1. Дефиниција одређеног интеграла.

· Дефинисати: поделу одсечка одговарајућу броју е, потподелу, дијаметар поделе
· Дефинисати одређени интеграл
· Формулисати и доказати теорему о вези непрекидности и интеграбилности
Функције

Дефиниција. За дату функцију $y = f(x)$, поделу одсечка $[a, b]$

$$\pi[a, b] = \pi[a=x_0 \leq \xi_1 \leq x_1 \leq \xi_2 \leq x_2 \leq \ldots \leq x_{n-1} \leq \xi_n \leq x_n=b]$$

ћемо назвати одговарајућом броју ε (ε произвољни мали позитиван број), ако за сваки пар x' и x'' тачака које припадају истом одсечку $[x_{i-1}, x_i]$ важи неједнакост

$$\left| f(x'') - f(x') \right| < \varepsilon$$
.

Дефиниција. Подела $\pi'[a, b] = \pi'[a=x'_0 \leq \xi'_1 \leq x'_1 \leq \xi'_2 \leq x'_2 \leq \ldots \leq x'_{p-1} \leq \xi'_p \leq x'_p=b]$ се назива потподелом поделе $\pi[a, b] = \pi[a=x_0 \leq \xi_1 \leq x_1 \leq \xi_2 \leq x_2 \leq \ldots \leq x_{n-1} \leq \xi_n \leq x_n=b]$, ако свака од тачака $x_0, \ldots, x_n$ припада скупу тачака $\{x'_0, \ldots, x'_p\}$, тј. скуп $\{x'_0, \ldots, x'_p\}$ се добија кад се скупу $\{x_0, \ldots, x_n\}$ додају неке деоне тачке; при томе су тачке ξ_k и ξ'_k одабране произвољно. Очигледно, ако подела π одговара броју ε, онда истом броју ε одговара и свака потпедела π' поделе π

Дефиниција. Број $d(\pi) = \max \Delta x_k$, $k \in \{1, \ldots, n\}$ назива се дијаметар поделе π.

Дефиниција. Ако за било какву поделу одсечка $[a, b]$ на одсечке $[x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, \ldots, n$, у којој $\max [x_{i-1}, x_i] = \max \Delta x_i \to 0$ $(n \to \infty)$, и за произвољно изабране тачке ξ_i на одсечцима $[x_{i-1}, x_i]$ интегрална сума S_n тежи једној одређеној вредности S, тада се та гранична вредност назива одређени интеграл функције $f(x)$ на одсечку $[a, b]$ и означава $\int_a^b f(x)dx$.

Теорема. Ако је функција $f(x)$ непрекидна на одсечку $[a, b]$, тада је она на том интервалу и R–интеграбилна.

2. Особине одређеног интеграла.

- Дефинисати одређени интеграл
- Навести особине одређеног интеграла
- Доказати једну од наведених особина

Дефиниција. Ако за било какву поделу одсечка $[a, b]$ на одсечке $[x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, \ldots, n$, у којој $\max [x_{i-1}, x_i] = \max \Delta x_i \to 0$ $(n \to \infty)$, и за произвољно изабране тачке ξ_i на одсечцима $[x_{i-1}, x_i]$ интегрална сума S_n тежи једној одређеној вредности S, тада се та гранична вредност назива одређени интеграл функције $f(x)$ на одсечку $[a, b]$ и означава $\int_a^b f(x)dx$.

1) $\int_a^a f(x)dx = 0$, јер је криволинијски трапез одсечак $0 \leq f(x) \leq f(a)$ чија је површина 0.

2) $\int_a^b c\, f(x)dx = c\int_a^b f(x)dx$, $c = \text{const.}$

3) $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$

4)
$$\int_a^b [f_1(x)+f_2(x)+\ldots+f_m(x)]dx=\int_a^b f_1(x)dx+\int_a^b f_2(x)dx+\ldots+\int_a^b f_m(x)dx$$

5) Ако интегранд $f(x)$ у интервалу $[a, b]$ не мења знак, тада
$$\int_a^b f(x)dx$$
има исти знак као и $f(x)$.

6) Ако $f(x) \le g(x)$ за свако $x \in [a, b]$, онда $\int_a^b f(x)dx \le \int_a^b g(x)dx$.

7) **Оцена одређеног интеграла.** Ако је m = min $f(x)$ и M = max $f(x)$, где је $f(x)$ интеграбилна функција на одсечку $[a, b]$ тада је
$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a)$$
.

Доказ. Из $m \le f(x) \le M$, следи $\int_a^b m\,dx \le \int_a^b f(x)dx \le \int_a^b M\,dx$.
При томе,
$$\int_a^b m\,dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^n m\cdot\Delta x_i = \lim_{n\to\infty} m\cdot\sum_{i=1}^n \Delta x_i = m(b-a)$$
и слично
$$\int_a^b M\,dx = M(b-a)$$
.

8) **Теорема (о средњој вредности).** Ако је функција $f(x)$ непрекидна на одсечку $[a, b]$, тада постоји тачка ξ, $a < \xi < b$, за коју је

$$\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a)$$

.

9) **Теорема (о подели интервала интеграције).** За произвољне три тачке *a*, *b*, *c* важи једнакост

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

, под претпоставком да сва три интеграла постоје.

3. Теорема о средњој вредности интеграла функције једне променљиве.

· Дефинисати одређени интеграл
· Формулисати теореме о процени вредности и о средњој вредности интеграла
· Коришћењем теореме о процени вредности интеграла доказати теорему о средњој вредности интеграла

Дефиниција. Ако за било какву поделу одсечка [*a*, *b*] на одсечке $[x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, \ldots, n$, у којој $\max [x_{i-1}, x_i] = \max \Delta x_i \to 0$ $(n\to\infty)$, и за произвољно изабране тачке ξ_i на одсечцима $[x_{i-1}, x_i]$ интегрална сума S_n тежи једној одређеној вредности *S*, тада се та гранична вредност назива одређени интеграл

$$\int_a^b f(x)dx$$

функције *f*(*x*) на одсечку [*a*, *b*] и означава .

Оцена одређеног интеграла. Ако је $m = \min f(x)$ и $M = \max f(x)$, где је *f*(*x*) интеграбилна функција на одсечку [*a*, *b*] тада је

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a)$$

.

Теорема (о средњој вредности). Ако је функција $f(x)$ непрекидна на одсечку $[a, b]$, тада постоји тачка ξ, $a < \xi < b$, за коју је

$$\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a)$$

.

Доказ. Ако је $m = \min f(x)$ и $M = \max f(x)$, $x \in [a, b]$, тада на основу **Теореме о средњој вредности** следи

$$m \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \leq M$$

, тј.

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx = \mu$$

, $m \leq \mu \leq M$.

Како је $f(x)$ непрекидна на одсечку $[a, b]$, према Коши-Болцановој теореми узима све вредности између m и M, тј. за неко ξ, $a < \xi < b$ важи $f(\xi) = \mu$, па

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx = f(\xi)$$

, тј.

$$\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a)$$

.

4. Теорема о подели интервала интеграције.

- Дефинисати одређени интеграл
- Формулисати теорему о подели интервала интеграције
- Доказати теорему за $a < c < b$. Доказати теорему за $a < b < c$

Дефиниција. Ако за било какву поделу одсечка $[a, b]$ на одсечке $[x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, \ldots, n$, у којој $\max [x_{i-1}, x_i] = \max \Delta x_i \to 0$ $(n \to \infty)$, и за произвољно изабране тачке ξ_i на одсечцима $[x_{i-1}, x_i]$ интегрална сума S_n тежи једној одређеној вредности S, тада се та гранична вредност назива одређени интеграл функције $f(x)$ на одсечку $[a, b]$ и означава

$$\int_a^b f(x)dx$$

.

