Владимир Балтић

ТЕОРИЈА ГРАФОВА

за студенте Факултета организационих наука
који слушају Дискретне математичке структуре

Б Е О Г Р А Д
2008

Садржај

4. Теорија графова

Комбинаторика (са Теоријом графова) је једна од најстаријих области математике, али и данас је веома актуелна. Неки њени проблеми су заокупљали математичаре вековима (попут проблема четири боје), док су неке области постале веома актуелне са вртоглавим развојем рачунара и њиховом све већом применом при решавању математичких проблема.

Графови су математички објекти које веома често срећемо у свакодневном животу. Ако посматрамо неку географску мапу са мноштвом градова који су повезани неким путевима – добијамо један граф. У скупу људи на неком предавању неки се међусобно познају, а неки не – ако све људе представимо тачкицама, а само оне који се познају спојимо линијама добићемо један граф, који нам даје добру слику познанства међу људима на том предавању. Структурна формула неког молекула или једињења такође представља један граф. Шема неког електричног кола у теорији кола или електроници исто представља један граф.

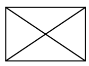
Графови налазе примену и у решавању тзв. проблема за разбибригу. Сада ћемо навести неке од њих:

- На слици су дате 3 куће и 3 бунара. Повезати сваку кућу са сва 3 бунара путевима, који се међусобно не секу.

  К К К

  Б Б Б

- Одредити највећи број дама које се могу ставити на шаховску таблу $n \times n$ тако да се оне међусобно не нападају.
- Одредити најмањи број дама које је потребно поставити на шаховску таблу $n \times n$ тако да оне нападају сва поља те табле.
- Колико има различитих постављања тих дама? (два су постављања иста ако се могу добити окретањем табле – ротацијом или симетријом у односу на неку осу табле)
- Обићи скакачем шаховску таблу $m \times n$, тако да скакач обиђе сва поља и да ни на једном не буде више од један пут.
- Може ли се једним потезом (без дизања оловке са папира) нацртати фигура са слике?



Из ове групације је настао и један од најпознатијих графовских проблема, а то је проблем 4 боје.

Због великог спектра примена, као и изузетно једноставне везе дефиниције и основних својстава, графови су они нашли и велику примену не само у другим математичким областима попут комбинаторике, комбинаторне оптимизације, операционих истраживања, линеарне алгебре, комплексне анализе, него и у другим (нематематичким) наукама као што су електротехника, рачунарство, хемија, физика, биологија, социологија, војне науке...

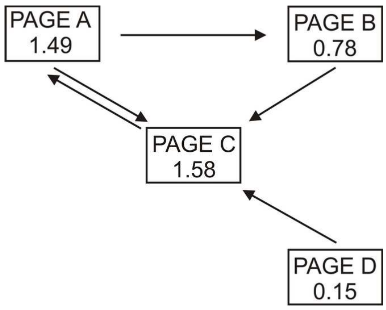
Кроз наредна 2 примера илустроваћемо примену у рачунарству.

ПРИМЕР 4.0.1. **Алгоритам ранга странице.** Највећа сопствена вредност графа се назива спектрални радијус или индекс графа (касније ћемо се детаљније упознати са овим појмом). Вектор који одговара највећој сопственој вредности графа (Перонов вектор) је база за Алгоритам ранга странице (енг. PageRank algorithm) који користи Google при претраживању. Академско цитирање радова се применило на Интернет (Web), углавном као пребројавање линкова који воде до одређене странице. Ово даје апроксимацију о квалитету, односно важности неке странице. Алгоритам ранга странице продубљује ову идеју тако што не броји линкове од свих страница подједнако, него то ради уз нормализацију броја страница које полазе из једног чвора. Алгоритам је развијен на Стенфорд Универзитету у Америци 1995. године.

Претпоставимо да на страницу A указују линкови $T_1, T_2, \ldots, T_n$ и да је параметар d фактор отказа између 0 и 1. Број $C(A)$ је број линкова који одлазе из чвора A. Тада се ранг за страницу A рачуна као:

$$PR(A) = (1-d) + d\left(\frac{PR(T_1)}{C(T_1)} + \frac{PR(T_2)}{C(T_2)} + \ldots + \frac{PR(T_n)}{C(T_n)}\right).$$

Алгоритам ранга странице формира функцију расподеле на скупу страница, тако да је сума свих рангова једнака 1. Вредности ранга страница (то су PR) се могу израчунати простим итеративним алгоритмом и одговарају координатама у Пероновом вектору матрице суседства Web-a. На наредној слици су приказане вредности ранга страница за граф са четири чвора. Напоменимо да можемо израчунати вредности ранга страница за преко 26 милиона страница за неколико сати на просечној радној страници.



ПРИМЕР 4.0.2. **Ширење вируса у рачунарским мрежама.** Спектрална теорија графова има лепе резултате који су уско повезани са физичким особинама рачунарских мрежа. Недавно је доказано да спектрални радијус графа игра важну улогу у моделирању ширења вируса у мрежама. У SIS моделу (енг. Susceptible - Infected - Susceptible) сваки чвор у мрежи је у једном од два стања: заражен (може да шири вирус) или здрав (осетљив на вирус). Овај модел такође претпоставља истовремену промену стања свих чворова. Зато, чим се неки чвор зарази постаје извор заразе, односно чим се излечи осетљив је на поновне инфекције. Епидемиолошка теорија предвиђа постојање *епидемског прага осетљивости* (енг. *epidemic threshold*). Проценат инфекције по сваком линку који је повезан на заражени чвор је једнак β, док је проценат лечења за сваки заражени чвор δ. Ефективна брзина ширења вируса је према томе дефинисана као количник β/δ. Епидемски праг осетљивости τ је онда критична вредност за β/δ: за ефективну брзину ширења вируса испод τ вирус у мрежи изумире; док у случају да је ефективна брзина ширења вируса изнад τ вирус преовлађује - константан проценат чворова остаје заражен у сваком тренутку.

Доказано је у [11] да је $\tau = \frac{1}{\rho(G)}$, где је $\rho(G)$ баш спектрални радијус матрице суседства A графа. Дакле, што је радијус мањи, то је мрежа отпорнија на нападе и ширење вируса. Ово природно доводи до постављања следећег проблема:

Који графови са n чворова имају најмањи спектрални радијус?

Познато је да пут P_n има најмањи спектрални радијус. Међутим у пракси, овакво решење није најоптималније јер би сама комуникација у мрежи била спора са могућношћу загушења. Зато постављамо додатне услове, узимајући у обзир разне инваријанте графова (дијаметар, највећи степен, итд).

4.1 Кратак историјат Теорије графова

Овде ћемо изложити кратак преглед Теорије графова, на основу радова уважених математичара у овој области Френка Харарија (енг. Frank Harary), Ралфа Грималдија (енг. Ralph P. Grimaldi) и Драгоша Цветковића (наш академик из ове области, један од најзаслужнијих за развој Теорије графова на југословенским просторима), као и из двотомне Енциклопедије комбинаторике (енг. *Handbook of Combinatorics, Vol. I & II*). У овом осврту ћемо ићи хронолошким редоследом најбитнијих резултата, са кратким историјатом математичара који су заслужни за те резултате (код математичара који су дали више резултата из Теорије графова даћемо и све наредне у истом параграфу). Сада ћемо навести најзначајније резултате из Теорије графова (неки због историјског, а неки због математичког значаје) са све њиховим ауторима. Историјски подаци су преузети из књига Френка Харарија, Драгоша Цветковића, Ралфа Грималдија и из Енциклопедије комбинаторике.

1. Леонард Ојлер (нем. Euler, 1707-1783), 1736. година, зачетак Теорије графова и Ојлерови путеви у графу; 1750. година, Ојлерова формула за полиедре.
2. Густав Кирхоф (нем. Gustav Kirchoff, 1824-1887), 1847. година, Теорема о матрицама и стаблима.
3. Ф. Наук (нем. F. Nauck), 1850. година, решио Проблем 8 дама.
4. Артур Кејли (енг. Arthur Cayley, 1821-1895), 1857. година, број разапињућих стабала потпуног графа.
5. Сер Вилијам Хамилтон (енг. Sir William Rowan Hamilton, 1805-1865), 1859. година, слагалица са Хамилтоновим путем.
6. Менгер (енг. K.Menger), 1927. година, Менгерова теорема о повезаности у графу.
7. Касимир Куратовски (пољски Kasimir Kuratowski, 1896-1980), 1930. година, Теорема Куратовског о планарним графовима.
8. Денеш Кениг (мађарски Dénes König, 1884-1944), 1936. године, објављивање Кенигове монографије — заснивање Теорије графова као самосталне дисциплине.
9. Џорџ Поља (енг. Georg Polya; мађарски György Pólya, 1887-1985), 1937. година, дао резултате који се данас називају Теорија Поље.
10. Фрухт (нем. Frucht), 1938. година, Фрухтова теорема о аутоморфизмима графа.
11. Туран (мађарски Turán), 1941. година, Туранова теорема – пионирски рад у екстремалној теорији графова.
12. Тат (W.E. Tutte), 1947. година, формулисао теорему о егзистенцији 1-фактора у графу.
13. Неш–Вилијамс (енг. Nesh, Williams), 1961. година, тврђење о грански дисјунктним ацикличним подграфовима у графу.
14. Рингел-Јангс (енг. Ringel, Youngs), 1968. година, тврђење о роду графа.
15. Кенет Апел и Волфганг Хекен (енг. Kenneth Appel, Wolfgang Haken), 1976. година, проблем 4 боје.

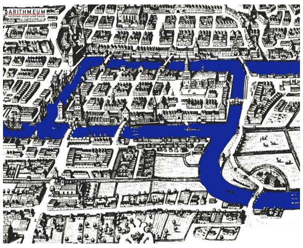
Сада ћемо о неким од ових резултата рећи мало више.

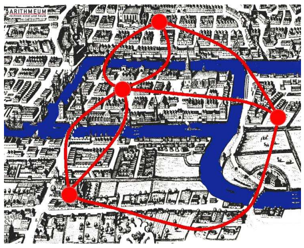
1. Швајцарском математичару Леонарду Ојлеру су током боравка у Кенигсбергу (нем. Königsberg; данашњи Калињинград) мештани поставили проблем да пређе преко свих 7 мостова (који спајају 2 обале реке Прегел међусобно и са 2 острва) тако да преко сваког пређе тачно једанпут. Ојлер је дао одречан одговор.

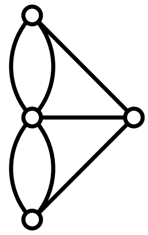
   26. августа 1735. године, Ојлер је презентовао свој рад на овом проблему Сант Петерсбургшкој академији наука доказујући да је такав обилазак мостова немогућ уз напомену да се његов метод може проширити на прозвољан распоред острва и мостова. Тачније, Ојлер је само формулисао потребне и довољне услове да такав обилазак постоји, али није сматрао да је

потребно да покаже довољне услове у општем случају. Први потпуно коректан доказ овог тврђења је дао Хирхолцер (нем. Hierholzer).

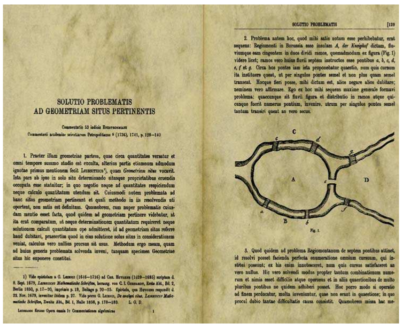
На наредној слици лево је представљена мапа Кенигсберга (из времена Ојлера) са његовим мостовима. Ојлер је свакој обали и острву придружио чворове графа, а гране између њих су били мостови. Тако је он добио један мултиграф, који је представљен на слици десно.

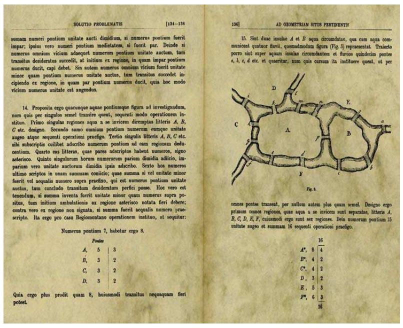






Ојлер је чланак о Проблему Кенигсбергшких мостова написао 1736. године (и стога се та година узима за оснивање теорије графова) и он је први пут објављен 1741. године, али је тада пробудио мало интереса међу осталим математичарима. Неке странице из овог рада су приказане на наредној слици. Овај проблем и резултат су остали мало познати до краја 19. века када су га енглески математичари Џорџ Лукас (енг. George Lucas, 1882.) и Раус Бол (енг. Rouse Ball, 1892.) укључили у своје књиге о рекреативној математици. Појам Ојлеровог графа за граф који се може нацртати не подижући оловку са папира се одомаћио захваљујући Кенигу, који га је искористио у својој пионирској књизи о Теорији графова (1936. године; више о њој касније).


SOLUTIO PROBLEMATIS
AD GEOMETRIAM SITUS PERTINENTIS



Тражење Ојлеровог пута налази примену у још неким проблемима Комбинаторне оптимизације, попут Проблема кинеског поштара (са којим ћемо се срести касније), али и у раду са ласерима, где нам је циљ да оптимално користимо ласер и самим тим појефтинимо цену финалног производа (методама Комбинаторне оптимизације постигнута је уштеда времена рада и до 90%).

2. Први значајнији резултати Теорије графова након Ојлерових су стигли половином 19. века. Кирхофова теорема за матрице и стабла и Кејлијева теорема (о њој ћемо касније). Оба су стигла директно из примена.

   Физичар Кирхоф је своје тврђење показао 1947. године и оно му је послужило за израчунавање јачина електричних струја у гранама неког електричног кола (јер су независни циклуси у потпуности одређени једним разапињућим стаблом). Наведимо како гласи ово тврђење.

   > Број разапињућих стабала $t(G)$ графа G једнак је било ком кофактору Лапласове матрице L.

   Ова формулација можда није најјаснија, па ћемо дати алтернативну формулацију Кирхофова теорема за матрице и стабла.

   > За произвољне $s, t \in \{1, 2, \ldots, n\}$ број разапињућих стабала $t(G)$ графа G једнак је $(-1)^{s+t}$ пута детерминанта матрице која се добија брисањем врсте s и колоне t из матрице L (матрица $L = D - A$, где је A матрица суседства графа G, а D је дијагонална матрица са степенима одговарајућих чворова, тј. $d_{ii} = d(v_i)$ и $d_{ij} = 0$, за $i \neq j$).

3. Ф. Наук (нем. F. Nauck) је 1850. година, решио Проблем 8 дама (навео свих 92 решења). Занимљиво је да је чувени Гаус није нашао сва решења, него само 72. Данас се овкви проблеми третирају рачунаром, али је занимљиво да проблем размештања дама у општем случају (када се уместо обичне шаховске плоче 8×8 посматра генералисана шаховска плоча $n \times n$) није решен.

   Ово је још један од проблема настао из такозване „рекреативне математике“. Иако је био познат и доста раније, Проблем 8 дама је први пут објављен 1848. године у часопису "Berliner Schachzeitung". Овај проблем гласи:

   > На колико начина је могуће поставити 8 дама на шаховску таблу тако да се међусобно не нападају?

   Свакој шаховској фигури може се придружити један граф на следећи начин. Нека поља шаховске табле представљају чворове графа. Из чвора x иде грана ка чвору j ако са поља x дата фигура (у нашем случају дама) може да пређе на поље y. Ово је једна веза теорије графова и шаха. Друга њихова веза долази из Теорије игара. Према Теорији игара, шаховска игра се представља графом чији су чворови поједине шаховске позиције. Овај приступ је веома битан јер се користи у писање рачунарских програма за играња шаха. На основу појединих подграфова овог графа рачунар процењује позицију и бира који је најбољи потез који може да одигра у каснијим деловима партије (за отварање користи огромне базе потеза који су развијани за отварање шаховске партије — још пре рачунара постојала је Шаховска енциклопедија отварања, која је имала 5 томова!).

   Касније ћемо увести графовску терминологију везану за проблематике положаја шаховских фигура на табли (унутрашња и спољашња стабилност графа) и тада овај проблем преведен на „графовски језик“ гласи:

   > Колико има највећих унутрашње стабилних скупова у графу придруженом шаховској фигури дами?

   Сада ћемо навести решења овог проблема. Наук је добио сва 92 решења, која се могу добити од наредних 12 основних решења ротирањем (ротацијом) и огледањем (симетријом) шаховске табле:

1°	А1, Б5, Ц8, Д6, Е3, Ф7, Г2, Х4	7°	А2, Б6, Ц8, Д3, Е1, Ф4, Г7, Х5
2°	А1, Б6, Ц8, Д3, Е7, Ф4, Г2, Х5	8°	А2, Б7, Ц3, Д6, Е8, Ф5, Г1, Х4
3°	А2, Б4, Ц6, Д8, Е3, Ф1, Г7, Х5	9°	А2, Б7, Ц5, Д8, Е1, Ф4, Г6, Х3
4°	А2, Б5, Ц7, Д1, Е3, Ф8, Г6, Х4	10°	А3, Б5, Ц2, Д8, Е1, Ф7, Г4, Х6
5°	А2, Б5, Ц7, Д4, Е1, Ф8, Г6, Х3	11°	А3, Б5, Ц8, Д4, Е1, Ф7, Г2, Х6
6°	А2, Б6, Ц1, Д7, Е4, Ф8, Г3, Х5	12°	А3, Б6, Ц2, Д5, Е8, Ф1, Г7, Х4

На претходној слици лево је приказано прво од горе наведених решења.

Сада ћемо навести још неколико занимљивих шаховских проблема.

Шаховска фигура махарџа (понегде се назива и „супердама“) је фигура која се истовремено креће као дама и скакач. Занимљива игра (тзв. махараџа) је везана за ову фигуру.

> Бели има само једног махараџу, а црни све фигуре, које се крећу и налазе на почетку према правилима шаховске игре. Бели је победник ако матира црног, а црни ако поједе махарџу.

Проблем сличан претходном је:

> На колико начина је могуће поставити 10 махараџа на шаховску таблу 10×10?

