле су да је све посете, али у различита времена да би слободно могле да разговарају (тј. једна по једна).

За време сваке од ових посета познато је следеће:

Ана је посетила Ему у 8 сати,
Беба је посетила Ему у 9 сати,
Цока је посетила Ему у 10 сати,
Даца је посетила Ему у 11 сати,

али није познато да ли је то било ујутро или увече.

Бар једна жена је посетила Ему између Ане и Бебе.

Ана није посетила Ему и пре Цоке и пре Даце.

Цока није посетила Ену између Бебе и Даце.

Одредити којим редоследом су посећивали Ему.

**6.** Дата је скуповна формула

$$A \subseteq B \wedge A \subseteq C \;\Leftrightarrow\; A \subseteq C \setminus (C \setminus B).$$

**а)** Представити леву и десну страну ове формуле преко Венових дијаграма.

**б)** Представити ову формулу преко исказних формула.

**в)** Испитати да ли је исказна формула таутологија (тј. да ли је полазна скуповна формула увек тачна).

**7.** Дата је скуповна формула

$$A \subseteq B \vee A \subseteq C \;\Rightarrow\; A \subseteq C \setminus (B \setminus C).$$

**а)** Представити леву и десну страну ове формуле преко Венових дијаграма.

**б)** Представити ову формулу преко исказних формула.

**в)** Испитати да ли је исказна формула таутологија (тј. да ли је полазна скуповна формула увек тачна).

**8.** Дата је скуповна формула

$$\big((A \setminus D) \cup (C \setminus D)\big) \cap B = \big((A \cap B) \cup (B \cap C)\big) \setminus D.$$

**а)** Представити леву и десну страну ове формуле преко Венових дијаграма.

**б)** Представити ову формулу преко исказних формула.

**в)** Испитати да ли је исказна формула таутологија (тј. да ли је полазна скуповна формула увек тачна).

**9.** Дата је скуповна формула

$$\big((A \cap B) \setminus (C \setminus D)\big) \cup D \subseteq (A \cup D) \setminus (B \cap C).$$

**а)** Представити леву и десну страну ове формуле преко Венових дијаграма.

**б)** Представити ову формулу преко исказних формула.

**в)** Испитати да ли је исказна формула таутологија (тј. да ли је полазна скуповна формула увек тачна).

**10.** Познато је да су сви Плинкови Планкови и да су неки од Плонкова Плинкови. Представити ову ситуацију преко Венових дијаграма.

Дати су следећи искази:

$a =$ „Неки Планкови су Плонкови.“

$b =$ „Неки Плинкови нису Плонкови.“

$c =$ „Ниједан Плонк није Планк.“

Који искази морају бити тачни, а који не?

(Могуће је да за неки од ових исказа не можемо да установимо да ли је тачан или не!)

## 2. Предикатски рачун

**11.**

**12.**

**13.**

**14.**

**15.**

**16.**

**17.**

**18.**

**19.**

**20.**

## 3. Релацијске структуре

**21.** Дата је релација
$$x \varrho y \quad \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \quad \frac{x+5y}{3y} \leqslant 2.$$
на скупу $S = \left\{\frac{1}{2}, 1, \sqrt{3}, \pi, 5\right\}$.

**а)** Набројати све елементе који су у релацији $\varrho$ и који нису у релацији $\varrho$.

**б)** Представити дату релацију таблично и преко графа.

**в)** Да ли је дата релација рефлексивна, симетрична, антисиметрична, транзитивна?

**г)** Испитати да ли је то релација еквиваленције и/или релација поретка.

**д)** Уколико је то релација еквиваленције одредити све класе еквиваленције, а уколико је то релација поретка представити је преко Хасеовог дијаграма и испитати да ли је то релација тоталног или парцијалног поретка.

**22.** Дата је релација
$$\varrho: \ x \varrho y \quad \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \quad \text{разлика збира цифара броја } x^2 \text{ и збира цифара броја } y^2 \text{ је дељива са } 3$$
на скупу $\{13, 25, 36, 38, 57\}$.

**а)** Набројати све елементе који су у релацији $\varrho$ и који нису у релацији $\varrho$.

**б)** Представити дату релацију таблично и преко графа.

**в)** Да ли је дата релација рефлексивна, симетрична, антисиметрична, транзитивна?

**г)** Испитати да ли је то релација еквиваленције и/или релација поретка.

**д)** Уколико је то релација еквиваленције одредити све класе еквиваленције, а уколико је то релација поретка представити је преко Хасеовог дијаграма и испитати да ли је то релација тоталног или парцијалног поретка.