Теорема (о подели интервала интеграције). За произвољне три тачке *a*, *b*, *c* важи једнакост

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

, под претпоставком да сва три интеграла постоје.

Доказ. Нека је $a < c < b$. Саставимо интегралну суму за функцију $f(x)$ на $[a, b]$, тако да је *c* увек једна од подеоних тачака. Тада важи

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = \sum_{i=1}^{m} f(\xi_i)\Delta x_i + \sum_{i=m+1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$$

, $x_m = c$.

Кад се пређе на граничну вредност, кад $\max \Delta x_i \to 0$, добија се тражена једнакост за случај $a < c < b$.

Нека је $a < b < c$. На основу већ доказаног

$$\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx$$

, тј.

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx - \int_b^c f(x)dx$$

. Према 3) важи

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$$

, па се и у овом случају добија

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

.

5. Основна теорема диференцијалног и интегралног рачуна.

- Дефинисати примитивну функцију
- Формулисати основну теорему диференцијалног и интегралног рачуна
- Доказати основну теорему диференцијалног и интегралног рачуна

Дефиниција. Примитивна (првобитна) функција дате функције $f(x)$, назива се функција $F(x)$ за коју је

$$F'(x) = f(x).$$

ОСНОВНА ТЕОРЕМА ДИФЕРЕНЦИЈАЛНОГ РАЧУНА:

$$\Phi(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$

Теорема. Неодређени интеграл

непрекидне функције $f(x)$ задовољава релацију $\Phi'(x) = f(x)$, односно

$$\left(\int f(x)\,dx\right)' = f(x)$$

,

што значи да диференцирање неодређеног интеграла непрекидне функције даје опет ту исту функцију.

Доказ. Према теореми о подели интервала интеграције

$$\Phi(x+\Delta x) = \int_a^{x+\Delta x} f(t)\,dt = \int_a^x f(t)\,dt + \int_x^{x+\Delta x} f(t)\,dt$$

па је прираштај $\Delta\Phi$ функције $\Phi(x)$ једнак

$$\Delta\Phi = \Phi(x+\Delta x) - \Phi(x) = \int_a^x f(t)\,dt + \int_x^{x+\Delta x} f(t)\,dt - \int_a^x f(t)\,dt$$

тј. $$\Delta\Phi = \int_x^{x+\Delta x} f(t)\,dt$$.

Применом теореме о средњој вредности интеграла

$$\Delta\Phi = f(\xi)(x+\Delta x - x) = f(\xi)\Delta x$$, ξ је између x и $x+\Delta x$,

одакле следи

$$\frac{\Delta\Phi}{\Delta x} = \frac{f(\xi)\Delta x}{\Delta x} = f(\xi)$$, тј. $$\Phi'(x) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta\Phi}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0} f(\xi)$$.

Како је ξ између x и $x+\Delta x$, то када $\Delta x\to 0$, $\xi\to x$, па је због непрекидности функције $f(x)$, $$\lim_{\Delta x\to 0} f(\xi) = \lim_{\xi\to x} f(\xi) = f(x)$$, што значи да је $\Phi'(x) = f(x)$.

- Према теореми важе једнакости

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt = f(x)$$ и $$d\int_a^x f(t)\,dt = f(x)\,dx$$.

6. Њутн-Лајбницова формула.

- Дефинисати појмове неодређеног интеграла и примитивне функције
- Формулисати Њутн-Лајбницову теорему (написати Њутн-Лајбницову формулу)
- Доказати Њутн-Лајбницову теорему

$$\Phi(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$

Дефиниција. Интеграл

се назива неодређени интеграл функције $f(x)$; неодређен се зове зато што му нису обе границе одређене (фиксиране).

- Уместо доње границе a смо могли узети и неку другу константу α, добили би смо неодређени интеграл

$$F(x) = \int_\alpha^x f(t)\,dt$$

.

Тада за $a < x < \alpha$, како је $\int_a^\alpha f(t)\,dt = C = \text{const}$, добијамо

$$\int_a^x f(t)\,dt = \int_a^\alpha f(t)\,dt + \int_\alpha^x f(t)\,dt$$

, тј.

$\Phi(x) = F(x) + C$,

што значи да се различити неодређени интеграли исте функције разликују само за адитивну константу.

Дефиниција. Примитивна (првобитна) функција дате функције $f(x)$, назива се функција $F(x)$ за коју је

$$F'(x) = f(x).$$

Теорема. (*Њутн – Лајбницова формула*) Вредност одређеног интеграла $\int_a^b f(x)dx$ једнака је разлици вредности произвољне примитивне функције $F(x)$ интегранда $f(x)$, узета у горњој и доњој граници датог интеграла:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

, $F'(x) = f(x)$.

Доказ. Нека је $F(x)$ примитивна функција интегранда $f(x)$.

Како је и $\int_a^x f(t)dt$, такође примитивна функција, важи $\int_a^x f(t)dt = F(x) + C$, за неку константу C и за свако x. Та једнакост важи и за $x = a$, тј. $\int_a^a f(t)dt = F(a) + C$, одакле $0 = F(a) + C$, $C = -F(a)$. То значи да је $\int_a^x f(t)dt = F(x) - F(a)$, а за $x = b$ добија се Њутн – Лајбницова формула $\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a)$, тј. $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$.

7. Смена променљиве у одређеном интегралу.

• Дефинисати појмове неодређеног интеграла и примитивне функције

- Формулисати Њутн-Лајбницову теорему (написати Њутн-Лајбницову формулу)
- Извести формулу за смену променљиве у одређеном интегралу

$$\Phi(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$

Дефиниција. Интеграл

се назива неодређени интеграл функције $f(x)$; неодређен се зове зато што му нису обе границе одређене (фиксиране).

- Уместо доње границе a смо могли узети и неку другу константу α, добили би смо неодређени интеграл

$$F(x) = \int_\alpha^x f(t)\,dt$$

.

Тада за $a < x < \alpha$, како је

$$\int_a^\alpha f(t)\,dt = C = \text{const}$$

, добијамо

$$\int_a^x f(t)\,dt = \int_a^\alpha f(t)\,dt + \int_\alpha^x f(t)\,dt$$

, тј.

$\Phi(x) = F(x) + C$,

што значи да се различити неодређени интеграли исте функције разликују само за адитивну константу.

Дефиниција. Примитивна (првобитна) функција дате функције $f(x)$, назива се функција $F(x)$ за коју је

$$F'(x) = f(x).$$

Теорема. (*Њутн – Лајбницова формула*) Вредност одређеног интеграла $\int_a^b f(x)dx$ једнака је разлици вредности произвољне примитивне функције $F(x)$ интегранда $f(x)$, узета у горњој и доњој граници датог интеграла:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a), \quad F'(x) = f(x).$$

Ако је $F(x)$ примитивна функција интегранда $f(x)$, тада важе једнакости

$$\int_a^x f(x)dx = F(x) + C \quad \text{и} \quad \int_\alpha^t f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt = F[\varphi(t)] + C,$$

одакле следи тврђење, јер је

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a),$$

$$\int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt = F[\varphi(t)]\Big|_\alpha^\beta = F[\varphi(\beta)] - F[\varphi(\alpha)] = F(b) - F(a)$$

8. Уопштени интеграли са бесконачним интервалом интеграције.

Дефиниција. Ако постоји коначна гранична вредност $\lim\limits_{b\to\infty} \int_a^b f(x)dx$, тада се она назива уопштеним или несвојственим интегралом функције $f(x)$ на интервалу и означава са $\int_a^{\infty} f(x)dx = \lim_{b\to\infty} \int_a^b f(x)dx$.

У том случају кажемо да интеграл постоји или конвергира. Ако интеграл нема коначну граничну вредност кад $b\to\infty$, тада се каже да не постоји или да дивергира.