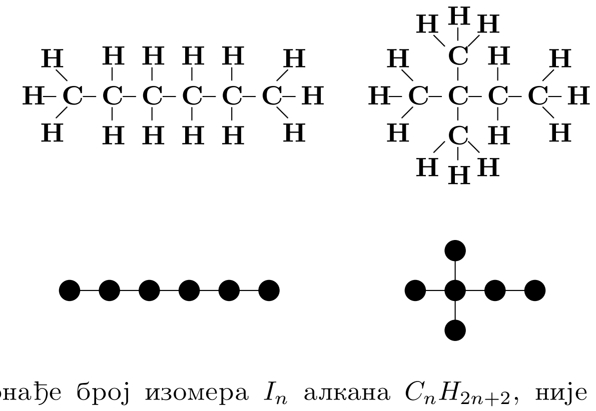
М. Ристић је показао помоћу рачунара да је то могуће на тачно 4 начина.

У шаховској литератури познат је и Проблем 5 дама. Он гласи:

> Колико је најмање дама потребно поставити на шаховску таблу (8×8) да би сва поља била нападнута? (Подразумева се да дама напада и поље не којем се налази!)

Одговор је: „Потребно је најмање 5 дама“. Поставља се питање на колико начина је могуће поставити тих 5 дама. Укупно постоји 4860 решења, која је мукотрпним пребројавањем нашао Сили (мађ. K. Szily) 1902. године. Једно решење је дато на претходној слици десно. Решења проблема 5 дама представљају минималне доминирајуће скупове у графу придруженом шаховској фигури дами.

4. Кејли је енглески математичар који је 1857. године увео у математику појам стабла. Концепт стабла су користили фон Staут (нем. Karl von Staudt, 1798-1867; у *Geometrie die Lage*) и Кирхоф десетак година раније, али је Кејли (који није био упознат са овим ранијим резултатима) поново открио овај појам и био је први који је искористио овај појам у писаном раду. Скоро у исто време (око 1859.) откривене су структурне формуле хемијских једињења. Кејли је нашао везу између ова 2 појма (он је повезао стабла и структурне формуле алкана – једињења формуле C_nH_{2n+2}) и у раду „О математичкој теорији изомера“ из 1874. године је поставио камен темељац научне дисциплине Хемијске теорије графова. На следећој слици су 2 алкана који имају формулу C_6H_{14} (имају исту формулу – они су изомери) и одговарајућа стабла (код којих су чворови угљеникови атоми, а гране везе међу њима).

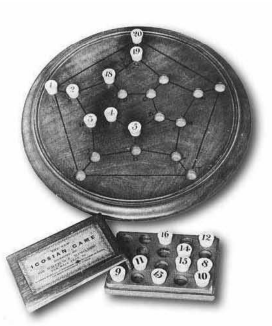


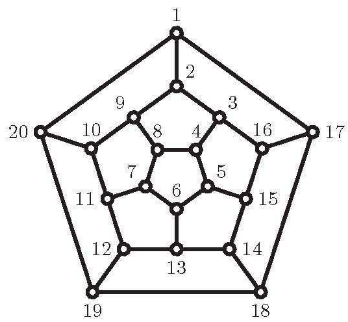
Кејли је покушао да пронађе број изомера I_n алкана C_nH_{2n+2}, није успео у томе, мада је дао неколико важних резултата везаних за пребројавање стабала. До решења овог проблема се дошло много касније – број изомерних алкана су одредили 1931. године хемичари Хинзе и Блер (енг. Henze, Blair), а општи метод за решавање оваквих енумеративних проблема је пронашао мађарско-амерички математичар Џорџ Поља 1937. године.

Кејлијев метод је био веома робустан, али му Жордан (фра. Marie Ennemond Jordan, 1838-1922) значајно поједноставио процедуре уводећи појмове центроида и бицентроида, односно центра и бицентра, у датом стаблу. На Кејлијеве резултате су се надовезали енглески математичари Силвестер и Клифорд (енг. Sylvester, Clifford). Да би представио преко диаграма везу између хемијских атома и бинарних квантова (енг. *bynary quantics*) је увео графичку нотацију, тј. краће речено графове. Силвестер је први искористио реч граф (у смислу Теорије графова) у једној приблешки о теорији инваријанти у хемији.

Касније, 1889. године, Кејли је саопштио своју формулу за број означених стабала са n чворова, тј. рекао је да их има n^{n-2}. Међутим, он је проверио само за вредности $n \leqslant 5$. Доказ је касније, 1918. године, дао Прифер (нем. H.Prüfer). Али ни то тврђење није први открио Кејли — до њега је 1860. године дошао Карл Борхарт (нeг. Carl Borchardt, 1817-1880) а Кејли је потпуно независно од овог резултата дошао до формуле која по њему носи име 19 година касније. Од тада је нађено мноштво различитих доказа. Чак је 1970. године Канађанин Џон Мун (енг. John W. Moon) написао читаву књигу о пребројавању разапињућих стабала – *Counting Labelled Trees*.

5. Енглески математичар сер Вилијам Хамилтон је 1859. године саставио занимљиву слагалицу, која је користила ивице регуларног додекаедра (тачније грана раванског графа који репрезентује додекаедар). Према њему је контура која пролази кроз све чворове графа тачно једном (тако да ни кроз једну грану не пролази више од једанпут) добила име — Хамилтонова контура. На наредној слици (лево) је приказан граф додекаедра са одговарајућом Хамилтоновом контуром (низ чворова $1-2-3-\ldots-19-20-1$).





30	21	50	9	32	19	52	7
49	10	31	20	51	8	33	18
22	29	48	61	42	27	6	53
11	60	41	28	45	62	17	34
40	23	64	47	26	43	54	5
59	12	25	44	63	46	35	16
24	39	2	57	14	37	4	55
1	58	13	38	3	56	15	36

И пре Хамилтона су се сличним проблемима, који су дошли из рекреативне математике, бавили многи математичари. Најпознатији такав проблем је Проблем коњичког скока којим су се бавили и Ојлер, Моавр, Вандермонд (фра. Moivre, Vandermonde) и Киршак (нем. Kürschak). На горњој слици десно је приказано једно решење на класичној шаховској табли 8×8. Формулишимо тај проблем.

> Да ли је могуће скакачем обићи сва поља шаховске табле, тако да се свако поље обиђе тачно једанпут?

Сада ћемо дати и графовску формулацију Проблема коњичког скока.

> Да ли у графу придруженом скакачу постоји Хамилтонов пут?

О Проблему коњичког скока постоји обимна литература. Испитивана је не само егзистенција решења на шаховским таблама различитих димензија, већ и начин конструкције и број решења. Доказано је да Проблем коњичког скока има решење на свим правоугаоним таблама димензија $m \times n$ за $m, n \geqslant 3$, изузев табли 3×3, 3×5, 3×6 и 4×4.

Иако решење Хамилтонове слагалице није много тешко пронаћи, математичари су и дан данас заокупљени проблемима везаним за Хамилтонове контуре, попут оних који траже потребне и довољне услове да би граф поседовао Хамилтонову контуру или Хамилтонов пут. Најпознатије такве теореме су дали Редеи (мађ. Rédei), Дирак, Оре (Ore) и Поша (мађ. рм Поса).

Још један веома битан проблем је повезан са Хамилтоновом контуром — то је Проблем трговачког путника.

> Дат је скуп од n градова које трговачки путник треба да посети по једанпут, таквим редоследом да трошкови пута буду минимални.

Сада ћемо навести и графовску формулацију Проблема трговачког путника.

> У задатом тежинском графу одредити Хамилтонову контуру најмање тежине.

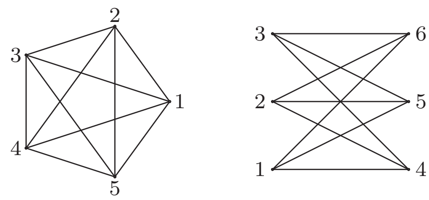
Овај класичан проблем Теорије графова је добио значајну пажњу и у Операционим истраживањима, као и компјутерству (енг. computer science). Како сам проблем тражења минималне Хамилтонове контуре изискује мног времена (чак и рачунарског!) до данас је пронађено мноштво хеуристика које дају приближно оптимално решење Проблема трговачког путника. За решавање Проблема трговачког путника користи се метода гранања и одлучивања, која се назива и имплицитна енумерација. За разлику од експлицитне енумерације (код којих пробамо све могуће пермутације скупа чворова), овде простор могућих решења делимо на мање делове (гранање) и то више пута при чему се поједини делови простора решења одбацују на основу процене вредности функције која се минимизира (ограничавање).

Доказано је да је Проблем трговачког путника NP-потпун проблем. Сви познати алгоритми за NP-потпуне проблеме имају експоненцијалну сложеност. То је у вези са хипотезом $P \neq NP$. Познато је да ако би за један NP-потпун проблем постојао полиномијални алгоритам, тада би постојао полиномијални алгоритам за сваки NP-проблем.

Генерализације проблема трговачког путника нашле су примене у раду роботских машина који обрађују матичне плоче рачунара, али и у свемирским истраживањима. Нпр. сателит Росат, који је заједнички пројекат САД, Енглеске и Немачке, у периоду од 1990. до 1998. године обилазио је око планете Земље. Он је носио телескоп који је мерио количину X-зрачења које долази са звезда. Да би уштедели и време и енергију коју троши телескоп, прибегнуто је комбинаторној оптимизацији за тражење Хамилтонове контуре кроз неколико милиона звезда. Тим поступком је посао обављен за дупло краће време.

7. Проблем планарних графова (тј. који се графови могу представити у равни, тако да им се гране не секу) је био један од најзанимљивијих отворених проблема теорије графова 20-тих година прошлог века. Пољски математичар Куратовски је 1930. године године класификовао све планарне графове, доказавши (по њему касније названу) Теорему Куратовског о планарним графовима.

   Граф је планаран ако и само ако као своју потподелу не садржи ни пентаграф K_5, ни битри-граф $K_{3,3}$.



15. Проблем 4 боје су решили Кенет Апел и Волфганг Хекен. Они су 1976. године замршеном компјутерском анализом која је садржала анализу 1936 основних конфигурација. Њихов доказ је веома дуг и компликован и ослања се на теоријске резултате низа математичара који су објављивани претходних деценија, као и на значајан рад рачунара. Тада је утрошено око 1200 часова (50 дана!) рачунарског времена. Данас је неизвесно да ли ће бити могуће доказати Проблем 4 боје који се не позива на рад рачунара.

   Проблем 4 боје тврди да се свака географска карта може обојити са 4 боје тако да свака држава буде обојена једном од боја и да суседне државе не буду обојене истом бојом. Под суседним државама се подразумевају државе које имају заједничку граничну линију (а не оне које имају једну или више изолованих заједничких граничних тачака). Такође, сматра се да је целокупна територија једне државе из једног дела (тј. није дозвољено да се једна држава састоји из више одвојених делова, што је случај код неких стварних држава). Овај проблем се односи не само на стварне географске карте, већ на све карте које се могу замислити (тј. треба га показати за произвољну карту).

   Ово је дуго био један од најпознатијих нерешених проблема теорије графова између осталог јер има и бурну и занимљиву историју. Енглески математичар Франсис Гутри (енг. Francis Guthrie, 1831-1899) је истраживао овај проблем негде око 1850. године. Гутри се заинтересовао за општи проблем, након што је обојио са 4 боје мапу Енглеске (тј. њене округе). Убрзо након тога он је показао Проблем 4 боје свом млађем брату Фредерику (енг. Frederick Guthrie, 1833-1866), који је био студент Августа Деморгана (енг. Augustus DeMorgan, 1806-1871). Деморган је 1952. године саопштио проблем сер Вилијаму Хамилтону (енг. sir William Hamilton, 1805-1865), код кога је остао незапажем наредних 25 година. Тада, 1878. године, научна зајхедница је упозната са Проблемом 4 боје, кроз саопштење Артура Кејлија на састанку Лондонског друштва математичара (енг. London Mathematical Society). Следеће, 1979. године, Кејли је формулисао проблем у првој свесци Радова Краљевског друштва географа (енг. Proceedings of the Royal Geographical Society). Убрзо након тога је британски адвокат (и аматер–математичар) сер Алфред Кемп (енг. sir Alfred Kempe, 1849-1922) дао доказ који није довођен у питање више од деценије. Ипак, 1890. године, британски математичар Хивуд (енг. Percy John Heawood, 1861-1955) је пронашао грешку у Кемповом раду. Кемпов „доказ“ је свакако најпознатији, али није једини у литератури се у последњих стотињак година појавило више „доказа“ који су се одмах или након неког времена показали нетачним. Овај доказ је битан јер се његовом прерадом показује слабији Проблем 5 боја (тј. да се свака карта може обојити са 5 боја). Прогрес у истраживању проблема 4 боје је био веома спор. 1913. године Бирхоф (нем. Birkhoff) је показао да су одређене конфигурације карте редуцибилне, у смислу да се бојење остатка карте у 4 боје може проширити на бојење целе карте. Ова идеја са редуцибилношћу се показала као главна у доказу овог тврђења. 1922. године Френклин (енг. Franklin) је искористио редуцибилност да докаже теорему за карте које садрже не више од 25 држава. У наредних 40-так година тај број је побољшан на 95 држава. Коначно, 1976. године, су Апел, Хекен и Кох (енг. Koch), уз коришћење идеја Хиша (енг. Heesch), решили Проблем 4 боје.

4.2 Основни појмови и тврђења Теорије графова

ДЕФИНИЦИЈА 4.2.1. *Граф* Γ је уређени пар (V, E). Елементи скупа V се зову *чворови* (енг. *vertex*, мн. *vertices*), а елементи скупа E *гране* (енг. *edge*, мн. *edges*) графа G. За дати граф Γ, скуп чворова се означава са $V(\Gamma)$, а скуп грана са $E(\Gamma)$.

Најчешће ћемо узимати да је у графу број чворова $|V(\Gamma)| = n$, а број грана $|E(\Gamma)| = m$ (ако се не нагласи другачије).

Мултиграфови су графови код којих се између два чвора налази више од једне гране (и самим тим E више није скуп него мултискуп). Тада говоримо о *вишеструким гранама* између 2 фиксирана чвора.

Најчешће ћемо се бадити са неоријентисаним графовима без петљи (*петља* је грана која има и почетак и крај у истом чвору) и вишеструких грана (тј. $E \subseteq \binom{V}{2}$, где је $\binom{V}{2}$ скуп свих двоелементних подскупова скупа V). Такви графови се називају *прости графови*.

ДЕФИНИЦИЈА 4.2.2. Два чвора неоријентисаног графа без петљи, u и v, су *суседни* ако су спојени граном $e = \{u, v\}$. За чвор u и грану e кажемо да су *инцидентни* (тада су и v и e инцидентни). Грана $e = \{u, v\}$ се скраћено пише $e = uv$. Две гране су *суседне* ако имају заједнички чвор.

Грана која спаја чвор са самим собом назива се *петља*.

Број суседних чворова чвору v зове се *степен чвора* v и означава са $d(v)$ (скраћено од енглеске речи *degree*; понегде се степен чвора назива и *valency*). Чвор који нема суседа називамо *изолован чвор*. Два суседна чвора су *крајње тачке* гране која их спаја. Степен чвора може се дефинисати и као број грана које се стичу у том чвору.

Најмањи степен чвора у графу G означавамо са $\delta(\Gamma)$, тј. $\delta(\Gamma) = \min\limits_{u \in V} d(u)$. *Највећи степен чвора* у графу Γ означавамо са $\Delta(\Gamma)$, тј. $\Delta(\Gamma) = \max\limits_{u \in V} d(u)$.

Граф Γ је *r-регуларан* ако је степен сваког чвора једнак r (за r-регуларне графове важи једнакост $\delta(\Gamma) = \Delta(\Gamma) = r$).

Код *оријентисаних графова* или *диграфова*, су све гране $e = (u, v)$ оријентисане, тј. битан је редослед чворова. За грану $e = (u, v)$ кажемо да води из чвора u у чвор v (тј. да излази из чвора v, а улази у чвор u). *Излазни степен чвора* v, у ознаци $d^+(v)$, је број грана које воде из чвора v. *Улазни степен чвора* v, у ознаци $d^-(v)$, је број грана које воде у чвор v. Петља се обично сматра и улазном и излазном граном за одговарајући чвор. *Ускуп* (енглески *inset*), $I(v) = \{x \mid (x, v) \in E\}$, је скуп свих чворова из којих води грана у чвор v. *Ванскуп* (енглески *outset*), $O(v) = \{x \mid (v, x) \in E\}$, је скуп свих чворова у које води грана из чвора v. Видимо да је $d^-(v) = |I(v)|$ и $d^+(v) = |O(v)|$.

Сада ћемо навести неколико теорема које важе за степене чворова (нека је $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ скуп чворова, а m број грана графа Γ).

ТЕОРЕМА 4.2.3. У неоријентисаном графу Γ, који има $n \geqslant 2$ чвора, постоје бар 2 чвора истог степена.

Доказ. Претпоставимо супротно да не постоје 2 чвора истог степена.

Неоријентисан граф Γ има n чворова те како сваки његов чвор v може бити суседан са неким од преосталих $n-1$ чворова (из $V \setminus \{v\}$) добијамо да за степен сваког његовог чвора v важи да је $d(v) \in \{0, 1, 2, \ldots, n-1\}$. Како не постоје 2 чвора истог степена и како укупно има n чворова то ће они за степене имати све бројеве из скупа $\{0, 1, 2, \ldots, n-1\}$. Али тада имамо чвор чији је степен 0 (то је чвор који није суседан ни са једним од преосталих), као и чвор чији је степен $n-1$ (то је чвор који је суседан са свим осталим чворовима), што је немогуће.

Како смо добили котрадикцију, полазна претпоставка да не постоје бар 2 чвора истог степена није тачна, чиме је тврђење теореме показано. $\square$

ТЕОРЕМА 4.2.4. У неоријентисаном графу Γ важи да је збир свих степена чворова једнак двоструком броју грана, тј. $d(v_1) + d(v_2) + \ldots + d(v_n) = 2m$.