**23.** Дата је релација
$$\varrho: \ x \varrho y \quad \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \quad x \perp y$$
(тј. праве $x$ и $y$ су у релацији ако и само ако су ортогоналне) на скупу правих $P = \{p_1, p_2, p_3, p_4, p_5\}$ у равни $xOy$. Те праве су задате са
$$p_1 : y = x + 3, \qquad p_2 : y = 3, \qquad p_3 : y = 2 - x, \qquad p_4 : 2x + 2y - 3 = 0, \qquad p_5 : y\text{-оса}.$$

**а)** Набројати све елементе који су у релацији $\varrho$ и који нису у релацији $\varrho$.

**б)** Представити дату релацију таблично и преко графа.

**в)** Да ли је дата релација рефлексивна, симетрична, антисиметрична, транзитивна?

**г)** Испитати да ли је то релација еквиваленције и/или релација поретка.

**д)** Уколико је то релација еквиваленције одредити све класе еквиваленције, а уколико је то релација поретка представити је преко Хасеовог дијаграма и испитати да ли је то релација тоталног или парцијалног поретка.

**24.** Нека је релација $\varrho$ дата на следећи начин:
$$(\forall x, y \in \mathbb{R}) \ x \varrho y \quad \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \quad yx^2 + y = xy^2 + x.$$

**а)** Испитати да ли је $\varrho$ релација еквиваленције на скупу $\mathbb{R}$.

Ако јесте, одредити класе еквиваленције елемената $0$, $1$, $\pi$, $7$ и $\frac{1}{7}$.

**б)** Испитати да ли је $\varrho$ релација поретка (као и тоталног или парцијалног поретка) на скупу $\mathbb{R}$.

Ако јесте одредити најмањи, највећи, минималан и максималан елемент скупа $(\mathbb{R}, \varrho)$.

**25.** Бинарна релација $\varrho$ дефинисана је на следећи начин:

$$(\forall x, y \in \mathbb{R})\ x \,\varrho\, y \quad \overset{\text{def}}{\iff} \quad x^2 - 3xy + 2y^2 = 0.$$

**а)** Испитати да ли је $\varrho$ релација еквиваленције на скупу $\mathbb{R}$.

Ако јесте, наћи класе еквиваленције елемената 0, 1, 2 и 6.

**б)** Испитати да ли је $\varrho$ релација поретка (као и тоталног или парцијалног поретка) на скупу $\mathbb{R}$.

Ако јесте одредити најмањи, највећи, минималан и максималан елемент скупа $(\mathbb{R}, \varrho)$.

**26.** Нека је $T$ скуп свих троуглова у равни и $a \,\varrho\, b$ акко $a$ и $b$ имају једнаке углове.

**а)** Испитати да ли је $\varrho$ релација еквиваленције на скупу $T$.

Ако јесте, наћи класу еквиваленције троугла са страницама 1, 1 и 1, као и класу еквиваленције троугла са страницама 1, 1 и $\sqrt{2}$.

**б)** Испитати да ли је $\varrho$ релација поретка (као и тоталног или парцијалног поретка) на скупу $T$.

Ако јесте одредити (ако постоје) најмањи, највећи, минималан и максималан елемент скупа $(T, \varrho)$.

**27.** Дата је релација $\varrho$ условом

$$x \,\varrho\, y \quad \overset{\text{def}}{\iff} \quad x(4y^2 + 1) \leqslant y(4x^2 + 1)$$

на скупу $S \subseteq R$.

**а)** Испитати да ли релација $\varrho$ представља једно уређење (релацију поретка) на сваком од скупова $S_1 = \mathbb{R}$; $S_2 = R^+$; $S_3 = [1, +\infty)$; $S_4 = (-\infty, -\frac{1}{2}] \cup [\frac{1}{2}, +\infty)$.

**б)** За сваки од та 4 скупа ($S_1$, $S_2$, $S_3$, $S_4$) ако јесте релација поретка испитати да ли је то релација тоталног или релација парцијалног поретка. Да ли је то решетка?

**в)** За сваки од та 4 скупа ($S_1$, $S_2$, $S_3$, $S_4$) ако јесте релација поретка одредити (ако постоје) најмањи, највећи, минималан и максималан елемент скупа.

**28.** Нека је $\varrho$ бинарна релација дефинисана на скупу $\mathbb{N}$ тако да за све $x, y \in \mathbb{N}$ важи

$$x \,\varrho\, y \quad \overset{\text{def}}{\iff} \quad (\exists k \in \mathbb{N})\, x + y = 2k \cdot x.$$

**а)** Испитати да ли релација $\varrho$ представља једно уређење (релацију поретка) на скупу $\mathbb{N}$.

**б)** Ако јесте релација поретка испитати да ли је то релација тоталног или релација парцијалног поретка. Да ли је то решетка?

**в)** Ако јесте релација поретка одредити (ако постоје) најмањи, највећи, минималан и максималан елемент скупа $\mathbb{N}$.