Теорема 1. Ако за свако $x \geq a$, $0 \leq f(x) \leq g(x)$ и ако $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ конвергира, тада ће конвергирати и $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ и при томе је

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx \leq \int_a^{+\infty} g(x)dx.$$

Теорема 2. Ако за свако $x \geq a$, $0 \leq f(x) \leq g(x)$ и ако $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ дивергира, дивергираће и $\int_a^{+\infty} g(x)dx$.

Теорема 3. Ако $\int_a^{+\infty} |f(x)| dx$ конвергира, конвергираће и $\int_a^{+\infty} f(x) dx$.

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^a}$$

, $a > 0$

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^a} = \lim_{b \to \infty} \int_1^b \frac{dx}{x^a} = \frac{1}{1-a} \lim_{b \to \infty} \left(b^{1-a} - 1 \right), \quad a \neq 1$$

- За $a > 1$ $\lim_{b \to \infty} \left(b^{1-a} - 1 \right) = -1$, па је у овом случају $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^a} = \lim_{b \to \infty} \int_1^b \frac{dx}{x^a} = \frac{1}{a-1}$.
- За $0 < a < 1$ $\lim_{b \to \infty} \left(b^{1-a} - 1 \right) = +\infty$, па је интеграл $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^a} = +\infty$, тј. дивергира.
- Ако је $a = 1$ $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^a} = \lim_{b \to \infty} \int_1^b \frac{dx}{x} = \lim_{b \to \infty} \left(\ln x \right) \Big|_1^b = \lim_{b \to \infty} \ln b = \infty$, па $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^a}$ дивергира.

9. Уопштени интеграли са неограниченим интеграндом.

• Дефинисати уопштени интеграл са неограниченим интеграндом. Конвергенција
и дивергенција уопштеног интеграла

Дефиниција. Ако је функција $f(x)$ непрекидна на интервалу $a \le x < b$, а $f(x) \to \infty$ кад $x \to b$, $x < b$, и ако постоји

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_a^{b-\varepsilon} f(x)\,dx$$

коначна гранична вредност ($\varepsilon > 0$), тада се та гранична вредност назива уопштени (несвојствени) интеграл функције $f(x)$ на одсечку $[a, b]$ и означава са

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_a^{b-\varepsilon} f(x)\,dx$$

.

Тада кажемо да уопштени интеграл постоји, тј. конвергира. У супротном, ако интеграл нема коначну граничну вредност, он не постоји, односно дивергира

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^a}$$

, $a > 0$

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^a} = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_\varepsilon^1 \frac{dx}{x^a} = \frac{1}{1-a} \lim_{\varepsilon \to 0} \left(\varepsilon^{1-a} - 1\right) = \frac{1}{1-a}$$

- За $0 < a < 1$, интеграл конвергира.

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^a}$$

- Може се закључити да за $a \ge 1$, интеграл дивергира.

10. Интеграција простих рационалних функција.

$$\int \frac{dx}{x-a} = \ln|x-a| + C.$$

$$\int \frac{dx}{(x-a)^k} = \int (x-a)^{-k}\,dx = \frac{(x-a)^{-k+1}}{-k+1} + C = \frac{1}{(1-k)(x-a)^{k-1}} + C$$

11. Метода парцијалне интеграције.

- Метода парцијалне интеграције. Доказ.

Нека су $u(x)$ и $v(x)$ диференцијабилне функције, тада је

$$d(uv) = u\,dv + v\,du, \text{ тј. } u\,dv = d(uv) - v\,du$$

Интеграцијом леве и десне стране последњег израза добија се формула парцијалне интеграције

$$\int u\,dv = \int d(uv) - \int v\,du \quad \Rightarrow \quad \int u\,dv = uv - \int v\,du.$$

12. Интеграција функција облика $R(\sin x, \cos x)$, R - рационална функција

- Општи случај смене при рачунању интеграла за функције $R(\sin x, \cos x)$, где је R
рационална функција
- Навести смене које се користе у специјалним случајевима интеграције функција
облика $R(\sin x, \cos x)$, R је рационална функција

Теорема. Интеграл $R(\sin x, \cos x)$ трансформише се у интеграл рационалне функције сменом $t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$.

Доказ. Коришћењем тригонометријских формула

$$\sin x = 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} = 2\operatorname{tg}\frac{x}{2}\cos^2\frac{x}{2} = \frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}},$$ тј. $$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$$

(јер је $1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}=1+\dfrac{\sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}}=\dfrac{\cos^2\frac{x}{2}+\sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}}=\dfrac{1}{\cos^2\frac{x}{2}}$).

- $\cos x=\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}=\dfrac{1}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}-\dfrac{\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}$, тј. $\cos x=\dfrac{1-t^2}{1+t^2}$.
- Због $x=2\operatorname{arctg} t$, важи $dx=\dfrac{1}{1+t^2}\,dt$.

Дакле, $\displaystyle\int R(\sin x,\cos x)\,dx=\int R\left(\frac{2t}{1+t^2},\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\frac{2}{1+t^2}\,dt$, интегранд је рационална функција од t.

Интеграли специјални случајеви функција $R(\sin x,\cos x)$, се могу једноставније решити другим сменама:

1. Интеграл облика $\int R(\sin x)\cos x\,dx$ се најједноставније решава сменом $\sin x=t$, $\cos x\,dx=dt$, која дати интеграл своди на $\int R(t)\,dt$.
2. Слично, интеграл $\int R(\cos x)\sin x\,dx$ се може решавати сменом $\cos x=t$, $\sin x\,dx=dt$, чиме се своди на $\int R(t)\,dt$.
3. За интеграл облика $\int R(\operatorname{tg} x)\,dx$ погодна је смена $\operatorname{tg} x=t$, којом се своди на $\displaystyle\int R(t)\frac{dt}{1+t^2}$.
4. Смена $\operatorname{tg} x=t$, се користи и у случајевима кад се функције $\sin x$ и $\cos x$ појављују са парним степенима у интегранду $R(\sin x,\cos x)$

13. Метода смене у неодређеном интегралу.

Метода смене у неодређеном интегралу. Доказ.

Интеграција ирационалних функција облика $R\left(x, \sqrt{\alpha x+\beta}\right)$ и $\int R(x, x^{m/n},..., x^{r/s})dx$

Ако се при одређивању интеграла $\int f(x)dx$ не може лако наћи примитивна функција, а знамо да постоји може се применити метода смене $x = \varphi(t)$, где $\varphi(t)$ мора бити непрекидна и диференцијабилна функција за коју је $\varphi'(t) \neq 0$ и која има своју инверзну функцију. У том случају ће бити $dx=\varphi'(t)dt$, па

$$\int f(x)dx = \int f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt.$$

Доказ. Тада је <u>извод леве</u> стране: $\left(\int f(x)dx\right)'_x = f(x)$.

<u>Извод десне</u> стране: због $t = \varphi^{-1}(x)$, $\frac{dt}{dx} = \frac{1}{\varphi'(t)}$ је

$$\left(\int f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt\right)'_x = \frac{d}{dt}\left(\int f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt\right)\cdot\frac{dt}{dx} = f[\varphi(t)]\varphi'(t)\frac{1}{\varphi'(t)} = f[\varphi(t)] = f(x).$$

1. Интеграција ирационалних функција облика

$R\left(x, \sqrt{\alpha x+\beta}\right)$ своди се сменама $t=\sqrt{\alpha x+\beta}$ на интеграле рационалних функција.

2. Нека је у интегралу $\int R(x, x^{m/n}, \ldots, x^{r/s})\,dx$, *k* најмањи заједнички именилац

разломака *m*/*n*, ..., *r*/*s*, тада се сменом $x = t^k$ интегранд трансформише у рационалну функцију.

14. Метода смене у неодређеном интегралу.