Доказ. Степен чвора представља број грана које су инцидентне са датим чвором. Стога, ако саберемо све степене чворова, ми ћемо пребројати све гране и то сваку 2 пута (по једном код сваког њеног краја). Тиме је тврђење показано. □

ТЕОРЕМА 4.2.5. У неоријентисаном графу Γ број чворова непарног степена је паран.

Доказ. Ово тврђење је директна последица претходне теореме, јер је број на десној страни једнакости паран, па и збир на левој страни мора бити паран, што је могуће само уколико је број чворова непарног степена паран. □

Можемо дати и тврђење које нам каже да ли постоји неоријентисани граф без петљи (тј. прост граф) са датим степенима чворова. Навешћемо га без доказа.

ДЕФИНИЦИЈА 4.2.6. Низ целих бројева $(d_1, d_2, \ldots, d_n)$ је *графички* ако постоји граф G са скупом чворова $V(G) = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ тако да је $d_G(v_i) = d_i$.

ТЕОРЕМА 4.2.7. Нерастући низ целих бројева $v = (d_1, d_2, \ldots, d_n)$, где је $n-1 \geqslant d_1 \geqslant d_2 \geqslant \cdots \geqslant d_n \geqslant 0$, је графички ако и само ако је низ $v' = (d_2 - 1, d_3 - 1, \ldots, d_{d_1+1} - 1, d_{d_1+2}, \ldots, d_n)$ графички (тј. ако и само ако је низ w, који се добија од v' сортирањем тако да буде нерастући, графички).

Сада ћемо навести и једно тврђење везано за степене чворова у оријентисаном графу.

ТЕОРЕМА 4.2.8. У оријентисаном графу Γ важи

$$d^-(v_1) + d^-(v_2) + \ldots + d^-(v_n) = m = d^+(v_1) + d^+(v_2) + \ldots + d^+(v_n).$$

Доказ. Доказ је аналоган доказу Теореме 4.2.4, само што сада кад бројимо улазне степене, бројимо гране које улазе у чвор и то нам даје прву једнакост $d^-(v_1) + d^-(v_2) + \ldots + d^-(v_n) = m$, док кад бројимо излазне степене, бројимо гране које излазе из чворова, што је други део једнакости, $d^+(v_1) + d^+(v_2) + \ldots + d^+(v_n) = m$. □

Сада ћемо навести неке од основних типова графова.

ДЕФИНИЦИЈА 4.2.9. *Празан граф*, $\overline{K}_n$, са n чворова је граф који нема ниједну грану.

Комплетан граф, K_n, са n чворова је граф код кога је сваки чвор суседан са свим осталим.

Комплетан бипартитан граф, $K_{m,n}$, је граф који има 2 компоненете (једну са m, а другу са n чворова), такав да чворови из исте компоненте нису спојени граном, док су сви чворови из различитих компоненти спојени граном. *Бипартитан граф* је било који подграф комплетног бипартитног графа.

Овај појам се може проширити на *k-партитне графове*, тако што имамо k компоненти уместо 2.

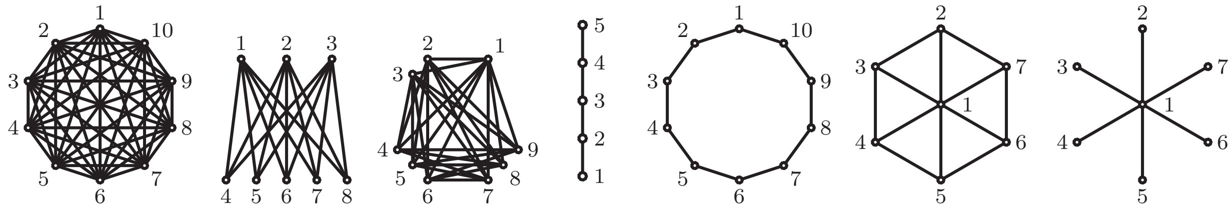
Пут P_n је повезан граф који има све чворове степена 2, сем два („крајња“) који су степена 1.

Контура C_n је повезан граф који има све чворове степена 2.

Точак $W_n = K_1 \vee C_{n-1}$ је граф који се састоји од контуре C_{n-1} и још једног чвора који је повезан са свим осталим (ако тај чвор ставимо у центар контуре добијамо слику која визуелно подсећа на точак!).

Звезда $S_n = K_1 \vee \overline{K}_{n-1}$ је граф који има 1 чвор који је повезан са свим осталим и поред тих грана нема других.

Ове графове ћемо приказати на следећој слици.



K_{10} $\quad K_{3,5}$ $\quad K_{1,2,3,3}$ $\quad P_5$ $\quad C_{10}$ $\quad W_7$ $\quad S_7$

ДЕФИНИЦИЈА 4.2.10. Граф $\Gamma' = (V', E')$ је *подграф* графа $\Gamma = (V, E)$ ако важи $V' \subseteq V$ и $E' \subseteq E$. Граф Γ је надграф графа Γ' ако је G' подграф графа Γ.

Граф $\Gamma' = (V', E')$ је *индуковани подграф* графа $\Gamma = (V, E)$ ако важи $V' \subseteq V$ и $E' = E \cap V^2$. За граф Γ' се каже и да је *подграф индукован подскупом чворова* V'. У ствари, подграф Γ' се добија од Γ тако што из Γ избацимо све чворове који нису у скупу чворова V' заједно са свим гранама које су им суседне (тј. остају само гране које повезују чворове из V').

Подграф индукован скупом грана, а на истом скупу чворова се назива *разапињући подграф*, а понегде у литератури (код нашег академика Драгоша Цветковића, који користи термин подграф за подграф индукован подскупом чворова) назива и *делимични* или *парцијални граф* графа $\Gamma = (V, E)$. Тачније, то је граф $H = (V, F)$ за који је $F \subseteq E$. У ствари, делимични граф добијамо од графа Γ тако што оставимо све чворове, а избацимо гране које нису у скупу F. Код истог аутора подграф се назива *делимични подграф*.

Бинарна релација „бити подграф“ дефинисана у скупу свих графова представља релације парцијалног уређења у том скупу (ова релација није релација тоталног поретка).

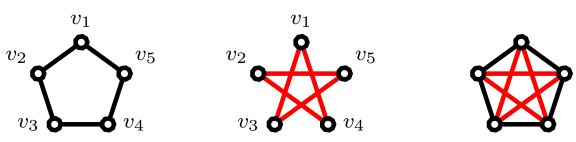
Ако је $e \in E$, онда се са $\Gamma - e$ означава подграф $(V, E \setminus \{e\})$, тј. граф који се добија од графа Γ избацивањем гране e. Ако је $e \notin E$, онда се са $\Gamma + e$ означава надграф $(V, E \cup \{e\})$, тј. граф који се добија од графа Γ додавањем гране e. Ако је $S \subseteq V$, онда се са $\Gamma - S$ означава подграф индукован подскупом чворова $V \setminus S$. Ако је $S = \{u\}$, тада се скраћено пише $\Gamma - u$.

ДЕФИНИЦИЈА 4.2.11. За графове $\Gamma_1 = (V_1, E_1)$ и $\Gamma_2 = (V_2, E_2)$ кажемо да су *изоморфни* ако постоји бијекција $f\colon V_1 \mapsto V_2$ тако да је $\{u, v\} \in E_1$ ако и само ако је $\{f(u), f(v)\} \in E_2$ (аналогно ако имамо оријентисане гране). Функција f се назива *изоморфизам* графова, а чињеницу да су графови Γ_1 и Γ_2 изоморфни означавамо са $\Gamma_1 \cong \Gamma_2$ (користићемо и $\Gamma_1 = \Gamma_2$ када то не може довести до забуне).

ДЕФИНИЦИЈА 4.2.12. Граф $\overline{\Gamma}$ је *комплемент* графа Γ ако је $V(\overline{\Gamma}) = V(\Gamma)$ и 2 чвора су суседна у Γ ако и само ако нису суседни у Γ. Граф је *самокомплементаран* ако је изоморфан са својим комплементом.

ПРИМЕР 4.2.13. Дати пример једног самокомплементарног графа.

Решење. Контура C_5 представља самокомплементаран граф. На наредној слици су представљени C_5 и $\overline{C}_5$. Један изоморфизам између ова 2 графа је дат са $f : V(C_5) \to V(\overline{C}_5)$, $f = \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 \\ v_1 & v_3 & v_5 & v_2 & v_4 \end{pmatrix}$.



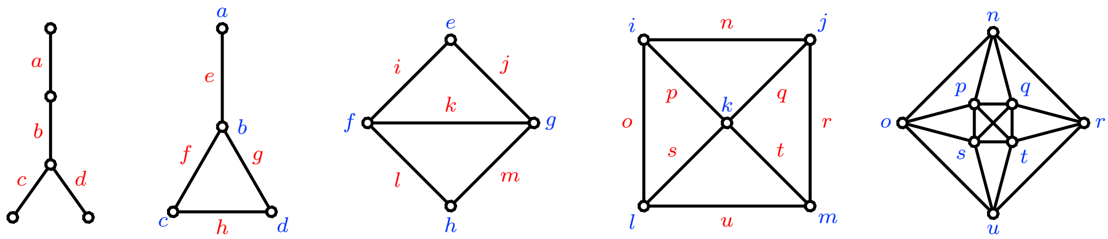
C_5 $\quad \overline{C}_5$ $\quad K_5$

На последњој слици је приказан потпун граф K_5 који се добија када бисмо узели све гране графа C_5 (представљене црном бојом) и све гране графа $\overline{C}_5$ (представљене црвеном бојом). ■

ДЕФИНИЦИЈА 4.2.14. За дати граф $\Gamma = (V, E)$, његов граф грана $L(\Gamma) = (V_1, E_1)$ је граф чији чворови представљају гране графа Γ, тј. $V_1 = E$, а два чвора из V_1 су суседна ако и само ако су одговарајуће гране из E суседне у графу Γ. Операцију прављења графа грана можемо вишеструко понављати, те стога уводимо и следеће ознаке: $L^0(\Gamma) = \Gamma$, $L^1(\Gamma) = L(\Gamma)$ и $L^{k+1}(\Gamma) = L\big(L^k(\Gamma)\big)$.

ПРИМЕР 4.2.15. За граф Γ са следеће слике лево одредити његов граф грана $L(\Gamma)$, граф грана графа грана $L^2(\Gamma)$, $L^3(\Gamma)$ и $L^4(\Gamma)$.

Решење.



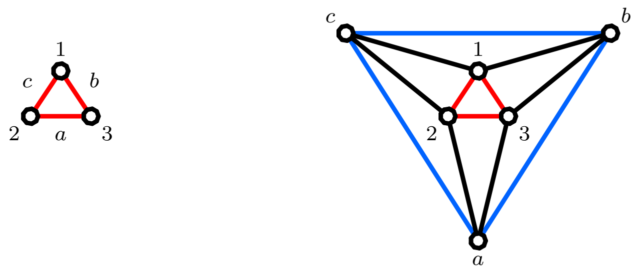
На претходној слици су редом приказани графови: Γ, $L(\Gamma)$, $L^2(\Gamma)$, $L^3(\Gamma)$ и $L^4(\Gamma)$.

Код графа Γ смо означили само гране црвеном бројом, а код $L(\Gamma)$ плавом бојом одговарајуће чворове да бисмо нагласили њихову везу. То смо наставили и код следећих графова. ■

ДЕФИНИЦИЈА 4.2.16. За дати граф $\Gamma = (V, E)$, његов тотални граф $T(\Gamma) = (V_2, E_2)$ је граф чији чворови представљају и чворове и гране графа Γ, тј. $V_2 = V \cup E$, а два чвора из V_2 су суседна ако и само ако су одговарајући елементи из $V \cup E$ суседни (ако су из истог скупа), или инцидентни (ако је један из V, а други из E).

ПРИМЕР 4.2.17. Одредити тотални граф $T(K_3)$ потпуног графа K_3.

Решење.



Код графа K_3 (који је приказан на слици лево) смо означили и чворове и гране, а код $T(K_3)$ само чворове да бисмо нагласили њихову везу. Такође је и наглашен граф K_3 (црвеном бојом је приказан на обе слике) да би видели да је он подграф графа $T(K_3)$. Такође, и граф грана $L(K_3)$ (представљен плавом бојом на слици десно) је подграф тоталног графа $T(K_3)$. ■

ДЕФИНИЦИЈА 4.2.18. *Пут дужине* k у диграфу је сваки низ грана и чворова

$$v_0, u_1, v_1, u_2, \ldots, u_k, v_k$$

за који важи да грана u_i $(i = 2, 3, \ldots, k)$ почиње у чвору v_{i-1} (у којем се завршава претходна грана u_{i-1}), а завршава у чвору v_i (из кога полази следећа грана u_{i+1}). Пут може више пута да пролази истом граном или кроз исти чвор, као и кроз петље. *Елементарни пут* или *прост пут* је пут који кроз сваки чвор графа пролази највише једанпут. *Кружни пут* или *затворен пут* или *контура* је пут који се завршава у истом чвору у којем и почиње. Код неоријентисаних графова пут често задајемо и само низом чворова кроз које пролази $v_0, v_1, \ldots, v_k$ (наравно узастопни чворови у путу су суседни у графу!). За овакав пут кажемо да је пут дужине k који повезује чворове v_0 и v_k.

Напомена. Изразе *пут* и *контура* користимо у 2 различита контекста.

Први контекст за пут је граф P_n који смо описали у Дефиницији 4.2.9; други контекст је за пут који смо дали у претходној дефиницији. Први контекст за контуру је граф C_n који смо описали у Дефиницији 4.2.9; други контекст је за елементарни кружни пут (уместо израза контура понекад се користи и *циклус*; енг. *cycle*) који смо дали у претходној дефиницији.

Разлог је што овај елементарни кружни пут чини подграф датог крафа који је изоморфан са графом C_k, што је први контекст (слично и код пута).

ДЕФИНИЦИЈА 4.2.19. *Повезаност графова.* Чворови u и v графа Γ су *повезани* ако у Γ постоји пут чији су крајњи чворови u и v. Граф Γ је *повезан* ако су свака два његова чвора повезана. Граф Γ је неповезан ако Γ није повезан. *Компоненте* графа Γ су његови максимални повезани подграфови. Њихов број означавамо са $c(\Gamma)$. Неки аутори користе ознаку $\omega(\Gamma)$.

У графу Γ чвор v је *везивни чвор* (понегде се назива и *артикулациони чвор*; енг. *cut vertex* или *articulation vertex*) уколико се његовим уклањањем (са свим гранама које су инцидентне са њим) повећава број компоненти, тј. $c(\Gamma) < c(\Gamma - v)$. Грана e је *мост* (енг. *bridge* или *cut edge* или *isthmus*) у графу Γ ако се њеним уклањањем повећава број компоненти, тј. $c(\Gamma) < c(\Gamma - e)$.

Сада ћемо увести неке појмове само за повезане графове.

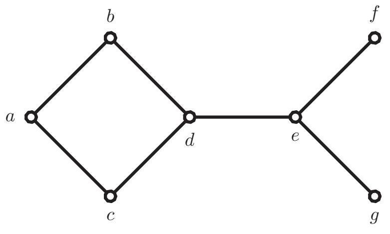
ДЕФИНИЦИЈА 4.2.20. Ако су чворови u и v графа Γ повезани, тада је *растојање* $d_\Gamma(u, v)$ од чвора u до чвора v једнако дужини најкраћег пута између чворова u и v. *Дијаметар графа* $\Gamma = (V, E)$ је дат са $D(\Gamma) = \max\limits_{u,v \in V} d_\Gamma(u, v)$. *Ексцентрицитет чвора* u је $\epsilon_\Gamma(u) = \max\limits_{v \in V} d_\Gamma(u, v)$. *Радијус графа* Γ је $r(\Gamma) = \min\limits_{v \in V} \epsilon_\Gamma(v)$. *Растојање чвора* u је $d_\Gamma(u) = \sum\limits_{v \in V} d_\Gamma(u, v)$.

Ексцентрицитет чвора је растојање чвора u од њему најудаљенијег чвора, дијаметар повезаног графа Γ једнак је највећем ексцентрицитету неког чвора тог графа, док је радијус графа Γ једнак је износу најмањег ексцентрицитета. Растојање чвора u једнако је суми растојања између чвора u и свих осталих чворова графа Γ (обратити пажњу да имамо 2 веома сличне ознаке: $d(u)$ представља степен чвора u, док смо са $d_\Gamma(u)$ означили растојање чвора u).

Сви чворови графа чији је ексцентрицитет једнак радијусу образују *центар графа.*

Чворове са најмањим ексцентрицитетом можемо схватити као својеврсни *центар* графа, док чворове са највећим ексцентрицитетом, аналогно томе, можемо схватити као *периферију* графа.

ПРИМЕР 4.2.21. Одредити растојања између свих чворова у графу Γ са следеће слике, као и ексцентрицитете чворова.



Решење. Растојања између чворова у графу Γ су дата у наредној табели.
У последњој колони се налазе ексцентрицитети чворова.

	a	b	c	d	e	f	g	ecc(v)
a	0	1	1	2	3	4	4	4
b	1	0	2	1	2	3	3	3
c	1	2	0	1	2	3	3	3
d	2	1	1	0	1	2	2	2
e	3	2	2	1	0	1	1	3
f	4	3	3	2	1	0	2	4
g	4	3	3	2	1	2	0	4

Дијаметар овог графа је 4, а радијус је 2. ■

Напомена. Матрица која је добијена у претходном примеру,

$$D(\Gamma) = \begin{Vmatrix} 0 & 1 & 1 & 2 & 3 & 4 & 4 \\ 1 & 0 & 2 & 1 & 2 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & 2 & 3 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 1 & 2 & 2 \\ 3 & 2 & 2 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & 3 & 2 & 1 & 0 & 2 \\ 4 & 3 & 3 & 2 & 1 & 2 & 0 \end{Vmatrix}$$

назива се матрица растојања графа (и са њом ћемо се срести касније).