**29.** Нека је $\rho$ бинарна релација дефинисана на неком подскупу $S$ скупа $\mathbb{R}^*$ тако да за све $x, y \in S$ важи

$$x \,\varrho\, y \quad \overset{\text{def}}{\iff} \quad \frac{x + 2y}{3y} \in T,$$

где је $T$ скуп непарних природних бројева.

**а)** Доказати да је релација $\varrho$ релација поретка на скупу $\mathbb{R}^*$. Да ли је то релација парцијалног или тоталног поретка?

**б)** Испитати да ли је у случају када је $S = \{1, 7, 13, 49, 91, 169\}$ релацијска структура $(S, \rho)$ релација поретка (као и парцијалног или тоталног поретка) и да ли је решетка. Ако постоје одредити најмањи, највећи, минималан и максималан елемент скупа $S$, као и супремум и инфимум подскупа $S_1 = \{7, 13, 49, 91\}$.

**30.** Нека је $\varrho$ бинарна релација дефинисана на неком подскупу $S$ скупа $\mathbb{R}$ тако да за све $x, y \in S$ важи

$$x \,\varrho\, y \quad \overset{\text{def}}{\iff} \quad (\exists k \in \mathbb{N})\, x + 2y = 3k \cdot x.$$

**а)** Доказати да је релација $\varrho$ релација поретка на скупу $\mathbb{N}$. Да ли је то релација парцијалног или тоталног поретка?

**б)** Испитати да ли је у случају када је $S = \{1, 4, 7, 10, 16, 28\}$ релацијска структура $(S, \rho)$ релација поретка (као и парцијалног или тоталног поретка) и да ли је решетка. Ако постоје одредити најмањи, највећи, минималан и максималан елемент скупа $S$, као и супремум и инфимум подскупа $S_1 = \{4, 7, 16\}$.

# 4. Теорија графова

**31.** Дат је неоријентисан граф $G = (V, E)$ са

$$V = \{u, w, x, y, z\} \qquad \text{и} \qquad E = \Big\{\{u, w\}, \{u, z\}, \{w, x\}, \{w, z\}, \{x, z\}, \{x, y\}\Big\}.$$

**а)** Нацртати граф $G$ и одредити колико има чворова $n$, колико има грана $m$, као и степене $d(v)$ свих чворова.

**б)** Написати матрицу суседства $A$, матрицу инциденције чворова и грана $R$ и матрицу растојања $D$.

**в)** Да ли је граф $G$ повезан?

**г)** Израчунати матрице $A^2$ и $A^3$. Које закључке можемо извући из ових матрица?

**32.** Дат је неоријентисан граф $G = (V, E)$ својом матрицом суседства:

$$A = \begin{Vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{Vmatrix}$$

**а)** Нацртати граф $G$ и одредити колико има чворова $n$, колико има грана $m$, као и степене $d(v)$ свих чворова.

**б)** Написати матрицу инциденције чворова и грана $R$ и матрицу растојања $D$. Одредити скуп чворова $V$ и скуп грана графа $E$.

**в)** Да ли је граф $G$ повезан?

**г)** Израчунати матрице $A^2$ и $A^3$. Које закључке можемо извући из ових матрица?

**33.** Дат је оријентисан граф $G = (V, E)$ својом матрицом инциденције чворова и грана:

$$S = \begin{Vmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{Vmatrix}$$

**а)** Написати матрицу суседства $A$ и матрицу растојања $D$. Одредити скуп чворова $V$ и скуп грана графа $E$.

**б)** Нацртати граф $G$ и одредити број чворова у графу $n$, број грана $m$, као и улазне степене свих чворова $d^{-}(v)$ и излазне степене свих чворова $d^{+}(v)$.

**в)** Да ли се из чвора $a$ (који одговара првој врсти у матрици $S$) може доћи гранама из $V$ у чвор $d$ (који одговара четвртој врсти у матрици $S$)?

**г)** Израчунати матрице $A^2$ и $A^3$. Које закључке можемо извући из ових матрица?

**34.** **а)** Одредити све самокомплементарне графове са 4 и 5 чворова (и нацртати их).

**б)** За самокомплементаран граф $G$ са 4 чвора написати матрицу суседства $A$, инциденције $R$ и матрицу растојања $D$.

**в)** Израчунати матрице $A^2$ и $A^3$. Које закључке можемо извући из ових матрица?

**35.** **а)** Одредити колико има неизоморфних стабала са 6 и 7 чворова. Нацртати сва та стабла.

**б)** Наћи два неизоморфна стабла са истим низом степена чворова.

**в)** Одредити центар за свако стабло одређено у делу под б).

**36.** Дат је израз $a + (b + c) : (d - b * c) - a * b * c + d$ у инфиксној нотацији.

**а)** Одредити бинарно стабло које одговара овом изразу. Колика је висина овог стабла? Одредити ниво сваког листа у том стаблу. Да ли је ово стабло балансирано? Да ли је ово стабло потпуно бинарно стабло?