- Метода смене у неодређеном интегралу. Доказ.
- Интеграција ирационалних функција облика $R\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{\alpha x+\beta}}\right)$

Ако се при одређивању интеграла $\int f(x)\,dx$ не може лако наћи примитивна функција, а знамо да постоји може се применити метода смене $x = \varphi(t)$, где $\varphi(t)$ мора бити непрекидна и диференцијабилна функција за коју је $\varphi'(t) \neq 0$ и која има своју инверзну функцију. У том случају ће бити $dx=\varphi'(t)dt$, па

$$\int f(x)\,dx = \int f[\varphi(t)]\varphi'(t)\,dt$$
.

Доказ. Тада је извод леве стране: $\left(\int f(x)\,dx\right)'_x = f(x)$.

Извод десне стране: због $t=\varphi^{-1}(x)$, $\frac{dt}{dx}=\frac{1}{\varphi'(t)}$ је

$$\left(\int f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt\right)'_x = \frac{d}{dt}\left(\int f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt\right)\cdot\frac{dt}{dx} = f[\varphi(t)]\varphi'(t)\frac{1}{\varphi'(t)} = f[\varphi(t)] = f(x)$$

Интеграција ирационалних функција облика $R\left(x,\sqrt[n]{\frac{ax+b}{\alpha x+\beta}}\right)$ своди се сменама $t=\sqrt[n]{\frac{ax+b}{\alpha x+\beta}}$ на интеграле рационалних функција.

16. Израчунавање дужине лука криве.

· Написати формулу за израчунавање дужине лука криве $y = f(x)$, a £ x £ b

· Доказ – извођење формуле

· Написати формулу за рачунање лука криве задате параметарски

- За део Δs лука криве $y = f(x)$ између тачака $M(x, y)$ и $M_1(x+\Delta x, y+\Delta y)$ важи

$$\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} \le \Delta s \le \sqrt{(\Delta x)^2 + (dy)^2} + (dy - \Delta y)$$
,

где је $\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$ дужина одсечка MM_1.

Ако је $f(x)$ непрекидно диференцијабилна функција, онда се може показати, уз претпоставку да је $\Delta x>0$, да је

$$\sqrt{1+\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2} \le \frac{\Delta s}{\Delta x} \le \sqrt{1+\left(\frac{dy}{\Delta x}\right)^2} + \frac{\varepsilon}{\Delta x},$$

јер је за диференцијабилне функције $dy - \Delta y = o(\Delta x)$. Преласком на граничне вредности добија се

$$\lim_{\Delta x\to 0}\sqrt{1+\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2} \le \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta s}{\Delta x} \le \lim_{\Delta x\to 0}\sqrt{1+\left(\frac{dy}{\Delta x}\right)^2},\ \varepsilon = o(\Delta x),$$

значи $\dfrac{ds}{dx}=\sqrt{1+\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2}$, тј. $ds=\sqrt{1+\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2}dx$.

Према томе ако се формирају одговарајуће интегралне суме, добија се да је дужина лука криве $y = f(x)$ над одсечком $x\in[a, b]$ једнака вредности одређеног интеграла

.

- Ако је једначина криве дата у параметарском облику $x=\varphi(t),\ \ y=\psi(t),\quad \alpha\le t\le\beta,$ тада се дужина лука дате криве рачуна помоћу интеграла

$$s=\int_\alpha^\beta\sqrt{1+\left(\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}\right)^2}\,\varphi'(t)dt,$$

тј.

$$s=\int_\alpha^\beta\sqrt{(\varphi'(t))^2+(\psi'(t))^2}\,dt.$$

17. Израчунавање запремине ротационог тела.

- Написати формулу за израчунавање запремине тела *Vx* добијеног ротацијом
око *Ox* осе
- Извођење формуле за запремину *Vx* ротационог тела
- Написати формулу за израчунавање запремине тела *Vy* добијеног ротацијом
око *Oy* осе

Ако је Ω тело образовано ротацијом око осе *Ox* криволинијског трапеза ограниченог кривом $y = f(x)$, осом *Ox* и правама $x = a$, $x = b$, онда је попречни пресек круг чија је површина

$$P = \pi\left[\, f(x)\right]^2 = \pi\, y^2$$

па ће његова запремина бити

$$V = \pi\int_a^b \left[\, f(x)\right]^2 dx = \pi\int_a^b y^2\, dx$$

.

- Ако је Ω неко (тродимензионо) тело за које нам је позната површина сваког пресека са равнима ортогоналним на осу *Ox*, тада ће та површина зависити од положаја пресечне равни, тј. од x, $P = P(x)$.

Ако поставимо равни $x = x_0 = a$, $x = x_1$, $x = x_2$, … , $x = x_n = b$, где је $x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n$, тада смо тело Ω разложили на слојеве који представљају тзв. елементарне цилиндре, чија је запремина

,

где је површина попречног пресека $P(\xi_k)$ основа цилиндра, а Δx_k његова висина.

Запремина свих ових цилиндара ће бити

,

а гранична вредност интегралне суме кад $n \to \infty$, тј. кад max $\Delta x_k \to 0$, уколико постоји, представља запремину датог тела Ω

.

18. Израчунавање површине ротационе површи.

- Написати формулу за израчунавање површине површи P_x добијене ротацијом
око Ox осе
- Извођење формуле за површину P_x ротационе површи
- Написати формулу за израчунавање површине површи P_y добијене ротацијом
око Oy осе

- Нека је дата површ образована ротацијом криве $y = f(x)$ око осе Ox и нека је $f(x)$ непрекидна и диференцијална функција у свим тачкама одсечка $[a, b]$.
- Свака тетива лука Δs_k, $k = 1, \ldots, n$ при ротацији образује конусну површ чија је површина ,
- где је .
- Према Лагранжевој теореми

$$\frac{\Delta y_k}{\Delta x_k} = \frac{f(x_k) - f(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}} = f'(\xi_k), \quad x_{k-1} \le \xi_k \le x_k$$

- ,

$$\Delta s_k = \sqrt{1 + \left(f'(\xi_k)\right)^2} \cdot \Delta x_k \qquad \Delta P_k = 2\pi \frac{y_{k-1} + y_k}{2} \sqrt{1 + \left(f'(\xi_k)\right)^2} \cdot \Delta x_k$$

- па је , ,
- а укупна површина ротационе површи израчуната на овај начин је

$$P_n = \pi \sum_{k=1}^{n} \left(f(x_{k-1}) + f(x_k)\right) \sqrt{1 + \left(f'(\xi_k)\right)^2} \cdot \Delta x_k$$

- .
- Преласком на граничну вредност добија се

$$P=\lim_{\substack{\max \Delta x_k \to 0\\(n\to\infty)}} \pi\sum_{k=1}^{n} 2\left(f(\xi_k)\right)\sqrt{1+\left(f'(\xi_k)\right)^2}\cdot \Delta x_k$$

-

- тј. $$P=2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2}\,dx$$.

19. Дефиниција и особине двојног интеграла.

- Дефиниција двојног интеграла. Геометријско тумачење
- Навести особине двојног интеграла
- Доказати једну од особина двојног интеграла

Дефиниција. Нека је $f(x, y)$ (непрекидна) функција у затвореној просто повезаној области D и нека је D на произвољан начин подељена на елементарне области $\Delta\sigma_1$, $\Delta\sigma_2$, ..., $\Delta\sigma_n$. Ако постоји гранична вредност интегралне суме V_n када највећи пречник елементарних области тежи ка нули (ознака $d(\Delta\sigma_k)$), тада се та гранична вредност назива двојним интегралом функције $f(x, y)$ на области D и означава

$$\lim_{\substack{\max d(\Delta\sigma_k)\to 0\\(n\to\infty)}} \sum_{k=1}^{n} f(P_k)\Delta\sigma_k=\iint_D f(P)\,d\sigma$$

.