Приметимо да у овом конкретном случају важи да је $D(\Gamma) = 2 \cdot r(\Gamma)$, међутим, у општем случају важи само да је

$$r(\Gamma) \leqslant D(\Gamma) \leqslant 2 \cdot r(\Gamma).$$

Пример графа за који важи да једнакост између радијуса и дијаметра је циклус C_n, $n \geqslant 3$, за који је $r(C_n) = D(C_n) = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$.

Поставља се питање шта ако граф Γ није повезан!? Растојање између чворова се тада може дефинисати за сваки пар чворова који припада истој компоненти повезаности. Међутим, ако се чворови u и v налазе у различитим компонентама графа Γ, тада се по конвенцији узима да је $d_\Gamma(u, v) = \infty$. У том случају су и дијаметар и радијус графа Γ недефинисани (односно, можемо узети да су по конвенцији и они једнаки ∞).

4.3 Разни начини представљања графова

Матрица суседства графа

ДЕФИНИЦИЈА 4.3.1. Граф може бити представљен и квадратном матрицом чији је ред једнак броју чворова графа. Елемент a_{ij} једнак је броју грана које полазе из чвора v_i, а завршавају се у чвору v_j. Ова матрица се назива *матрица суседства графа* и обележава се са A.

Ако допустимо да два чвора могу бити спојена највише једном граном исте оријентације, тада елементи матрице A могу бити само 0 или 1. Матрице са оваквим елементима називају се *дијадске* или *социометријске матрице*. Елементи матрице суседства мултиграфа су природни бројеви и нула. Матрица суседства неоријентисаног графа је симетрична матрица, тј. за њу важи $A = A^T$. Траг матрице A је једнак збиру елемената на главној дијагонали, $\operatorname{tr} A = \sum\limits_{i=1}^{n} a_{ii}$. Граф нема петљи ако и само ако је $\operatorname{tr} A = 0$.

ДЕФИНИЦИЈА 4.3.2. Матрица A је *слична* са матрицом B ако постоји регуларна (несингуларна) матрица X таква да је $A = X^{-1}BX$, и тада пишемо $A \sim B$.

Напомена. Матрица суседства графа A зависи од нумерације чворова, али се може показати да су све матрице суседства једног графа међусобно сличне. У овом случају је матрица X *пермутациона матрица*, тј. матрица која у свакој врсти и свакој колони има тачно један елемент 1 и све остале 0.

ПРИМЕР 4.3.3. На следећој слици имамо два изоморфна графа Γ_1 и Γ_2 (тј. имамо један исти граф са 2 различите нумерације чворова). Одредити њихове матрице суседства.

Γ_1 Γ_2

Решење. Овим графовима одговарају различите матрице суседства. То су $A_1 = \begin{Vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{Vmatrix}$ и $A_2 = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{Vmatrix}$, али су оне сличне јер постоји матрица $X = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{Vmatrix}$, таква да је $A_1 = X^{-1}A_2X$. Оба графа Γ_1 и Γ_2 представљају исти граф – пут са 3 чвора, P_3. ■

ТЕОРЕМА 4.3.4. Графови Γ_1 и Γ_2 су изоморфни ако и само ако су њихове матрице суседства пермутационо сличне, тј. ако и само ако постоји пермутациона матрица P таква да је $A_{\Gamma_2} = PA_{\Gamma_1}P^{-1}$. □

ТЕОРЕМА 4.3.5. Број путева дужине k који спајају чворове v_i и v_j једнак је елементу $a_{ij}^{(k)}$, тј. елементу на позицији (i, j) у матрици A^k.

Доказ. Тврђење ћемо показати математичком индукцијом по k.

За $k = 0$ ($A^0 = I$) и за $k = 1$ ($A^1 = A$ је матрица суседства) тврђење је тачно. ✓

Нека је тврђење тачно за $k = K$.

Из једнакости $a_{ij}^{(K+1)} = \sum\limits_{t=1}^{n} a_{i\,t}^{(K)} a_{tj}$, закључујемо да је $a_{ij}^{(K+1)}$ једнак броју путева дужине $K + 1$ који спајају чворове v_i и v_j. ✓

На основу Принципа математичке индукције добијамо да тврђење важи за сваки $k \in \mathbb{N}$. □

Листа суседства графа

Већ смо рекли да се графови могу употребити за моделирање и решавање многих практичних проблема. Такве проблеме решавамо уз помоћ рачунара и посебно за то писаних програма, а као први корак неопходно је да знамо како се граф може представити у рачунару. Постоје два уобичајена начина за то: помоћу *листи суседства* и помоћу *матрице суседства*.

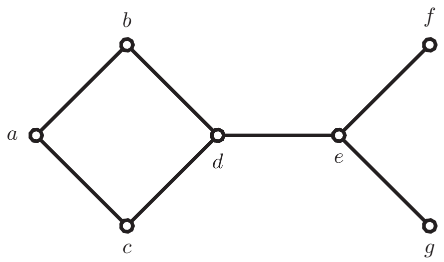
ДЕФИНИЦИЈА 4.3.6. За сваки чвор u графа $\Gamma = (V, E)$, *листа суседства* l_u садржи све чворове који су суседни са њим у Γ,

$$l_u = \{v \in V : \{u, v\} \in E\}$$

Свако од ових представљања има своје мане и предности. Основне разлике међу њима тичу се потрошње меморије и брзине којом се може установити да ли су два чвора суседна. Листе суседства ефикасно користе меморију јер је потребно ускладиштити свега $2|E|$ података, међутим, када желимо да установимо да ли су чворови u и v суседни, морамо да претражимо целу листу суседа за чвор u (или чвор v). С друге стране, матрица суседства садржи $|V|^2$ података, без обзира колики је број грана у графу, али се зато суседство чворова u и v испитује увек у константном времену помоћу вредности $A_{u,v}$.

С обзиром да је нешто једноставније написати програме који користе матрице суседства, оне су данас најзаступљеније у пракси. Међутим, листе суседства добијају примат када треба сместити граф са великим бројем чворова, а релативно малим бројем грана (у поређењу са $|V|^2$).

ПРИМЕР 4.3.7. Одредити листе суседства свих чворова графа Γ приказаног на следећој слици. Одредити и матрицу суседства графа Γ.



Решење. Листе суседства и матрица суседства графа су дате у следећим табелама.

u	l_u
a	$\{b, c\}$
b	$\{a, d\}$
c	$\{a, d\}$
d	$\{b, c, e\}$
e	$\{d, f, g\}$
f	$\{e\}$
g	$\{e\}$

	a	b	c	d	e	f	g
a	0	1	1	0	0	0	0
b	1	0	0	1	0	0	0
c	1	0	0	1	0	0	0
d	0	1	1	0	1	0	0
e	0	0	0	1	0	1	1
f	0	0	0	0	1	0	0
g	0	0	0	0	1	0	0

$$A = \begin{Vmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{Vmatrix}$$

■

Матрица инциденције чворова и грана

У случају оријантисаних и неоријентисаних графова имамо различите матрице инциденције.

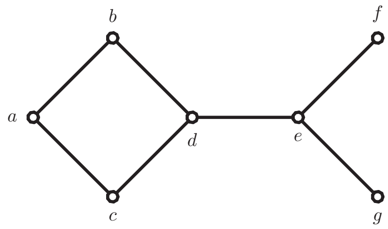
ДЕФИНИЦИЈА 4.3.8. Нека је $\Gamma = (V, E)$ неоријентисан граф код кога је скуп чворова $V(\Gamma) = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ и скуп грана $E = \{e_1, e_2, \ldots, e_m\}$. Тада је *матрица инциденције чворова и грана*, $R = [r_{ij}]$ дата са

$$r_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{чвор } v_i \text{ је инцидентан са граном } e_j \\ 0 & \text{чвор } v_i \text{ није инцидентан са граном } e_j \end{cases}.$$

Ова матрица је матрица облика $n \times m$. Број јединица у i-тој врсти матрице R једнак је броју грана инцидентних са чвором v_i, тј. степену чвора v_i, $d(v_i)$. У свакој колони се налазе по 2 јединице, што одговара чињеници да је свака грана инцидентна са 2 чвора.

Илуструјмо овај појам на графу из Примера 4.3.9.

ПРИМЕР 4.3.9. Одредити матрицу инциденције чворова и грана графа Γ.



Решење.

	ab	ac	bd	cd	de	ef	eg
a	1	1	0	0	0	0	0
b	1	0	1	0	0	0	0
c	0	1	0	1	0	0	0
d	0	0	1	1	1	0	0
e	0	0	0	0	1	1	1
f	0	0	0	0	0	1	0
g	0	0	0	0	0	0	1

$$R = \begin{Vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}$$

■

ДЕФИНИЦИЈА 4.3.10. Нека је $\Gamma = (V, E)$ оријентисан граф код кога је скуп чворова $V(\Gamma) = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ и скуп грана $E = \{e_1, e_2, \ldots, e_m\}$. Тада је *матрица инциденције чворова и грана*, $S = [s_{ij}]_{n,m}$ дата са

$$s_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{ако грана } e_j \text{ излази из чвора } v_i \\ 0 & \text{ако грана } e_j \text{ и чвор } v_i \text{ нису суседни} \\ -1 & \text{ако грана } e_j \text{ улази у чвор } v_i. \end{cases}$$

Она се још назива и *означена* $(-1, 0, 1)$-*матрица инциденције чворова и грана.*

Ова матрица је матрица облика $n \times m$. Број -1 у i-тој врсти матрице R једнак је броју грана које улазе у чвор v_i, тј. улазном степену чвора v_i, $d^-(v_i)$. Број 1 у i-тој врсти матрице R једнак је броју грана које излазе из чвора v_i, тј. излазном степену чвора v_i, $d^+(v_i)$. У свакој колони се налазе по један елемент -1 и 1, што одговара чињеници да је свака грана излази из тачно једног чвора и улази у тачно један чвор.

Матрица растојања графа

Нека је граф Γ повезан. Тада можемо увести још једну матрицу — то је матрица растојања између чворова у том графу.

ДЕФИНИЦИЈА 4.3.11. Граф може бити представљен и квадратном матрицом $D(\Gamma)$ чији је ред једнак броју чворова графа. Елемент d_{ij} једнак је растојању између чвора v_i и чвора v_j. Ова матрица се назива *матрица растојања графа.*

Ако нам је позната матрица растојања чворова $D(\Gamma)$ онда матрицу суседства A добијамо тако што све елементе који су већи од 1 заменимо са 0. За обрнути поступак постоји неколико алгоритама (један ћемо касније дати).

ТЕОРЕМА 4.3.12. Најкраћи пут који повезује 2 чвора у графу са n чворова не може бити дужи од $n-1$.

Доказ. Претпоставимо супротно да је најкраћи пут P који повезује 2 чвора u и v дужине $s > n-1$. Тада се најкраћи пут P састоји од $s+1$ чвора (рачунајући и почетни u и крајњи v): $P = u = v_0, v_1, v_2, \ldots, v_{s-1}, v_s = v$. Али како је $s+1 > n$, по Дирихлеовом принципу овај пут садржи 2 иста чвора. Нека су то v_i и v_j, уз $i < j$. Уочимо пут $P' = v_0, \ldots, v_i, v_{j+1}, \ldots, v_s$ (добијен избацивањем дела пута између 2 боравка у истом чвору $v_i = v_j$). Тај пут је краћи од P и повезује чворове $v_0 = u$ и $v_s = v$, што је у контрадикцији са минималношћу пута P. Тиме је тврђење показано. $\square$

Матрицу $D(\Gamma)$ можемо добити од матрице суседства A графа Γ са n чворова на један од следећих начина:

- Дајкстриним алгоритмом можемо одредити растојање између 2 фиксирана чвора у графу, па тај алгоритам можемо вишеструко примењивати на све парове чворова у графу;
- Одредити све матрице $I, A, A^2, A^3, \ldots, A^{n-1}$, па онда на позицију d_{ij} матрице $D(\Gamma)$ уписујемо број k такав да се на позицијама (i,j) у матрицама $I, A, A^2, \ldots, A^{k-1}$ налази 0, а у A^k је елемент већи од 0;
- Флојд-Воршаловим алгоритмом.

Сада ћемо навести Флојд-Воршалов алгоритам. Прво ћемо дати једну напомену.

У првом кораку овог алгоритма уводимо ознаку ∞ (на крају алгоритма, та ће ознака остати за све чворове који нису повезани). Ако нека 2 чвора нису повезана онда можемо рећи је њихово растојање „бесконачно“. Такође разлог можемо наћи и ако посматрамо неку електричну шему и ако прекинемо неку жицу између 2 чвора онда ту више неће тећи струја иако имамо разлику потенцијала између та 2 чвора (напон) те можемо рећи да је између ова 2 чвора „бесконачна“ отпорност. У практичним примена за ∞ можемо узети неки довољно велики број доста већи од свих бројева у A, нпр. неки број већи од $n \cdot \max\limits_{1 \leqslant i,j \leqslant n} a_{ij}$.

```
D(Γ) := A и 0 ван дијагонале се замене са ∞
for k := 1 to n
  for i := 1 to n
    for j := 1 to n
      d_ij := min(d_ij, d_ik + d_kj)
    end for
  end for
end for
```

Напомена. Флојд-Воршалов алгоритам смо дали тако да ради и за тежинске графове (тј. графове код којих нису исте „дужине“ грана). Овим алгоритмом можемо утврдити и да ли је граф повезан. Ако и само ако у матрици $D(\Gamma)$ имамо неки елемент који је једнак ∞ онда је граф Γ неповезан.

4.4 Ојлерови графови

Тврђење Ојлерове теореме ћемо формулисати у јачем облику, за мултиграфове (тј. и ако између 2 чвора има више од једне гране). Један од разлога је и што је граф који одговара мостовима у Кенигсбергу уствари мултиграф (други важнији разлог је што ће нам доказивање наредних теорема бити мало једноставније). Прости графови (са којима највише радимо у овој књизи) су специјални случај мултиграфова код којих између свака 2 чвора постоји једна или ниједна грана.

Уведимо неколико дефиниција које су нам потребне за наредне теореме.

ДЕФИНИЦИЈА 4.4.1. *Ојлерова контура* мултиграфа Γ је затворена стаза која садржи све гране из Γ. (Мулти)граф који има Ојлерову контуру назива се *Ојлеров (мулти)граф.*

Ојлеров пут у мултиграфу Γ је стаза која садржи све гране из Γ (може бити и да није затворена стаза). (Мулти)граф који има Ојлеров пут назива се *полуојлеров (мулти)граф.*

Прво ћемо дати једно помоћно тврђење.

ТЕОРЕМА 4.4.2. Ако је у графу Γ најмањи степен чвора $\delta \geqslant 2$, онда Γ садржи циклус.

Доказ. Претпоставимо супротно — да је Γ ацикличан. Тада је Γ шума и свака њена компонента повезаности H је стабло. Али како у сваком нетривијалном стаблу (ако је тривијално састоји се од једног изолованог чвора v и за њега треба да важи $d(v) \geqslant \delta \geqslant 2$, што је контрадикција јер је $d(v) = 0$) према тврђењу за стабла у сваком стаблу постоје бар 2 чвора степена 1, добијамо контрадикцију са полазном претпоставком $\delta \geqslant 2$, те G садржи циклус. □

ТЕОРЕМА 4.4.3. **Ојлерова теорема.** Повезан мултиграф са бар једном граном је Ојлеров ако и само ако садржи све чворове парног степена.

Доказ. $\Rightarrow$: Ако се крећемо по Ојлеровој контури, онда увек када неком граном уђемо у неки чвор, морамо користити неку другу грану (коју још нисмо користили!) да изађемо из тога чвора. Како код Ојлерове контуре морамо проћи кроз све гране (и на крају се вратити у полазни чвор) добијамо да су степени свих чворова парни.

$\Leftarrow$: Претпоставимо да је степен сваког чвора у повезаном мултиграфу паран и помоћу математичке индукције (по броју грана) докажимо да тај мултиграф садржи Ојлерову контуру.

За повезани мултиграф са 2 гране тврђење је тачно (то је мултиграф ). Претпоставимо да је тврђење тачно за све мултиграфове са мање од m грана и посматрајмо повезани мултиграф Γ са m грана код кога су сви чворови парног степена.

Према претходној леми постоји циклус s у овом графу. Избацимо из мултиграфа Γ гране из s. Добијени подмултиграф H, не мора бити повезан, али му сви чворови имају паран степен. Свака од компоненти повезаности H_i по индуктивној претпоставци садржи Ојлерову контуру s_i (Ојлерову у тој компоненти!). Како је мултиграф Γ био повезан, свака од стаза $s_1, s_2, \ldots, s_k$ има бар један заједнички чвор са затвореном стазом s. Тражену затворену Ојлерову стазу добијамо тако што се крећемо по стази s и кад год наиђемо на неки чвор u који се налази на затвореној стази s_i коју нисмо обишли, из њега скренемо и обиђемо целу стазу s_i (на крају тог обиласка смо поново у чвору u), а затим настављамо обилазак по стази s (са потребним скретањима за остале стазе s_j).

Тиме смо добили да и за повезани мултиграф са m грана и свим чворовима парног степена постоји Ојлерова контура, па по принципу математичке индукције овај смер теореме важи за сваки мултиграф који испуњава услове. □

Последица претходне теореме је и следеће тврђење.

ПОСЛЕДИЦА. 4.4.4. Повезан мултиграф са бар једном граном је полуојлеров ако и само ако садржи 0 или 2 чвора непарног степена.

Доказ. $\Rightarrow$: Ако мултиграф поседује Ојлеров пут (тј. затворену Ојлерову стазу или Ојлерову стазу), тада аналогно као и у претходној теореми добијамо да сваки чвор (сем можда почетног и крајњег ако су различити) има паран степен.

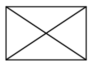
$\Leftarrow$: Ако повезан мултиграф има 0 чворова непарног степена онда задовољава услове Ојлерове теореме па садржи (затворену) Ојлерову стазу.