**б)** Написати у префиксној и инфиксној (пољској и инверзној пољској) нотацији дати израз.

**37.** Један програм изграђује бинарно уређено стабло од речи које учитава секвенцијално. Сваки чвор стабла садржи једну реч и показиваче на лево и десно подстабло. Прва реч коју програм учита представља корен стабла. Програм учитава редом речи

$$1^\circ\ a, b, c, au; \qquad 2^\circ\ b, a, c, au; \qquad 3^\circ\ b, c, a, au; \qquad 4^\circ\ a, au, b, c.$$

**а)** Нацртати резултантно стабло у сваком од горња 4 случаја.

**б)** Израчунати средњи број приступа чворовима стабла приликом тражења неке речи која се налази у том стаблу (успешно тражење).

**в)** Израчунати средњи број приступа чворовима стабла принеуспешном тражењу речи $x$ ако је са једнаком вероватноћом заступљена свака од следећих могућности: $x < a$, $a < x < au$, $au < x < b$, $b < x < c$ и $x > c$.

(Сматра се да је читање једног чвора – један приступ.)

**38.** Нацртати изглед бинарног уређеног стабла ако елементи долазе следећим редом:

$$20, 28, 24, 10, 26, 18, 4, 40, 2, 3, 6, 30, 27, 38, 25, 5, 8, 7, 9.$$

Затим обрисати редом чворове 4,24,40,5,7.

Колика је висина добијеног стабла $T$? Одредити ниво сваког листа у стаблу $T$. Да ли је стабло $T$ балансирано? Да ли је стабло $T$ потпуно бинарно стабло?

**39.** Нека су фреквенције појављивања неких симбола дате у следећој таблици

| симбол | а | б | в | г | е | и | ј | к | л | о | п |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| фреквенција | 30 | 3 | 12 | 1 | 17 | 19 | 15 | 4 | 5 | 9 | 8 |

Одредити одговарајуће Хафманово стабло $T$ (тј. бинарно стабло минималне средње дужине пута код кога су дати симболи листови), као и одговарајући Хафманов кôд.

**а)** Колика је висина добијеног стабла $T$? Одредити ниво сваког листа у стаблу $T$. Да ли је стабло $T$ балансирано? Да ли је стабло $T$ потпуно бинарно стабло?

**б)** Колики је средњи број приступа при успешном тражењу за ово стабло?

**в)** Колики је средњи број приступа при неуспешном тражењу симбола $x$ за ово стабло? (Претпоставити да је са једнаком вероватноћом заступљена свака од следећих могућности: г $< x <$ е, е $< x <$ и, л $< x <$ о и $x >$ п.)

**д)** Кодирати реч „колиба“.

**е)** Да ли је неки од следећих кодова исправан (тј. представља неку од речи горње азбуке):

101, 11101, 101001, 011101, 0101, 1001, 11111, 000.

**40.** Морзеов кôд је дат следећом таблицом:

| симбол | $A$ | $B$ | $C$ | $D$ | $E$ | $F$ | $G$ | $H$ | $I$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Морзеов кôд | •– | –••• | –•–• | –•• | • | ••–• | ––• | •••• | •• |

| симбол | $J$ | $K$ | $L$ | $M$ | $N$ | $O$ | $P$ | $Q$ | $R$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Морзеов кôд | •––– | –•– | •–•• | –– | –• | ––– | •––• | ––•– | •–• |

| симбол | $S$ | $T$ | $U$ | $V$ | $W$ | $X$ | $Y$ | $Z$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Морзеов кôд | ••• | – | ••– | •••– | •–– | –••– | –•–– | ––•• |

**а)** Да ли је овај кôд префиксни кôд?

**б)** Одредити бинарно стабло $T$ које одговара овом коду (симболу • одговара грана ка левом сину, а симболу – одговара грана ка десном сину).

**в)** Колика је висина добијеног стабла $T$? Одредити ниво сваког листа у стаблу $T$. Да ли је стабло $T$ балансирано? Да ли је стабло $T$ потпуно бинарно стабло?

**д)** Кодирати речи „$DISKRETNA$“, „$MATEMATIKA$“, „$FON$“, „$SOS$“.

**е)** Декодирати следећи низ симбола:

–•–, –––, •–••, –––, –•–, •••–, ••, •–––, ••–, ––, •–––, •, •–••, •–, –•–

## 5. Аутомати

**41.**

**42.**

**43.**

**44.**

**45.**

**46.**

**47.**

**48.**

**49.**

**50.**