ОСНОВНА СВОЈСТВА ДВОЈНОГ ИНТЕГРАЛА

1) Ако је функција $f_1(x, y)$, $f_2(x, y)$,...,$f_m(x, y)$ непрекидна у затвореној просто повезаној области D

$$\iint_D \left[f_1(P)+\ldots+f_m(P)\right] d\sigma=\iint_D f_1(P)\,d\sigma+\ldots+\iint_D f_m(P)\,d\sigma,$$

где је $f_i(P) = f_i(x, y)$

2) Ако је функција $f(P)$ непрекидна у области D тј. Ω, тада је

$$\iint_D c\cdot f(P)\,d\sigma=c\iint_D f(P)\,d\sigma \quad (c=\text{const.}),$$

3) Ако непрекидна функција $f(P)$ у области D не мења знак, $\iint\limits_D f(P)d\sigma$

тада је

Доказ: Нека је $f(P) \geq 0$. Тада је $\sum\limits_{k=1}^{n} f(P_k)\Delta\sigma_k \geq 0$. Како је функција $f(P)$ непрекидна и граничне вредности ових сума су ненегативни.

4) Ако је $D = D_1 \cup D_2$, где подобласти D_1 и D_2 немају заједничких тачака, тада је

$$\iint\limits_D f(P)d\sigma = \iint\limits_{D_1} f(P)d\sigma + \iint\limits_{D_2} f(P)d\sigma$$

,

5) **Теорема (о процени вредности двојног интеграла).** Ако су m и M најмања, односно највећа вредност функције $f(P)$ у области D, а $S(D)$ површина области D, тада је

$$mS(D) \leq \iint\limits_D f(P)d\sigma \leq MS(D)$$

.

6) **Теорема (о средњој вредности двојног интеграла).** Ако је $f(P) = f(x, y)$ непрекидна функција у затвореној области D равни Oxy, тада постоји унутрашња тачка $P_* = P_*(\xi,\eta)$ области D таква да је

$$\iint\limits_D f(P)d\sigma = f(P_*)S(D) = f(\xi,\eta)\iint\limits_D d\sigma$$

.

20. Дефиниција и особине тројног интеграла.

- Дефиниција тројног интеграла. Дефиниција n – димензионог интеграла
- Навести особине тројног интеграла
- Доказати једну од особина тројног интеграла

Дефиниција. Нека је $f(x, y, z)$ (непрекидна) функција у затвореној просто повезаној области Ω која је на произвољан начин подељена на елементарне области $\Delta\omega_k$. Изаберимо произвољне тачке $P_k \in \Delta\omega_k$ и означимо одговарајуће вредности дате функције са $f(P_k)$, $k = 1, ..., n$.

$$\sum_{k=1}^{n} f(P_k)\Delta\omega_k$$

Ако постоји гранична вредност суме када највећи пречник елементарних области $\Delta\omega_k$ такође тежи нули (тј. $n\to\infty$) тада се та гранична вредност назива тројни интеграл функције $f(x, y, z)$ по области Ω и означава се

$$\lim_{\substack{\max d(\Delta\omega_k)\to 0\\ (n\to\infty)}} \sum_{k=1}^{n} f(P_k)\Delta\omega_k = \iiint_{\Omega} f(P)\,d\omega$$

.

$$J = \iint\limits_{W}\!\dots\!\int f(P)\,dW$$

n-димензиони интеграл

(када је W просто повезана затворена n-димензиона област)

1. Ако је функција $f_1(x, y, z)$, $f_2(x, y, z)$,..., $f_m(x, y, z)$) непрекидна у тродимензионој области Ω, тада је

$$\iiint_{\Omega}\left[f_1(P)+\dots+f_m(P)\right]d\omega = \iiint_{\Omega} f_1(P)\,d\omega+\dots+\iiint_{\Omega} f_m(P)\,d\omega,$$

где је $f_i(P) = f_i(x, y, z)$, $i = 1, ..., m$.

2. Ако је функција $f(P)$ непрекидна у области D тј. Ω, тада је

$$\iiint_{\Omega} c\cdot f(P)\,d\omega = c\iiint_{\Omega} f(P)\,d\sigma\omega \quad (c = \text{const.}),$$

3. Ако непрекидна функција $f(P)$ у области Ω, не мења знак, тада је истог знака као и $f(P)$.

$$\sum_{k=1}^{n} f(P_k)\Delta\omega_k \geq 0$$

Доказ: Нека је $f(P) \geq 0$. Тада је . Како је функција $f(P)$ непрекидна и граничне вредности ових сума су ненегативни.

4. Ако је $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$, где подобласти Ω_1 и Ω_2 немају заједничких тачака, тада је

$$\iiint_{\Omega} f(P)d\omega = \iiint_{\Omega_1} f(P)d\omega + \iiint_{\Omega_2} f(P)d\omega$$

.

5. **Теорема (о процени вредности тројног интеграла).** Ако је $m = \min_{P\in\Omega} f(P)$ и $M = \max_{P\in\Omega} f(P)$, а $V(\Omega)$ запремина тродимензионе области, тада је

$$mV(\Omega) \leq \iiint_{\Omega} f(P)d\omega \leq MV(\Omega)$$

.

6. **Теорема (о средњој вредности тројног интеграла).** Ако је $f(P) = f(x, y, z)$ непрекидна функција у затвореној тродимензионој области Ω, тада постоји унутрашња тачка $P_* = P_*(\xi,\eta,\zeta)$ области Ω таква да је

$$\iiint_{\Omega} f(P)d\omega = f(P_*)V(\Omega) = f(\xi,\eta,\zeta)\iint_{\Omega} d\omega$$

.

21. Свођење двојног на двоструки интеграл.

- Дефиниција двојног интеграла.
- Свођење двојног на двоструки интеграл за правоугаону област
- Свођење двојног на двоструки интеграл за произвољну просто повезану област

Дефиниција. Нека је $f(x, y)$ (непрекидна) функција у затвореној просто повезаној области D и нека је D на произвољан начин подељена на елементарне области $\Delta\sigma_1$, $\Delta\sigma_2$, ..., $\Delta\sigma_n$. Ако постоји гранична вредност интегралне суме V_n када највећи пречник елементарних области тежи ка нули (ознака $d(\Delta\sigma_k)$), тада се та гранична вредност назива двојним интегралом функције $f(x, y)$ на области D и означава

.

Нека је област D правоугаоник $D=\{(x, y): a \le x \le b, c \le y \le d\}$, покривен правоугаоном праволинијском мрежом x, y = const, тако да је површина елемента те области $\Delta\sigma = \Delta x \Delta y$, одакле је, при преласку на граничну вредност $d\sigma = dxdy$.

Како двојни интеграл геометријски представља запремину цилиндричног тела чије су основе област D у равни Oxy и површ $z = f(x, y)$, интеграција се састоји у томе да тачка $P(x, y)$ прође кроз све тачке области D. То се може урадити тако да се привремено сматра да је x = const., тако да интегранд $f(x, y)$ зависи само од y, па је

$$\int_c^d f(x, y)dy = F(x)$$

површина криволинијског трапеза $P_1P_2M_2M_1$ при чему је x параметар, а $P(x, y)$ пролази кроз све тачке одсечка P_1P_2.

Ако пустимо да одсечак P_1P_2 пролази транслаторно кроз све тачке области D, криволинијски трапез ће проћи кроз све тачке посматраног цилиндричног тела, па $V = \int_a^b F(x)dx$, тј. $V = \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y)dy \right) dx$, дакле, $\iint_D f(x, y)dxdy = \int_a^b dx \int_c^d f(x, y)dy$,
где је на десној страни израза тзв. двоструки интеграл, односно на два обична интеграла функције једне променљиве

У интегралу по правоугаоној области D може се изменити поредак интеграције (фиксирањем променљиве y), при чему границе интеграције остају неизмењене:

$$\int_a^b dx \int_c^d f(x, y)dy = \int_c^d dy \int_a^b f(x, y)dx$$

.