Ако повезан мултиграф Γ има 2 чвора непарног степена (u и v) онда од њега можемо направити мултиграф H, тако што ћемо графу Γ додати још једну грану $e = \{u, v\}$. Граф H према Ојлеровој теореми садржи Ојлерову контуру. Избацивањем гране e из ове Ојлерову контуру добијамо Ојлеров пут који полази из чвора u и завршава се у чвору v. □

ПРИМЕР 4.4.5. На основу претходне теореме видимо да обилазак мостова у Кенигсбергу није могућ јер одговарајући граф има степене чворова 5,3,3,3, те он није ни полуојлеров, а поготово није Ојлеров. ■

Вратимо се сада на пример са почетка, везан за постојање Ојлерове контуре.

ПРИМЕР 4.4.6. Може ли се једним потезом (без дизања оловке са папира) нацртати фигура са слике?



Решење. У одговарајућем графу имамо 5 чворова који имају степене 3,3,3,3,4, па на основу Ојлерове теореме у том графу не постоји Ојлеров пут (а самим тим ни Оjелрова контура), те је дату слику немогуће нацртати једним потезом. ■

У претходним теоремама смо дали потребне и довољне услове за егзистенцију Ојлерове контуре, односно Ојлеровог пута. Сада ћемо дати поступак за налажење Ојлерове контуре у Ојлеровом графу (са мањом модификацијом добијамо Ојлеров пут). То је алгоритам Флерија (енг. Fleury) који конструише Ојлерову контуру тако што у сваком кораку бира мост само ако нема другог избора. Улаз за овај алгоритам је Ојлеров граф Γ, а излаз је низ чворова и грана W који представљају Ојлерову контуру.

procedure *Flerijev algoritam*(G)
$v := v_0$
  // претпоставља се да је изабран произвољан чвор $v_0 \in V(\Gamma)$
$W := v_0$
$H := \Gamma$
while $E(H) \neq \emptyset$
  // нека је до сад изабрана стаза $W = v_0, e_1, v_1, \ldots, e_i, v_i$
 begin
  изабрати $e_{i+1} \in E(H)$ тако да важе услови:
   1) e_{i+1} је суседна са v_i;
    // тј. $e_{i+1} = \{v_i, v_{i+1}\}$
   2) e_{i+1} није мост у H (изузев ако нема другог избора).
  $W := W, e_{i+1}, v_{i+1}$
  $H := H - e_{i+1}$
   // из H избацимо e_{i+1}, а у стазу W допишемо e_{i+1} и v_{i+1}
 end
end procedure

Доказ да Флеријев алгоритам даје Ојлерову контуру може се наћи у књизи [5].

Ојлерове контуре су од интереса за организације које у великим градовима домаћинствима врше неке услуге (нпр. разносе пошту). Организатори великих изложби морају (ако хоће да посетиоци виде све експонате и да прелазе што мањи пут) да одреде један Ојлеров пут у графу одређеном изложбеним простором и стазама кроз њега. Најпознатији овакав проблем је Проблем кинеског поштара (добио такво име јер га је први разматрао кинески математичар Куан 1962. године).

У пошти поштар ујутру узима писма, обилази улице у свом реону и на крају радног дана враћа се у пошту. Поштар ће најрационалније разнети писма у свом реону ако кроз сваку улицу прође тачно једанпут. То је могуће само ако је одговарајући граф Ојлеров, а у осталим случајевима се тражи оптимално решење, тј. да поштар одабере марш-руту којом ће ходати што је мање могуће. Овај проблем је у литератури познат као Проблем кинеског поштара.

Решење овог проблема добија се комбинацијом Флеријевог алгоритма и алгоритма Едмондса и Џонсона (енг. Edmonds, Johnson; 1974. година). У алгоритму Едмондса и Џонсона вршимо дуплицирање постојећих ивица тежинског мултиграфа Γ, тако да у тежинском Ојлеровом надграфу Γ^* сума $\sum_{e\in E(\Gamma^*)} w(e)$ буде минимална (овде је функција w додељује тежину свакој грани). Затим Флеријевим алгоритмом пронађемо Ојлерову контуру у Γ^* и то је тражени пут поштара.

4.5 Хамилтонови графови

ДЕФИНИЦИЈА 4.5.1. *Хамилтонова контура* графа Γ је затворен пут који садржи све чворове из Γ. Граф који има Хамилтонову контуру назива се *Хамилтонов граф*.

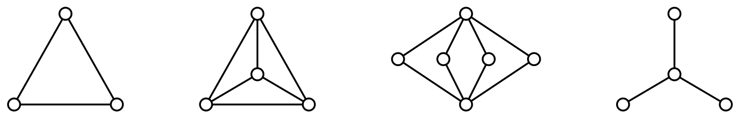
Хамилтонов пут у графу Γ је пут који садржи све чворове из Γ. Граф који има Хамилтонов пут назива се *полухамилтонов граф*.

Међу дефиницијама Ојлерових и Хамилтонових графова постоји велика сличност, али је потпуно другачија ситуација када је у питању њихова карактеризација. Ојлерови графови су у потпуности одређени Ојлеровом теоремом, док за Хамилтонове графове тако нешто није познато. Један од највећих нерешених проблема Теорије графова је одредити потребан и довољан услов да је граф Хамилтонов.

Ојлерови и Хамилтонови графови немају неку директну везу. То показује и следећи пример.

ПРИМЕР 4.5.2. Дати примере графова који су истовремено Ојлерови и Хамилтонови, нису Ојлерови а јесу Хамилтонови, јесу Ојлерови а нису Хамилтонови, нису ни Ојлерови ни Хамилтонови.

Решење. Ојлеров и Хамилтонов граф је контура C_n, нпр. C_3. Потпун граф K_4 није Ојлеров, а јесте Хамилтонов. Потпун бипартитини граф $K_{2,4}$ јесте Ојлеров, а није Хамилтонов. Звезда $S_3 = K_{1,3}$ није ни Ојлеров ни Хамилтонов граф.

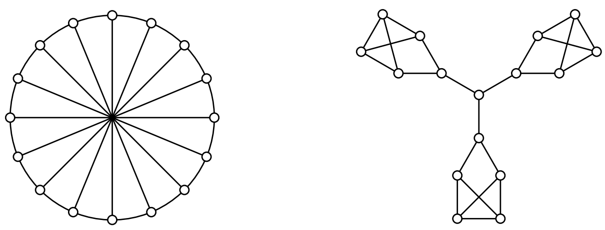


■

Још општије, имамо да егзистенција Хамилтоновог пута не зависи само од степена чворова, што показује следећи пример.

ПРИМЕР 4.5.3. Дати пример графова са истим низом степена чворова, од којих један има Хамилтонов пут, а други нема.

Решење. Први граф (који се састоји од контуре C_{16} код које су спојени наспрамни чворови) има не само Хамилтонов пут, него и Хамилтонову контуру. Други граф не поседује Хамилтонов пут јер кад пређемо из једног дела у други пролазимо кроз централни чвор, тако да у њега не можемо поново доћи, а само из њега можемо прећи у трећи део овог графа.



Оба графа имају исте степене чворова јер су 3-регуларни (тј. сви степени су им 3). Стога не постоји критеријум само на основу степена чворова који одређује да ли је граф полухамилтонов (а самим тим и Хамилтонов) или није. ■

Сада ћемо дати неколико само потребних, односно само довољних услова за Хамилтонове графове.

ТЕОРЕМА 4.5.4. Ако је Γ Хамилтонов граф, онда за сваки прави подскуп $\emptyset \neq S \subset V(\Gamma)$ важи $\omega(\Gamma - S) \leqslant |S|$, тј. број компоненти повезаности графа $\Gamma - S$ није већи од броја елемената скупа S.

Доказ. Нека је C Хамилтонова контура у графу Γ. Тада је њен скуп грана подскуп скупа грана графа, тј. $E(C) \subseteq E(\Gamma)$. Одавде добијамо и да је $E(C-S) \subseteq E(\Gamma-S)$, што повлачи $\omega(\Gamma-S) \leqslant \omega(C-S)$ јер се додавањем нових грана не повећава број компоненти у графу (ако додамо грану између чворова из исте компоненте онда број компоненти остаје исти, а ако додамо грану између чворова различитих компонентни онда се смањи за 1).

Уклањањем чворова из скупа S контура C се распада на један или више путева. Број тих путева је мањи од или једнак са бројем елемената скупа S (избацивањем сваког новог чвора из S добијамо нов пут ако тај чвор није суседан у C са неким претходно избаченим), тј. важи $\omega(C-S) \leqslant |S|$.

Са ове 2 неједнакости добијамо тражену $\omega(\Gamma-S) \leqslant \omega(C-S) \leqslant |S|$. □

Коришћење претходне теореме за испитивање да ли је граф Хамилтонов илустроваћемо следећим примером.

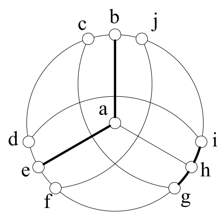
ПРИМЕР 4.5.5. Показати да граф са леве слике не поседује Хамилтонову контуру.

Решење. Ако за скуп S узмемо 3 црна чвора (сваки од тих чворова је спојен са свим осталим), тада ће се граф који остане када избацимо ова 3 чвора (приказан на слици десно) састојати од једног троугла и три изолована чвора, тј. то је граф $\Gamma - S = K_3 \cup K_1 \cup K_1 \cup K_1$. Он има 4 компоненте повезаности, $\omega(\Gamma - S) = 4$. Како важи $\omega(\Gamma - S) = 4 > 3 = |S|$ добијамо да граф Γ не садржи Хамилтонову контуру. ■

Следећим примером ћемо показати да услов Теореме 4.5.4 није и довољан услов за Хамилтонове графове.

ПРИМЕР 4.5.6. Показати да Петерсенов граф (граф са наредне слике) није Хамилтонов.

Решење. Претпоставимо да Петерсенов граф садржи Хамилтонову контуру C. Без губитка општости, можемо да претпоставимо да је у контури C чвор a суседан са чворовима b и e. Одатле следи да чвор h, трећи сусед чвора a, мора да буде суседан са чворовима g и i у C. Сада постоје три случаја, у зависности од тога са којим чворовима су у контури C суседни чворови b и e.



1° Чвор b је суседан са c, а чвор e је суседан са d. Сада чворови c и d не могу да буду суседни у C, иначе се образује контура $abcdea$, која није Хамилтонова. Према томе, у C чвор c мора да буде суседан са g, а чвор d са i. Међутим, тада се формира контура $abcghidea$, која такође није Хамилтонова, па је овај случај немогућ.

2° Чвор b је суседан са c, а чвор e је суседан са f (овај случај је аналоган случају када је чвор b суседан са j, а чвор e суседан са d). Чвор j не може да буде суседан са b у C, па стога j мора да буде суседан са f и i у C. Слично, чвор d не може да буде суседан са e у C, па стога d мора да буде суседан са c и i у C. Међутим, тада чвор i мора да буде суседан у C са чворовима d, h и j, што није могуће.

3° Чвор b је суседан са j, а чвор e је суседан са f. Чворови f и j не могу да буду суседни у C, иначе се формира контура $abjfea$, која није Хамилтонова. Према томе, у C чвор j мора да буде суседан са i, а чвор f са g. Међутим, тада се формира контура $abjihgfea$, која такође није Хамилтонова, па ни овај случај није могућ.

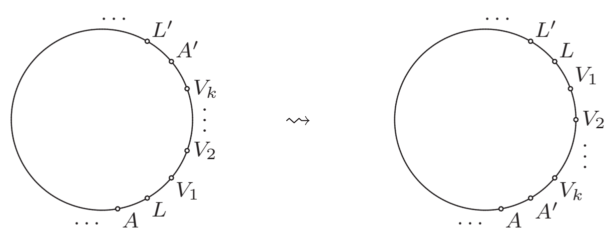
Како смо у сва три случаја добили контрадикцију, закључујемо да Петерсенов граф није Хамилтонов. ■

За Петерсенов граф, ма како узели скуп S, важи $\omega(\Gamma - S) \leqslant |S|$. Тиме смо показали да овај услов није и довољан.

Довољни услови за Хамилтонове графове су далеко бројнији од потребних. Најпознатији су Дираков (дански Guy A. Dirac; 1952.), Ореов (енг. O.Ore; 1960.), Бондијев и Хваталов (енг. J.A.Bondy, V.Chvatal; 1976.), као и Редеиев (мађ. Rédei) за оријентисане графове. Ми ћемо овде показати Дираков услов, а остале ћемо само формулисати (доказе можете наћи у књигама наведеним у литератури).

ПРИМЕР 4.5.7. На двору краља Артура сакупило се $2n$ витезова, при чему сваки од њих, међу осталим, има највише $n-1$ непријатеља. Доказати да Мерлин, саветник краља Артура, може да распореди витезове за округли сто тако да су свака два суседа пријатељи. (Пријатељство и непријатељство су симетрични.)

Решење. Рапоредимо витезове на произвољан начин за сто. Нека су у том распореду нека 2 витеза који су у свађи, нпр. Артур и Ланселот (Артур је имао добар разлог да не говори са Ланселотом због своје жене Гиневре) и без умањења оштости можемо узети да је A лево од L. A има бар n пријатеља међу осталим витезовима, а L има највише $n-1$ непријатеља (са све A). Стога негде за столом постоје витезови A' и L' такви да су A и A' пријатељи, L и L' пријатељи и да A' седи на месту лево од L'. Мерлин сада може да витезовима између L и A' замени места за столом (ако је U био леви сусед од V, да сада V буде леви сусед од U), а остале витезе да остави где су били. Ова трансформација је представљена на следећој слици.



Распоред витезова $(A, L, V_1, V_2, \ldots, V_k, A', L')$ је замењен распоредом $(A, A', V_k, \ldots, V_2, V_1, L, L')$ (витезови V_i се налазе и даље између иста два витеза), а уместо парова витеза (A, L) (који су у свађи) и (A', L') (који могу бити пријатељи, али и непријатељи) сада имамо парове суседних витезова (A, A') и (L, L'). Тиме је Мерлин смањио број непријатељстава (за 1 или 2 ако су и A' и L' у свађи) међу суседним витезовима за столом. Како у полазном распореду имамо највише $2n$ непријатељстава (толико има суседних парова витеза), што је коначан број и како се у сваком кораку тај број смањује, за неколико корака ћемо доћи до тога да има 0 непријатељстава међу суседима за столом.

Тиме смо доказали да Мерлин може да распореди витезе за сто, тако да један поред другог седе витезови који су пријатељи. ■

Овај пример можемо превести на језик Теорије графова тако што узмемо да су витезови чворови графа, а да између 2 чвора имамо грану ако и само ако су одговарајући витезови пријатељи. Тражени распоред за столом одговара Хамилтоновој контури. Тако добијамо следећу теорему (узели смо да има n чворова, а не $2n$, што не мења ништа у доказу!).

ТЕОРЕМА 4.5.8. **Диракова теорема.** Нека је Γ граф са $n \geqslant 3$ чворова код кога је $\delta \geqslant \frac{n}{2}$. Тада је Γ Хамилтонов граф.

Доказ. Доказ иде аналогно као у претходном примеру. □

Диракова теорема је специјални случај наредних тврђења.

ТЕОРЕМА 4.5.9. **Ореова теорема.** Нека је Γ граф са $n \geqslant 3$ чворова такав да за свака 2 несуседна чвора u и v важи $d(u) + d(v) \geqslant n$. Тада је Γ Хамилтонов граф. □

ТЕОРЕМА 4.5.10. **Теорема Бондија и Хватала.** Нека је Γ граф са $n \geqslant 3$ чворова. Нека су u и v два несуседна чвора за које важи $d(u) + d(v) \geqslant n$. Тада је граф $\Gamma + uv$ (граф који се добија од G додавањем гране између чворова u и v) Хамилтонов ако и само ако је Γ Хамилтонов граф. □

ТЕОРЕМА 4.5.11. **Теорема Редеиа.** У оријентисаном графу Γ у којем за свака 2 чвора u и v постоји бар једна од грана (u, v), (v, u) постоји Хамилтонов пут. □

У наредном примеру ћемо илустровати примену претходне теореме у стварном животу (тачније, и овај проблем долази из Комбинаторне оптимизације). Тај проблем је везан за тражење Хамилтоновог пута у оријентисаном графу.

ПРИМЕР 4.5.12. Грађевинска фирма која треба да заврши $n = 5$ станова располаже 1 екипом водинсталатера и 1 екипом молера. Молери не могу почети са радом у стану у којем водоинсталатери нису завршили свој посао. У k-том стану ($k = 1, 2, \dots, n$) водоинсталатери треба да раде v_k часова, а молери m_k часова:

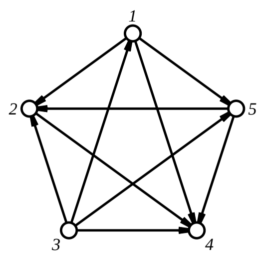
$$v_1 = 8, v_2 = 20, v_3 = 7, v_4 = 18, v_5 = 9;$$

$$m_1 = 12, m_2 = 12, m_3 = 15, m_4 = 10, m_5 = 15.$$

Којим редоследом треба да раде водоинсталатери да би целокупан посао био завршен што је могуће раније?

Решење. Може се показати да водоинсталатери треба да раде у стану i пре него у стану j само ако је $\min(v_i, m_j) \leqslant \min(v_j, m_i)$. У противном би екипа молера губила више времена него што је потребно.

Формирајно оријентисан граф са чворовима $1, 2, 3, 4, 5$ (то су станови) у коме од чвора i иде грана ка чвору j ако је $\min(v_i, m_j) \leqslant \min(v_j, m_i)$. Одређивање редоследа станова се своди на тражење Хамилтоновог пута у овом оријентисаном графу (који је представљен на следећој слици).



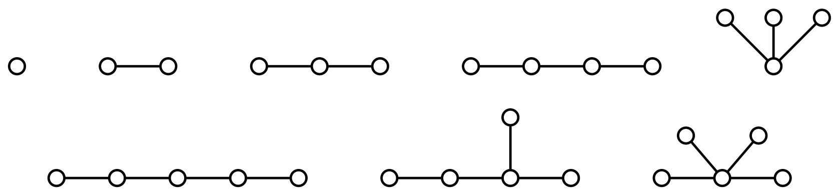
Једини Хамилтонов пут је $3, 1, 5, 2, 4$. Тим редоследом треба и мајстори да раде станове. ■

4.6 Стабла

Појам *стабла* (неки на српском користе и израз *дрво*, мада је овај уобичајенији; енг. *tree*) представља један од најважнијих појмова у теорији графова. Стабло се може посматрати у два контекста: као посебан граф (који поседује нека својства), или као подграф неког (повезаног) графа. Слична ситуација се јавља и са контурама.

ДЕФИНИЦИЈА 4.6.1. Стабло је повезан граф без контура.

На следећој слици дата су сва (неизоморфна) стабла са највише пет чворова.



Видимо да постоји само једно стабло са $n = 1$ (такво стабло се назива и тривијално јер нема грана), $n = 2$ и $n = 3$ чвора. Постоје 2 стабла са $n = 4$ чвора и 3 стабла са $n = 5$ чворова (она су у другом реду).

ДЕФИНИЦИЈА 4.6.2. Чвор степена 1 у графу се назива *лист* (енг. leaf). Понекад се уместо листа користи и израз *висећи чвор* (енг. pendant vertex).

ТЕОРЕМА 4.6.3. Свако (нетривијално) стабло G са $n \geqslant 2$ чворова има бар 1 лист.

Доказ 1. Изаберимо у стаблу T произвољан чвор v_1. Ако је његов степен $d(v_1) = 1$ доказ је завршен. Ако је $d(v_1) > 1$ онда чвор v_1 има неке суседе и од њих одаберимо 1 нека је то v_2. Ако је $d(v_2) = 1$ доказ је завршен. Ако је $d(v_2) > 1$ онда чвор v_2 има бар једног суседа различитог од чвора v_1, рецимо v_3. Ако је $d(v_3) = 1$ доказ је завршен. Ако је $d(v_3) > 1$ онда чвор v_3 има бар једног суседа различитог од чвора v_2, рецимо v_4. Чвор v_4 је различит и од v_1 јер стабло T не поседује контуру.

Понављајући дати поступак, како је број чворова у стаблу коначан, у неком тренутку ћемо доћи до чвора степена 1 (у противном бисмо дошли поново до неког раније одабраног чвора, што би значило да стабло T поседује контуру!). $\square$

Доказ 2. Под нетривијалним стаблом подразумевамо стабло са бар 2 чвора. Уочимо два чвора у том графу који су на највећој удаљености (дужина најкраћег пута између њих је највећа). Тада су ти чворови степена један. У противном важило би да постоји дужи пут (ако је један од крајњих чворова суседан једном чвору ван уоченог пута), или би се јавила контура (ако је један од крајњих чворова суседан бар са два чвора пута). $\square$

Након Теореме 4.6.4 можемо дати и следећи доказ:

Доказ 3. Збир свих степена чворова је једнак двоструком броју грана, тј.

$$\sum_{v \in V} d(v) = 2m = 2 \cdot (n-1) = 2n - 2.$$

Како је стабло G повезан граф и како је оно нетривијално (тј. $n \geqslant 2$) то за сваки његов чвор важи $d(v) \geqslant 1$, па одавде добијамо да оно има бар 2 чвора степена 1, тј. 2 листа. $\square$

Доказима 2 и 3 смо показали јаче тврђење да у нетривијалном стаблу постоје бар 2 листа. Стабло које има тачно 2 листа је пут. Највише листова има звезда (она има 1 чвор степена $n-1$, док су свих преосталих $n-1$ чворова листови).

Наредним тврђењем даћемо еквивалентне дефиниције појма стабла (сваки од наредних исказа може се узети за дефиницију стабла и онда су остали искази теореме!).

ТЕОРЕМА 4.6.4. Следећи искази су еквивалентни:

1° Стабло је повезан граф без контура.

2° Стабло је повезан граф са n чворова и $m = n - 1$ грана.

3° Стабло је граф са n чворова, $m = n - 1$ грана и без контура.

4° Стабло је минималан повезан граф (удаљавањем било које гране постаје неповезан граф).

5° Стабло је максималан граф без контура (додавањем било које гране формира се контура).

6° Стабло је граф у коме су свака два чвора повезана јединственим елементарним путем.

Доказ. Довољно је доказати да сваки исказ имплицира следећи, а последњи први.

1° $\Rightarrow$ 2°: Индукцијом по n. За $n \leqslant 2$ тврђење важи. Претпоставимо да тврђење важи за све графове са највише n чворова ($n > 2$). Посматрајмо повезан граф без контура са $n + 1$ чворова. Према претходној теореми имамо бар 2 чвора степена 1. Удаљавањем једног од тих чворова степена један, добија се граф који је повезан и без контура. На основу индукцијске хипотезе он има n чворова и $m = n - 1$ грану. Самим тим посматрани граф има $n + 1$ чворова и n грана, што је и требало доказати.

2° $\Rightarrow$ 3°: Претпоставимо да граф поседује бар једну контуру, и нека је K једна од тих контура. Сваки чвор контуре K има степен бар два. Приметимо да је просечан степен чвора графа G мањи од 2 (наиме, $\overline{d} = 2\frac{m}{n} = 2 - \frac{2}{n}$). Одатле следи да постоји бар један чвор у графу степена један (претпостанља се да је $n > 1$; у противном нема шта да се доказује). Удаљимо из графа било који чвор степена један и њему инцидентну грану (удаљени чвор не припада контури K јер му је степен 1). Тада се добија повезан граф са $n' = n - 1$ чворова и $m' = n' - 1$ грана. Понављајући исти поступак на добијени подграф, као и његове подграфове, добићемо после коначно много корака граф који садржи само чворове контуре K, а за тај граф не важи да му је број грана за 1 мањи од броја чворова, што даје контрадикцију. Стога, посматрани граф G нема контура. Овим је импликација доказана.

3° $\Rightarrow$ 4°: Претпоставимо најпре да је граф неповезан и да има $k > 1$ компонената. Тада је свака његова компонента стабло (јер нема контура). Стога i–та компонента има n_i чворова и $m_i = n_i - 1$ грана ($i = 1, 2, \ldots, k$). Одатле директно следи да је укупан број грана графа $m = n - k$, контрадикција, с обзиром да је $m = n - 1$. Докажимо сада и минималност. Претпоставимо стога да смо удаљавањем неке гране добили граф који је повезан. Тада између крајњих чворова те гране постоји бар један пут у новодобијеном графу. Ако бисмо вратили удаљену грану, она би са уоченим путем формирала контуру, што је у супротности претпоставкама у оквиру 3°. Стога је импликација доказана.

4° $\Rightarrow$ 5°: Граф нема контура. Наиме, удаљавањем било које гране са контуре, добили бисмо повезан граф што је у супротности са 4°. Докажимо сада и максималност. Другим речима претпоставимо да смо графу додали грану и да нисмо формирали контуру. Међутим то је немогуће, јер је граф био повезан, тако да је између крајњих чворова додате гране постојао пут, а самим тим је додавањем гране неминовно дошло до формирања контуре. Овим је импликација доказана.

5° $\Rightarrow$ 6°: Претпоставимо да између два чвора не постоји пут који их повезује. Тада би додавањем гране између та два чвора добили граф без контуре, што је у супротности са 5°. Дакле, између свака два чвора постоји бар један пут. Ако би између два чвора постојала бар два пута, тада би у графу постојала контура. Наиме ови путеви се најпре раздвајају почеши од неког чвора (потенцијално полазног за оба пута) а затим и стапају у исти чвор (потенцијално завршног за оба пута). Међутим, постојање контуре је у супротности са 5°. Овим је импликација доказана.

6° $\Rightarrow$ 1°: Пошто су свака 2 чвора повезани јединственим путем овај граф је повезан. Ако би у графу постојала бар једна контура, тада би између било која два чвора неке контуре постојала два различита пута, што је у супротности са 6°. Стога је то повезан граф без контура. $\square$

Из ове теореме следи да се сваки од исказа 1°–6° може узети као дефиниција стабла. Поред тога, ова теорема има и више последица. Поменимо неке од њих.

ТЕОРЕМА 4.6.5. Сваки повезан граф садржи стабло као разапињући подграф.

Доказ. Најпре имамо да је граф повезан. Ако би био без контура, тада би самим тим био и стабло (тривијалан случај. Узмимо стога да има бар једну контуру. Удаљимо потом било коју грану те контуре. Овим је добијен повезан граф. Ако би тај подграф био без контура доказ би био готов. У противном, понављањем истог резоновања, после коначно корака, добили бисмо повезан подграф без контура, дакле стабло.

Овим је доказ комплетиран. □

ДЕФИНИЦИЈА 4.6.6. Шума је граф чија је свака компонента повезаности стабло.

Директна последица ове дефиниције и Теореме 4.6.4 је следеће тврђење.

ТЕОРЕМА 4.6.7. Ацикличан граф је шума. □

Следеће тврђење описује центар стабла (да подсетимо центар графа чине чворови са најмањим ексцентрицитетом — видети Дефиницију 4.2.20 са стране 17).

ТЕОРЕМА 4.6.8. Центар стабла се састоји или од једног чвора, или од два суседна чвора.

Доказ. Доказ се може спровести индукцијом по броју чворова стабла. Теорема је тачна за сва стабла, рецимо до 5 чворова (видети слику на којој смо навели сва стабла са 5 или мање чворова).

Посматрајмо сада произвољно стабло T са $n > 5$ чворова. Нека је T' граф добијен из T удаљавањем свих листова из T. Тада је T' стабло (јер је добијени граф повезан и без контура). Даље, ексцентрицитет сваког чвора из T' је умањен за један у односу на његов ексцентрицитет у T. Разлог је следећи: Ако за неки чвор v важи да је најудаљенији чвор од њега (рецимо w) степена већег од један, тада би могли наћи суседа чвора w који је на већој удаљености од w, што је у супротности са избором чвора w. Самим тим стабла T и T' имају исте центре. На основу индукцијске хипотезе, центар стабла T' се састоји или од једног чвора, или од два суседна чвора, а стога и стабло T. □

Без доказа наводимо следећу теорему (јер је последица претходне и одговарајућих дефиниција) која даје везу дијаметра и радијуса стабла.

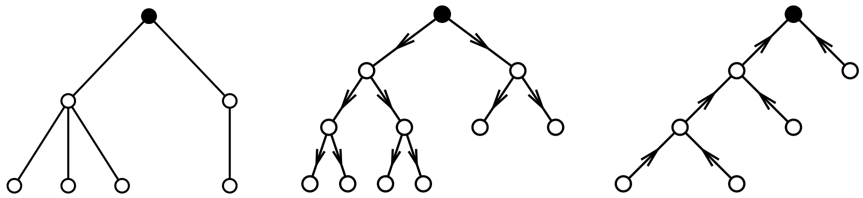
ТЕОРЕМА 4.6.9. Центар стабла T се састоји од једног чвора ако и само ако је $D(T) = 2r(T)$. У противном је $D(T) = 2r(T) - 1$ и тада се центар састоји од 2 чвора. □

Центар стабла T можемо добити веома једноставним алгоритмом. Ако у сваком кораку избацимо све листове, све док не останемо са једним или два чвора (јер према претходној теореми центар има или 1 или 2 чвора), на крају ће нам остати човорови који чине центар стабла T.

4.7 Коренска стабла

ДЕФИНИЦИЈА 4.7.1. Стабло у коме је један чвор посебно издвојен назива се *коренско стабло*, а тај чвор се назива *корен* стабла.

На следећој слици дати су примери коренских стабала, при чему је корен представљен црним кружићем.



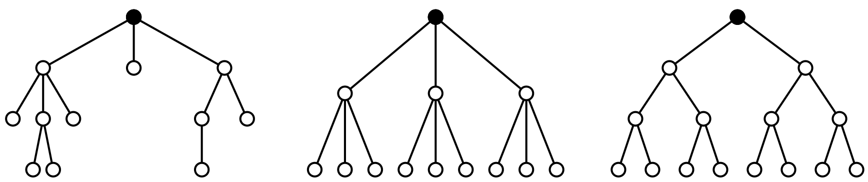
Терминологија везана за коренска стабала традицијално се ослања на ботаничке и генеалошке појмове. Ако је T коренско стабло, а v чвор различит од корена, *родитељ* чвора v је чвор u такав да је uv оријентисана грана од u ка v; тада је v дете чвора u (родитељ датог чвора је јединствен – зашто?). Чворови са истим родитељем u су *деца* чвора u. Код коренских стабала се понекад гране оријентишу од родитеља ка деци или од деце ка родитељима (тако је представљано друго, односно треће стабло на претходној слици). *Преци* чвора u, који није корен, су сви чворови који леже на путу од корена до чвора u (без u). *Потомци* чвора u су сви чворови који имају чвор u као претка. *Лист* је чвор без деце (такви чворови се називају и *терминални*, односно *завршни чворови*); остали чворови су *унутрашњи чворови* (или *интерни чворови*). Корен је интерни чвор ако стабло T садржи бар два чвора.

Ако је u чвор коренског стабла, тада је подстабло са кореном u стабло индуковано чвором u и његовим потомцима.

Од посебног интереса су стабла дата следећом дефиницијом.

ДЕФИНИЦИЈА 4.7.2. Коренско стабло се назива *m–арно стабло* ако сваки интерни чвор има највише m деце. *Потпуно m–арно стабло* је стабло у коме сваки интерни чвор има тачно m деце. За $m = 2$ одговарајуће m–арно стабло се назива *бинарно стабло*.

На наредној слици дата су три m–арна (коренска) стабла. Прво је тернарно, а друго је потпуно тернарно стабло. Треће стабло је потпуно бинарно.



У многим случајевима води се рачуна и како су чворови постављени у равни (геометријској интерпретацији).

Код бинарних стабала (подразумева се уређених), ако родитељ има два детета, тада су у употреби и појмови лево дете (подстабло), или десно дете (подстабло). Понекад, ако родитељ има само једно дете, оно може бити или лево или десно дете, а некад се мора јасно знати да ли је то лево или десно дете.

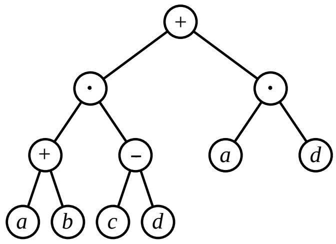
Важно својство коренског стабла је да је између сваког чвора графа и корена постоји јединствен пут. За сваки чвор v можемо увести *ниво чвора* v као растојање од корена до чвора v (односно, уколико посматрамо оријентисано коренско стабло онда као дужину јединственог пута од корена до чвора v).

У односу на корен, може се извршити партиција скупа чворова графа на следећи начин: V_0 се састоји само од корена; V_i $(i > 1)$ је скуп чворова графа на растојању i од корена (тј. то су сви чворови који имају ниво i). Дакле имамо да се скуп чворова графа може представити на следећи начин:

$$V = V_0 \cup V_1 \cup \ldots \cup V_h$$

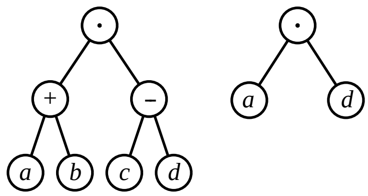
Уобичајено је да се каже да су чворови из V_i на i-том нивоу (слоју) у односу на r (корен стабла). Уједно, h је *висина* стабла.

Коренска стабла имају велику примену у рачунарству. Показаћемо сада на примеру како се нека формула може представити коренским стаблом.



$(a + b) \cdot (c - d) + a \cdot d$

Корен одговара целој формули $(a + b) \cdot (c - d) + a \cdot d$; сваки унутрашњи чвор одговара некој подформули; на пример, лево подстабло корена одговара подформули $(a+b)\cdot(c-d)$, а десно подстабло корена одговара подформули $a\cdot d$ (ова 2 подстабла су представљена на следећој слици); итд. листови стабла одговарају словним симболима (промењљивим).



$(a + b) \cdot (c - d)$ $\qquad$ $a \cdot d$

Издвојићемо дефиницију бинарног стабла, да бисмо могли да је упоредимо са рекурзивном дефиницијом која следи.

ДЕФИНИЦИЈА 4.7.3. За коренско стабло се каже да је *бинарно* ако сваки чвор стабла (родитељ) има највише два суседна чвора на следећем нивоу (детета). У стандардном приказу (слици) бинарног стабла дете са леве стране се назива *лево дете*, а дете са десне стране *десно дете*.

Сада ћемо дати и алтернативну (рекурзивну) дефиницију бинарног стабла.

ДЕФИНИЦИЈА 4.7.4. **Рекурзивна дефиниција.** T је бинарно стабло ако важи:

i) $T = K_1$;

ii) ако су T_1 и T_2 бинарна стабла, тада је и $T = T_1 * T_2$ бинарно стабло, при чему је $T_1 * T_2$ граф добијен увођењем новог чвора (корен стабла T) и повезивањем тог чвора граном са коренима стабала T_1 и T_2 (уколико неко од тих стабала није празно, то јест без чворова).

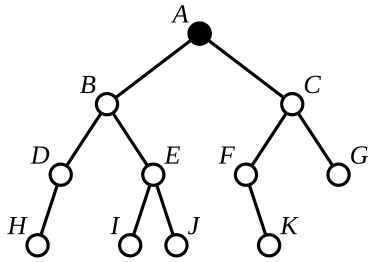
Следећа теорема је директна последица дефиниција.