22. Свођење тројног на троструки интеграл.

• Дефиниција тројног интеграла. Дефиниција n – димензионог интеграла
• Свођење тројног интеграла на троструки

Дефиниција. Нека је $f(x, y, z)$ (непрекидна) функција у затвореној просто повезаној области Ω која је на произвољан начин подељена на елементарне области $\Delta\omega_k$. Изаберимо произвољне тачке $P_k \in \Delta\omega_k$ и означимо одговарајуће вредности дате функције са $f(P_k)$, $k = 1, \dots, n$.

Ако постоји гранична вредност суме $\sum_{k=1}^{n} f(P_k)\Delta\omega_k$ када највећи пречник елементарних области $\Delta\omega_k$ такође тежи нули (тј. $n\to\infty$) тада се та гранична вредност назива тројни интеграл функције $f(x, y, z)$ по области Ω и означава се

$$\lim_{\substack{\max d(\Delta\omega_k)\to 0\\ (n\to\infty)}} \sum_{k=1}^{n} f(P_k)\Delta\omega_k = \iiint_{\Omega} f(P)\,d\omega .$$

n-димензиони интеграл

(када је W просто повезана затворена n-димензиона област)

Тродимензиону простоповезану област Ω у простору $Oxyz$ делимо на елементарне области низом равни паралелних координатним равнима тако да им је запремина $\Delta\omega = \Delta x\Delta y\Delta z$, а при преласку на граничну вредност $d\omega = dxdydz$.

Претпоставимо да је Ω затворена тродимензиона област чију границу (S) праве паралелне координатним осама секу највише у двема тачкама.

Процес интеграције се састоји у томе да тачка $M(x, y, z)$ прође кроз све тачке области Ω. Прво ћемо око области Ω описати цилиндрични омотач са генератрисама ортогоналним на једну координатну раван, на пр. Oxy. Он исеца у тој равни област D, чија је контура (L') пројекција додирне криве (L) цилиндричног омотача и тела Ω. Крива (L) дели површ (S) на доњи и горњи део на којима је променљива z једнозначна непрекидна функција независних променљивих x и y:

$$z = z_1(x, y),\ \ z = z_2(x, y),\quad (x, y) \in D,$$

тј. $\Omega = \{(x, y, z) : (x, y) \in D,\ \ z_1(x, y) \le z \le z_2(x, y)\}$.

Ако прво сматрамо да су x и y константне, најпре се врши интеграција функције $f(x, y, z)$ дуж одсечка M_1M_2, променљиве дужине, чији се грајеви налазе на доњем, односно горњем делу површи (S). Тако се добија

$$F(x, y) = \int_{z_1(x, y)}^{z_2(x, y)} f(x, y, z)\, dz .$$

Кад тачка $P(x, y, 0)$ (пројекција тачке $M(x, y, z)$) прође кроз све тачке области D, одсечак M_1M_2 ће проћи кроз све тачке тела Ω. Зато је

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z)dxdydz = \iint_{D} F(x, y)dxdy = \iint_{D} dxdy \int_{z_1(x, y)}^{z_2(x, y)} f(x, y, z)\, dz .$$

Ако је $D = \{(x, y) : a \le x \le b, \varphi_1(x) \le y \le \varphi_2(x)\}$, онда је

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z)dxdydz = \int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} dy \int_{z_1(x, y)}^{z_2(x, y)} f(x, y, z)\, dz ,$$

где је на десној страни тзв. троструки интеграл.

23. Смена променљивих у двојном интегралу. Поларне координате.

- Општи случај смене у двојном интегралу
- Специјални случај смене у двојном интегралу: поларне координате

ОПШТИ СЛУЧАЈ ТРАНСФОРМАЦИЈЕ ПРОМЕНЉИВИХ У ДВОЈНОМ ИНТЕГРАЛУ

Ако уместо Декартових координата *x*, *y* уведемо нове променљиве *u*, *v* које су са *x* и *y* везане датим релацијама

$$x = x(u, v),\ y = y(u, v),$$

где су $x = x(u, v)$ и $y = y(u, v)$ непрекидне и диференцијалне функције у некој области D^* променљивих *u* и *v*, тада дату област *D* у равни покривамо криволинијском мрежом која не мора бити ортогонална, а кроз сваку тачку области *D* пролази само по једна линија од сваке породице кривих $u = \text{const}$, $v = \text{const}$ (при чему се допушта коначно много иузетака).

Диференцирањем горњих једнакости добија се

$$\begin{aligned} dx &= x_u\,du + x_v\,dv \\ dy &= y_u\,du + y_v\,dv \end{aligned}, \quad \text{тј.} \quad \begin{bmatrix} dx \\ dy \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{bmatrix} \begin{bmatrix} du \\ dv \end{bmatrix}.$$

У квадратној матрици су функције од *u* и *v*, а одговара јој функционална детерминанта, која се зове Јакобијан

$$J = \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{vmatrix}.$$

При томе $|J|$ је коефицијент деформације при пресликавању $(x, y) \to (u, v)$, где се *D* пресликава у D^*. Дакле

$$dxdy = |J|\,dudv,$$

па је, уз претпоставку да је $J \neq 0$

$$\iint_D f(x,y)\,dxdy = \iint_{D^*} f(x(u,v),\ y(u,v))\,|J|\ dudv$$
.

<u>ТРАНСФОРМАЦИЈА ДЕКАРТОВИХ У ПОЛАРНЕ КООРДИНАТЕ</u>

У двојном интегралу $\iint_D f(x,y)\,dxdy$ Декартове координате x, y тачке P замењујемо поларним ρ, φ помоћу следећих веза

$$x = \rho\cos\varphi, \qquad y = \rho\sin\varphi\,.$$

Одатле добијамо да је

$$\begin{aligned} dx &= \cos\varphi\, d\rho - \rho\sin\varphi\, d\varphi \\ dy &= \sin\varphi\, d\rho + \rho\cos\varphi\, d\varphi \end{aligned}$$
, тј.

$$\begin{bmatrix} dx \\ dy \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\rho\sin\varphi \\ \sin\varphi & \rho\cos\varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d\rho \\ d\varphi \end{bmatrix}$$

па је

$$J = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -\rho\sin\varphi \\ \sin\varphi & \rho\cos\varphi \end{vmatrix} = \rho\left(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi\right) = \rho$$
,

а елемент површине је $d\sigma = dxdy = \rho\, d\rho\, d\varphi$. На основу тога је

$$\iint_D f(x,y)\,dxdy = \iint_{D^*} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\rho\, d\rho\, d\varphi = \iint_{D^*} f^*(\rho,\varphi)\rho\, d\rho\, d\varphi$$
.

24. Смена променљивих у тројном интегралу. Цилиндричне координате.

- Општи случај смене у тројном интегралу
- Специјални случај смене у тројном интегралу: цилиндричне координате

ОПШТИ СЛУЧАЈ ТРАНСФОРМАЦИЈЕ ПРОМЕНЉИВИХ У ТРОЈНОМ ИНТЕГРАЛУ

Ако уместо Декартових координата x, y, z уведемо нове променљиве u,v,w преко релација

$$x = x(u, v, w), \quad y = y(u, v, w), \quad z = z(u, v, w),$$

где су $x = x(u, v, w)$, $y = y(u, v, w)$, $z = z(u, v, w)$ непрекидне и диференцијалне функције по u, v, w у области $\Omega' = \{(u, v, w)\}$, тада је

$$\begin{aligned} dx &= x_u du + x_v dv + x_w dw \\ dy &= y_u du + y_v dv + y_w dw \\ dz &= z_u du + z_v dv + z_w dw \end{aligned}, \quad \text{тј.} \quad \begin{bmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_u & x_v & x_w \\ y_u & y_v & y_w \\ z_u & z_v & z_w \end{bmatrix} \begin{bmatrix} du \\ dv \\ dw \end{bmatrix}$$

Квадратна матрица је матрица трансформације променљивих, а њена детерминанта је функционална и зове се Јакобијан

.

Коефицијент деформације тродимензионе области је $|J|$, па је

$d\omega = dxdydz = |J| dudvdw$, а уз претпоставку да је $J \neq 0$,

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z)\,dxdydz = \iiint_{\Omega^*} f^*(u, v, w)\,|J|\,dudvdw,$$

где је $f^*(u, v, w) = f[x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w)]$.

ТРОЈНИ ИНТЕГРАЛ У ЦИЛИНДАРСКИМ КООРДИНАТАМА

Нека је дата раван α и у њој тачка *O* и полуоса *OL*. Положај произвољне тачке *M* у тродимензионом простору, чија је пројекција на дату раван тачка *P*, је једнозначно одређен растојањем $\rho = OP$, углом $\varphi = \angle(OL, OP)$ и одсечком $z = PM$. При томе је

$$0 \le \rho \le \infty,\ 0 \le \varphi \le 2\pi, \qquad -\infty < z < \infty.$$

Ово су цилиндарске координате тачке *M*. Кроз сваку тачку простора, осим координатног почетка пролазе по три координатне површи: ρ = const (кружни цилиндри са изводницом нормалном на дату раван α), φ =const (полуравни нормалне на дату раван α, које садрже полуправу са почетком у тачки *O*), z = const (равни паралелне датој равни α)

Поставимо Декартов координатни систем *Oxyz* тако да се раван *Oxy* поклапа са равни α, а *Ox* са полуосом *OL*. Тада је

$$x = \rho\cos\varphi, \qquad y = \rho\sin\varphi, \qquad z = z,$$

односно $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\varphi = \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}$, $z = z$.

Ако у тројном интегралу заменимо Декартове координате цилиндарским, онда је :

$$\begin{bmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\rho\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \rho\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d\rho \\ d\varphi \\ dz \end{bmatrix}$$

, одакле .

Из тога следи $d\omega = dxdydz = \rho\, d\rho\, d\varphi\, dz$, а за тројни интеграл се добија

$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)dxdydz = \iiint_{\Omega^*} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi, z)\,\rho\, d\rho\, d\varphi\, dz$$

,

При томе иста област изражена преко променљивих *x*, *y*, *z* је означена са Ω, а изражена преко ρ, φ, *z* са Ω^*.

25. Смена променљивих у тројном интегралу. Сферне координате.

- Општи случај смене у тројном интегралу
- Специјални случај смене у тројном интегралу: сферне координате

ОПШТИ СЛУЧАЈ ТРАНСФОРМАЦИЈЕ ПРОМЕНЉИВИХ У ТРОЈНОМ ИНТЕГРАЛУ

Ако уместо Декартових координата *x*, *y*, *z* уведемо нове променљиве *u*,*v*,*w* преко релација

$$x = x(u, v, w), \quad y = y(u, v, w), \quad z = z(u, v, w),$$

где су $x = x(u, v, w)$, $y = y(u, v, w)$, $z = z(u, v, w)$ непрекидне и диференцијалне функције по *u*, *v*, *w* у области $\Omega' = \{(u, v, w)\}$, тада је

$$\begin{aligned} dx &= x_u du + x_v dv + x_w dw \\ dy &= y_u du + y_v dv + y_w dw \\ dz &= z_u du + z_v dv + z_w dw \end{aligned}$$

, тј.

$$\begin{bmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_u & x_v & x_w \\ y_u & y_v & y_w \\ z_u & z_v & z_w \end{bmatrix} \begin{bmatrix} du \\ dv \\ dw \end{bmatrix}$$

Квадратна матрица је матрица трансформације променљивих, а њена детерминанта је функционална и зове се Јакобијан

.

Коефицијент деформације тродимензионе области је $|J|$, па је

$d\omega = dxdydz = |J| dudvdw$, а уз претпоставку да је $J \neq 0$,

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z)\,dxdydz = \iiint_{\Omega^*} f^*(u, v, w)\,|J|\,dudvdw$$

,

где је $f^*(u, v, w) = f\left[x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w)\right]$.

<u>ТРОЈНИ ИНТЕГРАЛ У СФЕРНИМ КООРДИНАТАМА</u>

Нека је дата раван α и у њој тачка O и полуоса OL. Положај произвољне тачке M у тродимензионом простору, чија је пројекција на дату раван тачка P, је једнозначно одређен растојањем $\rho = OM$, углом $\varphi = \angle(OL, OP)$ и углом $\theta = \angle(OP, OM)$, при чему је

$$0 \le \rho \le \infty,\ 0 \le \varphi \le 2\pi, \qquad -\pi/2 \le \theta \le \pi/2.$$

Кроз сваку тачку $M \neq O$ пролазе по три координатне површи: ρ = const (концентричне сфере са центром у O), φ =const (полуравни кроз тачку O, нормалне на дату раван α), θ =const (конуси с теменом O)

То су сферне координате тачке M, које су са Декартовим повезане релацијама

$$x = \rho\cos\theta\,\cos\varphi\,, \quad y = \rho\cos\theta\,\sin\varphi\,, \quad z = \rho\sin\theta$$

, тј.

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\,, \qquad \varphi = \operatorname{arctg}\frac{y}{x}\,, \qquad \theta = \arcsin\frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}\,.$$

Елемент запремине $d\omega$ се добија на основу ових веза, тако да је

$$\begin{bmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta\cos\varphi & -\rho\cos\theta\sin\varphi & -\rho\sin\theta\cos\varphi \\ \cos\theta\sin\varphi & \rho\cos\theta\cos\varphi & -\rho\sin\theta\sin\varphi \\ \sin\theta & 0 & \rho\cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d\rho \\ d\varphi \\ d\theta \end{bmatrix}$$

тј.

$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(\rho,\varphi,\theta)} = \begin{vmatrix} \cos\theta\cos\varphi & -\rho\cos\theta\sin\varphi & -\rho\sin\theta\cos\varphi \\ \cos\theta\sin\varphi & \rho\cos\theta\cos\varphi & -\rho\sin\theta\sin\varphi \\ \sin\theta & 0 & \rho\cos\theta \end{vmatrix} = \rho^2\cos\theta$$,

а $d\omega = dxdydz = \rho^2 \cos\theta \; d\rho\, d\varphi\, d\theta$.

Одавде се при трансформацији Декартових координата у сферне, код тројног интеграла, добија

$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)dxdydz = \iiint_{\Omega^*} f^*(\rho,\varphi,\theta)\rho^2\cos\theta\, d\rho\, d\varphi\, d\theta$$,

где је $f^*(\rho,\varphi,\theta) = f(\rho\cos\theta\cos\varphi, \rho\cos\theta\sin\varphi, \rho\sin\theta)$, а Ω и Ω^* су ознаке за област интеграције изражену преко координата x, y, z, односно ρ, φ, θ.

26. Примене двојних и тројних интеграла.

- Навести могуће примене двојног интеграла
- Навести могуће примене тројног интеграла
- Извести формулу за израчунавање површине криве површи.

1. **Запремина цилиндричног тела** којем је једна основа D у равни Oxy, а друга основа површ $z = f(x, y)$, $(x, y) \in D$ (при чему $f(x, y)$ не мења знак у области D), а генератрисе омотача су паралелне оси Oz, дата је двојним интегралом

$$V = \iint_D f(x,y)d\sigma$$,

где је $d\sigma$ елемент површине области интеграције D.

$$S(D) = \iint\limits_D d\sigma$$

2. **Површина** области *D* интеграције, је .