ТЕОРЕМА 4.7.5. Нека је T бинарно стабло са n чворова и висине h. Тада је

$$n \leqslant 2^{h+1} - 1, \qquad \text{или алтернативно}, \qquad h \geqslant \log_2(n+1) - 1.$$

Доказ. Доказ иде математичком индукцијом по висини стабла h. □

Посматраћемо сада неке стандардне начине обилазака чворова бинарних стабала. То су КЛД, ЛКД и ЛДК обиласци (слова К, Л, Д су скраћенице од речи корен, лево подстабло и десно подстабло и означавају којим редоследом вршимо обилазак). На примеру коренског стабла са наредне слике (црном бојом је означен корен) илустроваћемо ове начине обиласка чворова стабла.



i) КЛД–обилазак (енглески: pre–order). Овде се прво обилази корен, затим лево подстабло, па тек потом десно подстабло. Бинарно стабло са претходне слике обилазимо на следећи начин:

$$A \quad B \quad D \quad H \quad E \quad I \quad J \quad C \quad F \quad K \quad G.$$

ii) ЛКД–обилазак (енглески: in–order). Овде се прво обилази лево подстабло, затим корен, па тек потом десно подстабло. Бинарно стабло са претходне слике обилазимо на следећи начин:

$$H \quad D \quad B \quad I \quad E \quad J \quad A \quad F \quad K \quad C \quad G.$$

iii) ЛДК–обилазак (енглески: post–order). Овде се прво обилази лево подстабло, затим десно подстабло, па тек потом корен. Бинарно стабло са претходне слике обилазимо на следећи начин:

$$H \quad D \quad I \quad J \quad E \quad B \quad K \quad F \quad G \quad C \quad A.$$

Напомена. Поредак који одговара ЛКД–обиласку чворова на енглеском језику се зове *infix order* и он одговара инфиксној нотацији израза, нпр. $a+b$ (као што смо и навикли). Постоје још и префиксна нотација, која је понегде звана и пољска нотација (по пољском математичару Лукашијевичу), нпр. $+ab$, и она одговара КЛД–обиласку чворова (*pre order*), као и постфиксна нотација (тзв. инверзна пољска нотација), нпр. $ab+$, која одговара ЛДК–обиласку чворова (*post order*).

Када стабла користимо као структуру података при програмирању, најчешће ћемо се сретати са две врсте стабала – уређеним и балансираним стаблима.

ДЕФИНИЦИЈА 4.7.6. *Уређено коренско стабло* има све елементе у левом подстаблу мање од броја у корену и све елементе у десном подстаблу веће од броја у корену. Код *балансираног коренског стабла* дужине путева од корена до листова се разликују за максимално 1, тј. дужина пута од корена до произвољног листа је или h или $h-1$, где је h висина стабла.

КЛД–обилазак уређеног стабла даје чворове од мањег ка већем.

Стабла се у рачунарима се представљају апстрактним (сложеним) типом података. Примитивни типови података су уграђени у програмски језик, док код апстрактних програмер треба да дефинише структуру, као и операције на њима. Најчешће представљање бинарних стабала је помоћу слога (у Паскалу **record**) који има 3 елемента – вредност поља, као и два показивача (или поинтера од енг. **pointer**) на меморијске локације корена левог подстабла и корена десног подстабла.

ПРИМЕР 4.7.7. Показати да је број нулпоинтера (показивачи у празно; уобичајено се означавају са **nil**) у бинарном стаблу већи од ненулпоинтера.

Решење. Стабло има n чворова па има укупно $2n$ поинтера. На сваки чвор (сем корена) имамо један од поинтера у стаблу који показује на њега, те стога имамо $n-1$ ненулпоинтера, док су преосталих $n+1$ нулпоинтери. Тиме смо показали да у сваком бинарном стаблу има више нулпоинтера од ненулпоинтера. ■

Напомена. Код стабала која нису бинарна овај однос је још неповољнији (на пример, код тринарних стабала од $3n$ показивача имамо и даље $n-1$ ненулпоинтера, док су преосталих $2n+1$ нулпоинтери. Ово је још један од разлога за већу популарност бинарних стабала.

За уметање неког новог елемента у уређено балансирано стабло користимо следећи поступак. Пронађемо где треба ставити тај елемент, ставимо га у лист и онда вршимо балансирање.

За брисање неког елемента (тј. чвора) уређеног балансираног стабла може да наступи један од следећа 3 случаја:

- Ако је тај елемент лист само га обришемо.
- Ако тај чвор нема левог или нема десног сина, онда оног сина кога има доводимо на његово место.
- Ако има оба сина онда се у његов чвор доводи најмањи елемент из десног подстабла (могао би и највећи елемент из левог подстабла), док се чвор у коме је био најмањи елемент из десног подстабла само обрише (то можемо јер је то лист).

Ако се оваквим поступком поквари услов да је то стабло балансирано онда још треба извршити балансирање. Објаснимо како још вршимо балансирање.

Уочимо чвор u који је неизбалансиран (тј. висине његовог левог и десног подстабла се разликују за 2 или више) и који је на највећем растојању од корена. Имамо 2 могућности у зависности од тога да ли лево или десно подстабло има већу висину.

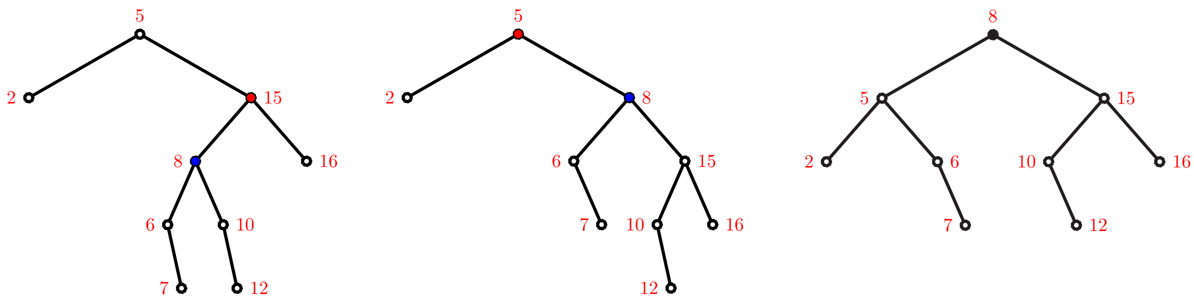
- Нека лево подстабло има већу висину. Означимо са s и v левог и десног сина од u и нека је t десни син од s (ако постоји). Тада на место чвора u доводимо чвор s са његовим левим подстаблом док ће му десни син бити чвор u коме ће лево подстабло бити подстабло са кореном s, а десно ће бити подстабло са кореном w.
- Нека десно подстабло има већу висину. Означимо са t и w левог и десног сина од u и нека је v леви син од w (ако постоји). Тада на место чвора u доводимо чвор w са његовим десним подстаблом док ће му леви син бити чвор u коме ће лево подстабло бити подстабло са кореном t, а десно ће бити подстабло са кореном v.

Коначним бројем понављања овог поступка добијамо балансирано стабло.

Овај поступак ћемо илустровати на следећем примеру, где ћемо прво формирати стабло, а затим извршити његово балансирање.

ПРИМЕР 4.7.8. Нацртати бинарно уређено коренско стабло ако елементи долазе следећим редом: 5,15,8,2,10,16,6,7,12. Затим избалансирати дато стабло.

Решење. Први број који стиже, 5, стављамо у корен стабла. Следећи је 15 и како је $15 > 5$ он ће бити његов десни син. Затим долази 8, те како је $8 > 5$, 8 се налази у десном подстаблу од 5; како је $8 < 15$, 8 се налази у левом подстаблу броја 15, тј. 8 ће бити леви син од 15. Настављајући овај процес добијамо стабло приказано на наредној слици лево.



Кад га балансирамо уочавамо чвор 15 (обојен црвено) који није балансиран јер му лево подстабло има висину 3, а десно 1. Стога на његово место доводимо његовог левог сина 8 (чвор обојен плаво), док 15 постаје десни син од 8. Овим поступком смо добили стабло приказано на претходној слици у средини.

Ово стабло кад балансирамо уочавамо чвор 5 (обојен црвено) који није балансиран јер му лево подстабло има висину 1, а десно 4. Стога на његово место доводимо његовог десног сина 8 (чвор обојен плаво), док 5 постаје леви син од 8. Овим поступком смо добили балансирано стабло (сви листови су на нивоу 2 или 3) приказано на претходној слици десно. ■

Хафманов кôд

Осврнимо се сад мало на кодирање. Сва слова као и други симболи, у рачунару се чувају у виду низа битова (тј. низа 0 и 1). Најчешћи начин је преко ASCII кода, тј. кодирања где за сваки симбол користимо низ од 7 битова, плус додатни бит (јер бајт има 8 битова!) који служи за проверу парности (да се при преносу елиминишу грешке).

Ако је количина података са којом радимо велика, пожељно је извршити сажимање, тј. да за неке симболе искористимо мање битова. Оптимално би било када бисмо за симболе који се чешће јављају користили краће низове битова, а за оне који се јављају ређе да користимо дуже низове битова. На тај начин вршимо уштеду меморијског простора за складиштење података, а и бржи пренос података када вршимо трансфер тих података са једног медија на други.

Међутим приликом оваквог чувања података (ако низови битова који представљају различите симболе имају различите дужине), долазимо до проблема како да утврдимо где се један низ битова завршава, а други почиње. То ћемо илустровати следећим примером.

ПРИМЕР 4.7.9. Нека је слово a кодирано са 10, b са 101, e са 11, m са 1011 и са n 110. Декодирати низ битова 1011110.

Решење. Да ли ће низ битова 1011110 представљати реч bea (101|11|10) или mn (1011|110)? ■

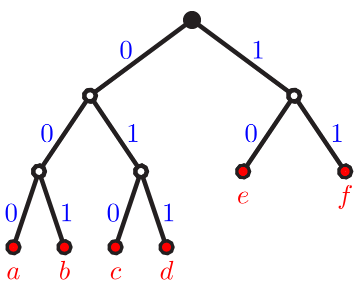
Уведимо сада дефиницију операције конкатенације (то је операција која лепи речи) и након тога неке везане за кодове.

ДЕФИНИЦИЈА 4.7.10. Нека су $a_1a_2a_3\dots a_n$ и $b_1b_2b_3\dots b_n$ речи језика A^*. Бинарну операцију $\circ$, коју ћемо звати конкатенација, дефинишемо као $a_1a_2a_3\dots a_n \circ b_1b_2b_3\dots b_n = a_1a_2a_3\dots a_nb_1b_2b_3\dots b_n$.

Кôд који се једнозначно дешифрује за дати језик је скуп C, такав да се свака реч у језику може јединствено изразити као конкатенација елемената скупа C. Код C је *префиксни кôд* ако има особину да елемент кода не може да представља почетни подниз неког другог елемента кода.

Посматрајмо произвољно бинарно стабло. Ако нека његова грана води до левог детета њој ће одговарати бит 0, а ако води до десног детета њој ће одговарати бит 1. Како сваком листу (који су на наредној слици обојени црвеном бојом) одговара јединствен пут од корена стабла (који је на наредној слици обојен црном бојом), то сваком листу можемо да придружимо низ битова који одговарају гранама на путу од корена до тог листа. Тај низ битова се назива *код путање до листа.*

ПРИМЕР 4.7.11. У коренском стаблу на наредној слици (корен је обојен црном бојом, а листови црвеном) листовима су придружени симболи a, b, c, d, e, f. За сваки од тих симбола одредити његов кôдпутање до листа, а затим декодирати низ битова 01110010000.



Решење. Кад год у путу од корена до листа идемо улево тој грани одговара бит 0, а кад идемо удесно одговара бит 1 (ови битови су на претходној слици уписани плавом бојом поред сваке гране). Тако, на пример, да бисмо од горена дошли до листа c морамо да идемо лево (0), па десно (1) и лево (0), то ће симболу d одговарати низ 010. На сличан начин долазимо до тога да сваком од симбола a, b, c, d, e, f одговара следеће кодирање:

$$a \leftrightarrow 000 \qquad b \leftrightarrow 001 \qquad c \leftrightarrow 010 \qquad d \leftrightarrow 011 \qquad e \leftrightarrow 10 \qquad f \leftrightarrow 11.$$

Дати кôд је префиксни кôд (што нам тврди наредна теорема), па приликом декодирања датог низа битова можемо извршити поделу на 011|10|010|000, што нам даје реч $deca$. ■

ТЕОРЕМА 4.7.12. У било ком бинарном стаблу, кôд путање до листа за листове представља префиксни кôд. □

Вратимо се сада на раније поменуту идеју да за симболе који се чешће јављају користимо краће низове битова, а за ређе дуже низове битова. У ту сврху уводимо тежину кода и слично тежину коренског стабла.

ДЕФИНИЦИЈА 4.7.13. Нека се свако од слова a_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ из азбуке симбола A јавља са релативном фреквенцијом f и да дужина бинарног низа који га представља износи l_i. Тада је *тежина кôда* уводи као

$$w = l_1 \cdot f_1 + l_2 \cdot f_2 + \ldots + l_n \cdot f_n.$$

Иста формула важи и за *тежину коренског стабла* код кога је тежина листа који одговара симболу a_i једнака фреквенцији f_i, а растојање од корена до тог листа је једнако l_i.

У наставку ћемо дати Хафманов алгоритам, за прављење Хафмановог стабла за симболе $s_1, s_2, \ldots, s_n$, којима одговарају фреквенцијама $f_1, f_2, \ldots, f_n$. Доказ да Хафманово стабло представља стабло са минималном тежином (и онда директно да и Хафманов кôд представља кôд са минималном тежином може се наћи у [1].

procedure *Hafmanov algoritam*(G)

1. Поређати фреквенције у неопадајући редослед.

2. Ако су 2 најмање фреквенције f_i и f_j $(f_i < f_j)$, образовати бинарно стабло са чворовима или стаблима s_i и s_j као децом, при чему је s_i лево дете, док фреквенцију родитеља представља сума фреквенција $f_i + f_j$. Ставити број 0 на грану која води ка левом детету и број 1 на грану која води ка десном детету.

3. Уклонити фреквенције f_i у f_j и заменити их њиховом сумом $f_i + f_j$.

4. Понављати кораке 1–3 све док не преостане само једна фреквенција.

end procedure

ПРИМЕР 4.7.14. Нека су дата слова a, b, c, d, e, f са одговарајућим фреквенцијама појављивања:

симбол	a	b	c	d	e	f
фреквенција	30	13	10	15	25	5

Одредити Хафманово стабло и на основу њега Хафманов кôд. Кодирати реч *deca* помоћу тог Хафмановог кода.

Решење. Даћемо приказ рада Хафмановог алгоритма по итерацијама (кораци 1–3).

1° **1.** Поређајмо фреквенције у неопадајући редослед:

5	10	13	15	25	30
f	c	b	d	e	a

2. Најмање 2 фреквенције су 5 и 10 и њима одговарају симболи f и c које ћемо заменити стаблом T_1 у чијем корену је $5 + 10 = 15$.

3. Нове фреквенције су:

15	13	15	25	30
T_1	b	d	e	a

2° **1.** Поређајмо фреквенције у неопадајући редослед:

13	15	15	25	30
b	T_1	d	e	a

2. Најмање 2 фреквенције су 13 и 15 и њима одговара симбол b и стабло T_1 које ћемо заменити стаблом T_2 у чијем корену је $13 + 15 = 28$.

3. Нове фреквенције су:

28	15	25	30
T_2	d	e	a

.

3° **1.** Поређајмо фреквенције у неопадајући редослед: $\begin{array}{c|c|c|c} 15 & 25 & 28 & 30 \\ \hline d & e & T_2 & a \end{array}$.

2. Најмање 2 фреквенције су 15 и 25 и њима одговарају симболи d и e које ћемо заменити стаблом T_3 у чијем корену је $15 + 25 = 40$.

3. Нове фреквенције су: $\begin{array}{c|c|c} 40 & 28 & 30 \\ \hline T_3 & T_2 & a \end{array}$.

4° **1.** Поређајмо фреквенције у неопадајући редослед: $\begin{array}{c|c|c} 28 & 30 & 40 \\ \hline T_2 & a & T_3 \end{array}$.

2. Најмање 2 фреквенције су 28 и 30 и њима одговарају стабло d и симбол e које ћемо заменити стаблом T_4 у чијем корену је $28 + 30 = 58$.

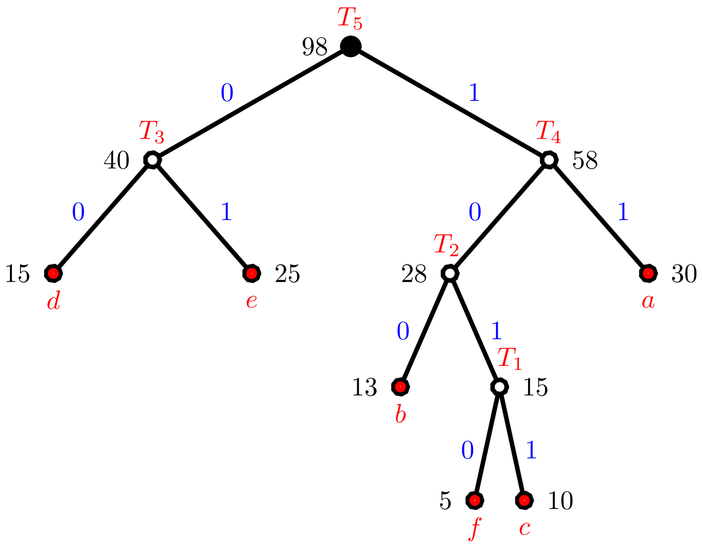
3. Нове фреквенције су: $\begin{array}{c|c} 58 & 40 \\ \hline T_4 & T_3 \end{array}$.

5° **1.** Поређајмо фреквенције у неопадајући редослед: $\begin{array}{c|c} 40 & 58 \\ \hline T_3 & T_4 \end{array}$.

2. Најмање 2 фреквенције су 40 и 58 и њима одговарају стабла T_3 и T_4 које ћемо заменити стаблом T_5 у чијем корену је $40 + 58 = 98$.

3. Нове фреквенције су: $\begin{array}{c} 98 \\ \hline T_5 \end{array}$.

Сва ова стабла су представљена на следећој слици.



Сада за сваки симбол можемо одредити његов Хафманов кôд тако што пратимо битове који су придружени свакој грани у путу од корена Хафмановог стабла до листа у коме се налази тај симбол. Тиме долазимо до тога да је Хафманов код за ове симболе:

a	b	c	d	e	f
11	100	1011	00	01	1010

Коначно можемо и кодирати реч *deca* – то је 00|01|1011|11, односно 0001101111. ■

Напомена. Хафманов кôд није јединствен. Приметимо да смо у итерацији 2° могли да поређамо фреквенције у другачији неопадајући редослед: $\begin{array}{c|c|c|c|c} 13 & 15 & 15 & 25 & 30 \\ \hline b & d & T_1 & e & a \end{array}$. Да смо наставили даље са овим редоследом добили би на крају друго Хафманово стабло (одредите га!) и самим тим други Хафманов код:

a	b	c	d	e	f
11	100	011	101	01	000

4.8 Задаци

1. Који је максимални могући степен чвора који садржи n чворова?

2. Колико максимално може да постоји грана у графу који садржи n чворова?

3. Колико грана може да има граф који садржи 10 чворова ако је сваки чвор степена 2?

4. **а)** Одредити број грана у потпуном графу K_n са n чворова.

б) Коришћењем претходног резултата показати да је $1+2+\ldots+n=\frac{n(n+1)}{2}$.

5. Колико има грана у графу $K_{m,n}$?

6. Утврдити да ли су следећи низови графички и, за оне који јесу графички, нацртати одговарајуће графове:

а) $(4,4,3,2,1)$; **б)** $(6,6,5,4,3,3,1)$; **в)** $(3,3,2,2,2,2,1,1)$; **г)** $(5,4,3,3,3,3,3,2)$; **д)** $(7,6,6,5,4,3,2,1)$; **ђ)** $(7,7,6,5,4,4,3,2)$; **е)** $(7,4,3,3,2,2,2,1,1,1)$; **ж)** $(8,7,7,6,6,5,4,3,3,1,1,1)$.

7. **а)** Да ли је могуће 6 градова повезати путевима тако да из тих градова редом излази 5,4,3,3,2,2 путева?

б) Да ли је могуће 5 градова повезати путевима тако да из тих градова редом излази 4,3,2,1,0 путева?

в) Да ли је могуће 6 градова повезати путевима тако да из тих градова редом излази 4,4,4,3,3,2 путева?

г) Да ли је могуће 7 градова повезати путевима тако да из тих градова редом излази 6,3,3,3,3,3,3 путева?

Уколико је одговор потврдан одредити на колико различитих начина је то могуће урадити.

Да ли ти графови садрже Хамилтонов и Ојлеров пут, односно контуру?

(Између 2 различита града може бити највише 1 пут.)

8. **а)** Постоји ли граф са степенима чворова 6,6,6,6,6,6,5,3,3,3,3?

б) Постоји ли бипартитни граф са степенима чворова 6,6,6,6,6,6,6,6,5,3,3,3,3,3?

в) Постоји ли граф са степенима чворова 9,8,6,5,3,3,3,3,1,1?

9. Показати да постоји прост граф са 12 чворова и 28 грана, такав да је степен сваког чвора једнак или 3 или 5. Нацртати такав граф.

10. Доказати да не постоји прост граф са 12 чворова и 28 грана, такав да је степен сваког чвора једнак: **а)** или 3 или 4; **б)** или 3 или 6.

11. Нека је $v=(d_1,d_2,\ldots,d_{n-1},d_n)$ и $w=(w_n,w_{n-1},\ldots,w_2,w_1)$, где је $w_i=n-1-d_i$. Показати да је низ v графички ако и само ако је низ w графички.

12. У лиги која се састоји од две групе са по 13 тимова у свакој групи, одредити да ли је могуће направити распоред утакмица у сезони тако да сваки тим одигра девет утакмица против тимова из своје групе и четири утакмице против тимова из супротне групе.

13. На шаховском турниру сваки играч је одиграо са сваким другим играчем највише једну партију. Доказати да у сваком тренутку на турниру постоје бар два играча који су до тог тренутка одиграли исти број партија.

14. На једном острву постоји укупно 9 држава. Доказати да на овом острву постоји држава која међу њима има паран број пријатељских држава. Ако је држава A пријатељска са државом B, онда је и држава B пријатељска са државом A.

15. Може ли на Математичкој олимпијади присуствовати 1999 учесника (рачунајући и госте), ако сваки од њих има тачно 3 пријатеља међу учесницима?

16. Цар жели да сагради дворац у којем ће бити 1990 соба у једном нивоу, тако да важе следећи услови:

1° Број врата на свакој соби је 0, 1 или 2.

2° Између сваке две собе су највише једна врата, а из сваке собе на улицу воде највише једна врата.

3° Број врата према улици једнак је 19, а број соба са једним вратима је 90.

Да ли је могуће саградити такав дворац?

17. Свако од 20 људи шаље некој десеторици од осталих по једно писмо. Доказати да постоје две особе које су једна другој послале писмо.

18. Нека је n природан и r и s ненегативни цели бројеви, такви да је s паран и $n = r + s$. Доказати да постоји граф G са n чворова, тако да су r чворова парног, а преосталих s чворова непарног степена.

19. На неком пријему је присутан одређен број људи који се међусобно или познају или не познају (постоје бар двојица који се познају). За свака 2 човека који познају једнак број људи важи да немају заједничких познаника. Показати да на пријему постоји особа која познаје само једну другу особу.

20. Одредити највећи број грана у бипартитном подграфу графа:

а) P_n; **б)** C_n; **в)** K_n, са $n \geqslant 2$ чворова.

21. Доказати да је најмањи број чворова регуларног графа степена 3 са мостом једнак 10.

22. Доказати да регуларан граф степена 3 има мост ако и само ако има везивни чвор.

23. Реконструисати граф G са 5 чворова ако су дати његови индуковани подграфови $G_i = G - v_i$ за $i = 1, 2, 3, 4, 5$, на следећи начин: G_1 је потпун граф са 4 чвора из кога је избачена једна грана, G_2 има 2 компоненте повезаности од чега је једна пут дужине 3, а друга изолован чвор, G_3 је звезда са 3 чвора и G_4 и G_5 представљају троуглове код којих је један чвор спојен граном са четвртим чвором (математички ово можемо записати као $G_1 = K_4 - e$, $G_2 = P_3 \cup K_1$, $G_3 = S_4 = K_{1,3}$, $G_4 = G_5 = K_{1,3} + e$).

24. Нека граф $G = (V, E)$ има n чворова и m грана. Одредити број подграфова индукованих неким скупом $X \subseteq V$. Ако је $G = K_n$, одредити укупан број свих подграфова.

25. Описати графове код којих је степен сваког чвора мањи од 3.

26. Конструисати регуларан граф степена 3 са $2n$ чворова ($n \geqslant 3$) који нема троуглова (контура дужине 3).

27. Одредити 3-регуларне графове G, са минималним бројем чворова, такве да им је најмања дужина циклуса једнака: **а)** $g(G) = 4$; **б)** $g(G) = 5$.

28. Показати да комплемент бипартитног графа не мора бити бипартитан граф.

29. Нека је G k-регуларан граф са n чворова. Одредити укупан број троуглова у G и његовом комплементу $\overline{G}$.

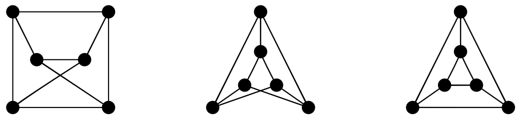
30. Ако је дијаметар графа G већи од 3, тада је дијаметар комплемента $\overline{G}$ мањи од 3. Доказати.

31. Граф изоморфан са својим комплементом назива се *самокомплементаран граф*. Доказати да је број чворова у самокомплементарном графу облика $4k$ или $4k + 1$.

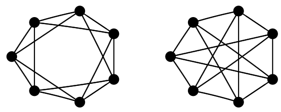
32. Одредити све самокомплементарне графове са 4 и 5 чворова.

33. Нека је $n = 4k + 1$ и нека је G самокомплементаран граф са n чворова. Доказати да G садржи чвор степена $\frac{n-1}{2}$.

34. Испитати који од графова са следеће слике су изоморфни.



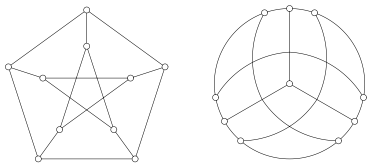
35. Испитати да ли су графови са следеће слике изоморфни.



36. Одредити 3 неизоморфна графа са 6 чворова који имају степене чворова 1,1,2,2,3,3.

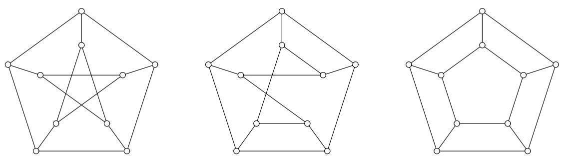
37. Одредити број неизоморфних графова са 4 и 5 чворова. Нацртати све те графове.

38. **а)** Пронаћи изоморфизам између графова приказаних на следећој слици.



б) Доказати да су оба графа изоморфна са следећим графом: скуп чворова је $\binom{\{1,2,\ldots,5\}}{2}$, а два чвора $\{i,j\}$ и $\{k,l\}$ су суседна, $i,j,k,l \in \{1,2,\ldots,5\}$, ако и само ако је $\{i,j\} \cap \{k,l\} = \emptyset$.

39. Доказати да су графови на следећој слици међусобно неизоморфни.



40. Колико графова на скупу чворова $\{1,2,\ldots,2n\}$ је изоморфно са графом који се састоји од n дисјунктних грана $\{1,2\},\{3,4\},\ldots,\{2n-1,2n\}$?

41. Исписати све могуће матрице суседства за пут са три чвора P_3 и циклус са три чвора C_3.

42. Исписати бар једну матрицу суседства A за графове **а)** K_n; **б)** $K_{m,n}$, где су $m,n \in \mathbb{N}$.

43. Нека је A матрица суседства графа $K_{2,3}$. Израчунати A^2 и A^3. Које закључке можемо извући из ових матрица?

44. Одредити матрице суседства, инциденције и растојања за графове из задатака 34, 35 и 39.

45. Употребити матрицу суседства за одређивање броја путева дужине 2 и 3 у графовима из задатака 34. Исписати све те путеве.

46. Нека су дате матрице инциденције:

$$\textbf{а)}\ R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}; \qquad \textbf{б)}\ R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Одредити одговарајуће графове. Написати њихове матрице суседства, листе суседства и матрице растојања.

47. Нека је дата матрица инциденције:

$$S = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Одредити одговарајући граф. Написати његову матрицу суседства, листу суседства и матрицу растојања.

48. Нека су дате матрице суседства:

а) $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$; **б)** $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$; **в)** $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Одредити одговарајуће графове. Написати њихове матрице инциденције, листе суседства и матрице растојања.

49. На забави код проф. Мозгића учествује n брачних парова. Ниједна особа се није руковала са својим брачним другом, а притом се свих $2n-1$ особа, осим проф. Мозгића, руковало са различитим бројем особа. Са колико особа се руковала жена проф. Мозгића?

50. У предузећу ради 18 радника. Ако се сваки радник познаје са још тачно 4 радника, доказати да постоје 2 радника који се не познају и немају заједничких познаника.

51. Дат је граф са 10 чворова. Одредити минималан број грана које граф мора да садржи тако да за произвољних 5 чворова (од тих 10) постоје бар 2 гране које их повезују.

52. На међународном семинару учествује 1985 математичара. Међу свака 3 учесника семинара могу се наћи 2 који говоре истим језиком. Ако свака особа говори највише 5 језика, доказати да бар 200 особа говори истим језиком.

53. На конференцији се налази n математичара. Сваки четворочлани подскуп садржи математичара који познаје осталу тројицу. Доказати да постоји математичар који познаје све учеснике конференције. (Релација познанства је симетрична.)

54. У групи људи сваки човек има тачно три познаника. Доказати да је могуће сместити све људе из те групе у две просторије, тако да сваки човек има највише једног познаника у просторији у којој је.

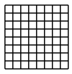
55. У дневној соби се налази неки број људи, и познато је да сваки од њих познаје тачно пет присутних. Доказати да је за неко $n > 5$ могуће одабрати n људи из дневне собе и сместити их за округли сто у трпезарији тако да свако седи између два познаника.

56. (*2. разред, Савезно 2004*) Разговарали су барон Минхаузен и математичар. Барон Минхаузен је рекао да се у његовој земљи из сваког града може путем стићи у било који други град. При томе, ако се из произвољног града путује по земљи произвољним путем до повратка у тај град, онда се прође кроз непаран број успутних градова. Математичар је питао колико пута се броји град, ако се више пута прође кроз њега. Барон је одговорио да се такав град броји онолико пута колико пута се прође кроз њега. Осим тога, барон Минхаузен је додао да из сваког града у његовој земљи полази једнак број путева, осим из његовог родног града из кога полази мањи број путева. На то је математичар рекао да барон Минхаузен лаже. Како је то закључио?

57. На конференцији је присутан паран број математичара. Доказати да постоје 2 математичара који имају паран број заједничких пријатеља. (Релација пријатељства је симетрична.)

58. Одредити колико има неизоморфних стабала са **а)** 6; **б)** 7; **в)** 8 чворова. Нацртати сва та стабла.

59. Град има квадратну мрежу са m „хоризонталних“ и n „вертикалних“ улица (видети наредну слику). Колика је најмања дужина дела мреже који треба асфалтирати тако да се од сваке раскрснице до било које друге може доћи асфалтом?

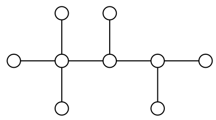
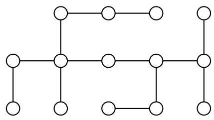


60. Наћи два неизоморфна стабла са истим низом степена чворова.

61. Нека је T стабло у коме сваки чвор који је суседан са листом има степен бар 3. Доказати да T има пар листова са заједничким суседом.

62. Краљ Шонгабонга је имао 4 сина, 10 од његових мушких потомака су имали по 3 сина сваки, 15 од његових мушких потомака су имали по 2 сина сваки, док су сви остали умрли без деце. Ако је познато да краљ Шонгабонга није имао женских потомака, колико је укупно мушких потомака имао овај краљ?

63. Сваки од кружића на наредној слици представља по 1 кућу у којој станује по 1 ђак-пешак. Линије између кружића представљају путеве између кућа, који су сви дужине $1km$. Где треба изградити школу у селу, тако да укупан пут који прелазе ђаци-пешаци буде најмањи?

а)  **б)** 

64. Написати у префиксној и инфиксној (пољској и инверзној пољској) нотацији следеће изразе дате у инфиксној нотацији: a, $a+b$, $a+b+c$, $a+(b+c)$, $a+b*c$, $a*b*c$.

65. Један програм изграђује бинарно уређено стабло од речи које учитава секвенцијално. Сваки чвор стабла садржи једну реч и показиваче на лево и десно подстабло. Прва реч коју програм учита представља корен стабла. Програм учитава редом речи

1° a, b, c, au; 2° b, a, c, au; 3° b, c, a, au; 4° a, au, b, c.

а) Нацртати резултантно стабло у сваком од горња 4 случаја.

б) Израчунати средњи број приступа чворовима стабла приликом тражења неке речи која се налази у том стаблу (успешно тражење).

в) Израчунати средњи број приступа чворовима стабла принеуспешном тражењу речи x ако је са једнаком вероватноћом заступљена свака од следећих могућности: $x < a$, $a < x < au$, $au < x < b$, $b < x < c$ и $x > c$.

(Сматра се да је читање једног чвора – један приступ.)

66. Једно бинарно стабло има 4 чвора A, B, C и D. Обилазећи стабло на КЛД начин (*pre order*) добијамо редом $ABCD$. Да ли је ово стабло једнозначно одређено? Ако јесте дати изглед тог стабла, а ако није дати све могуће изгледе.

67. Нацртати изглед бинарног уређеног стабла ако елементи долазе следећим редом:

$$20, 28, 24, 10, 26, 18, 4, 40, 2, 3, 6, 30, 27, 38, 25, 5, 8, 7, 9.$$

Затим обрисати редом чворове 4,24,40,5,7.

68. Нека су

$$1, 3, 12, 4, 5, 8, 9, 15, 19, 17, 30$$

вредности тежина листова стабла (тј. фреквенције појављивања неких симбола). Одредити стабло минималне средње дужине пута. Колики је средњи број приступа при успешном тражењу за ово стабло?

Литература

[1] James A. Anderson, *Diskretna matematika sa kombinatorikom*, Računarski fakultet, Beograd, 2005.

[2] Dragoš Cvetković, *Kombinatorna teorija matrica*, Naučna knjiga, Beograd, 1987.

[3] Dragoš Cvetković, *Teorija grafova i njene primene*, Naučna knjiga, Beograd, 1990.

[4] Dragoš Cvetković, Slobodan Simić *Diskretna matematika, Matematika za kompjuterske nauke*, Prosveta, Niš, 1996.

[5] Vojislav Petrović, *Teorija grafova*, Novi Sad, 1998.

[6] Neil J.A. Sloane, *Online Encyclopedia of Integer Sequences*, `http://www.research.att.com/~njas/sequences/`

[7] Richard P. Stanley, *Enumerative combinatorics*, Volume 2, Cambridge University Press, Cambridge, 1999.

[8] Драган Стевановић, Владимир Балтић, Слободан Симић, Мирослав Ћирић, *Дискретна математика – основе комбинаторике и теорије графова*, ДМС, Београд, 2008.

[9] Dragan Stevanović, Marko Milošević, Vladimir Baltić, *Diskretna matematika, Zbirka rešenih zadataka*, DMS, Beograd, 2004.

[10] Darko Veljan, *Kombinatorika sa teorijom grafova*, Školska knjiga, Zagreb, 1989.

[11] Y. Wang, D. Chakrabarti, C. Wang, C. Faloutsos, *Epidemic spreading in real networks: an eigenvalue viewpoint*, 22nd Symposium in Reliable Distributed Computing, Florence, Italy (2003)

[12] *Wikipedia, free encyclopedia*, `http://en.wikipedia.org`