3. **Запремина** тела Ω се изражава тројним интегралом

$$V(\Omega) = \iiint\limits_\Omega dw$$

, где је *dw* елемент запремине тела Ω.

4. Ако се области *D* и Ω састоје од материјалних тачака и ако је у тим областима дефинисана густина $\delta(x, y)$, односно $\delta(x, y, z)$, као непрекидна функција координата тачке, тада је **маса** области *D*

$$M(D) = \iint\limits_D \delta(x, y)\, d\delta$$

,

$$M(\Omega) = \iiint\limits_\Omega \delta(x, y, z)\, dw$$

а **маса** области Ω .

5. **Површина ограниченог дела површи.**

$$S = \lim_{\substack{n\to\infty \\ \max\, d(\Delta\sigma_k)\to 0}} \sum_{k=1}^{n} \sqrt{1 + p^2 + q^2}\, \Delta\sigma_k$$

, тј.

$$S = \iint\limits_D \sqrt{1 + p^2 + q^2}\, dxdy$$

($p = z'_x$, $q = z'_y$).

27. Појам бесконачног бројног реда. Конвергенција реда.

- Дефинисати низ парцијалних сума
- Дефинисати бројни ред и конвергенцију реда

• Доказати да је неопходни услов за конвергенцију реда да општи члан тежи нули
кад $n \to \infty$

Дефиниција. Низом делимичних сума реда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ назива се низ $\{s_n\}$ чији је општи члан $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$, $n = 1, 2, 3, \ldots$; s_n је (делимична) парцијална сума тог реда.

Дефиниција. Израз облика $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots$ или $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ називамо бесконачним бројним редом; a_1, a_2, a_3, ... су чланови бесконачног реда; a_n је општи члан тог реда.

Дефиниција. Бесконачни ред $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ назива се конвергентним (дивергентним) ако конвергира (дивергира) низ његових делимичних сума $\{s_n\}$. Сума конвергентног реда је број

$$s = \lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k .$$

Ако је ред $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ конвергентан и има суму s, тада се пише

$$s = \sum_{k=1}^{\infty} a_k .$$

Теорема. Ако је ред $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ конвергентан, тада његов општи члан $a_n \to 0$ кад $n \to \infty$.

Доказ. Ако ред конвергира, конвергира и његов низ делимичних сума, $\lim_{n\to\infty} s_n = s$, па је

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}(s_n - s_{n-1}) = s - s = 0$$

.

28. Редови са ненегативним члановима. Критеријуми упоређивања.

- Услов за конвергенцију реда са ненегативним члановима, изражен преко низа
делимичних сума
- Навести критеријуме упоређивање прве и друге врсте
- Доказати да је неопходни услов за конвергенцију реда да општи члан тежи нули
кад $n \to \infty$

Теорема 1. Ред са позитивним члановима може само конвергирати или дивергирати према $+\infty$. Такав ред је конвергентан тада и само тада ако су његове делимичне суме ограничене.

КРИТЕРИЈУМИ УПОРЕЂИВАЊА

Теорема 1. (Критеријум упоређивања прве врсте) Нека је ред $\sum_{k=0}^{\infty} c_k$ конвергентан, а ред $\sum_{k=0}^{\infty} d_k$ дивергентан и нека су оба, редови са позитивним члановима. Ако чланови неког датог реда $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ са позитивним члановима задовољавају услов $a_n \leq c_n$, за све $n > m$ ($m \in N$), тада је ред $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ конвергентан. Ако $a_n \geq d_n$ за све $n > m$ ($m \in N$), тада је ред $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ дивергентан.

Теорема 2. (Критеријум упоређивања друге врсте) Нека је ред $\sum_{k=0}^{\infty} c_k$ конвергентан, а ред $\sum_{k=0}^{\infty} d_k$ дивергентан и нека су оба, редови са позитивним члановима. Ако за чланове реда $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ с позитивним члановима за $\forall n \geq m$ ($m \in N$), важи $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \frac{c_{n+1}}{c_n}$, тада је ред $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ конвергентан; ако је за $\forall n \geq m$ ($m \in N$), $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq \frac{d_{n+1}}{d_n}$, тада је ред $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ дивергентан.

Теорема. Ако је ред $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ конвергентан, тада његов општи члан $a_n \to 0$ кад $n \to \infty$.

Доказ. Ако ред конвергира, конвергира и његов низ делимичних сума, $\lim_{n\to\infty} s_n = s$, па је

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}(s_n - s_{n-1}) = s - s = 0$$

.

29. Алтернативни редови. Лајбницов критеријум конвергенције реда.

• Дефинисати алтернативни ред и формулисати Лајбницов критеријум
конвергенције
• Доказати Лајбницов критеријум конвергенције
• Дефинисати апсолутну и условну конвергенцију

Дефиниција. Алтернативним редовима се називају редови облика

$$\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k a_k, \quad a_k > 0, \quad \forall k \in N$$

,

где је $\{a_k\}$ монотоно опадајући низ позитивних бројева.

Алтернативни ред $a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + \dots$, у којем чланови $a_k > 0$ монотоно опадају ($a_k > a_{k+1}$, $\forall k = 0, 1, 2, \dots$) и теже нули, назива се Лајбницовим редом.

Теорема. (Лајбницов критеријум) Лајбницов ред конвергира и његова сума $s < a_0$.

Доказ. За Лајбницов ред, делимична сума са непарним индексом $2n + 1$ је једнака

$$s_{2n+1} = a_0 - (a_1 - a_2) - (a_3 - a_4) - \ldots - (a_{2n-1} - a_{2n}) - a_{2n+1}$$

,

што значи да је је $s_{2n+1} < a_0,\ n \in N$. С друге стране,

$$s_{2n+1} = (a_0 - a_1) + (a_2 - a_3) + \ldots + (a_{2n} - a_{2n+1})$$

,

из чега следи да монотоно неопада. Зато постоји гранична вредност, за коју важи

$$a_0 - a_1 < \lim_{n\to\infty} s_{2n+1} = s < a_0$$

.

За парне чланове низа делимичних сума важи

$$\lim_{n\to\infty} s_{2n} = \lim_{n\to\infty} (s_{2n+1} - a_{2n+1}) = s$$

чиме је доказан Лајбницов критеријум конвергенције.

Дефиниција. За конвергентан ред $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ кажемо да је апсолутно конвергентан, ако конвергира и ред $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$. У супротном, када ред $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ дивергира, за конвергентан ред $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ кажемо да условно конвергира.

30. Интегрални критеријум конвергенције бројног реда.

- Формулисати интегрални критеријум конвергенције бројног ред
- Доказати интегрални критеријум конвергенције бројног ред

Теорема. Ако је $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ дати ред са позитивним монотоно опадајућим члановима, а $f(x)$ за $x \geq 1$ непрекидна позитивна монотоно опадајућа функција таква да је $\forall n$, $f(n) = a_n$, тада ред $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ конвергира ако и само ако несвојствени интеграл $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ постоји (конвергира).

Ако интеграл $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ не постоји, тада је ред $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ дивергентан.

Доказ. Како је *f*(*x*) опадајућа функција, важи

$$f(2)+f(3)+\ldots+f(n)\le\int_1^n f(x)dx\le f(1)+f(2)+\ldots+f(n-1)$$

.Ако интеграл $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ постоји, означимо га са *J*. Тада је

$\int_1^n f(x)dx\le J$, па ред $\sum_{n=2}^{\infty} f(n)$ има ограничне делимичне суме и према томе, конвергира, из чега следи

конвергенција реда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Обрнуто, ако је ред $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ конвергентан и има суму *s*, тада је $\int_1^n f(x)dx\le s$, па

конвергира интеграл $\int_1^{+\infty} f(x)dx$.