

# ФУНКЦИЈЕ ВИШЕ ПРОМЕНЉИВИХ

## Задаци са колоквијума

Драган Ђорић

### Садржај

1	Непрекидност	3
2	Парцијални изводи и диференцијал	7
3	Диференцијабилност	11
4	Градијент. Извод у правцу и смеру датог вектора	14
5	Тејлоров полином	17
6	Локални екстремуми	20
7	Условни екстремуми	23
8	Екстремне вредности на области	25

*Студентима генерације 2010/2011 (групе А9, А10 и А11)*

Ова мала збирка садржи 258 задатака који су се бар једном појавили на првом колоквијуму из предмета *Математика 1* у периоду од 1995. до 2010. године. Задаци су разврстани по темама из којих се дају задаци за први колоквијум, а у оквиру сваке теме разврстани су и по годинама.

# 1 Непрекидност

Испитати непрекидност дате функције у тачки  $(0, 0)$ .

*Колоквијум, 2010*

$$\mathbf{1.1} \quad f(x, y) = \begin{cases} \frac{y^3 \sin \frac{1}{x^4+y^4} - x^3 \cos \frac{1}{x^4+y^4}}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

$$\mathbf{1.2} \quad f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 \sin \frac{1}{x^2+y^2} + y^3 \cos \frac{1}{x^2+y^2}}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

$$\mathbf{1.3} \quad f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2} \sin \frac{1}{x^4 + y^4} \cos \frac{1}{x^4 + y^4}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

$$\mathbf{1.4} \quad f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 - y^3}{x^2 + y^2} \sin \frac{1}{x^2 + y^2} \cos \frac{1}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

*Колоквијум, 2009*

Није било задатака на ову тему.

*Колоквијум, 2008*

Испитати непрекидност дате функције у тачки  $(0, 0)$ .

$$\mathbf{1.5} \quad f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^5 + y^5}{x^4 + y^4}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

$$\mathbf{1.6} \quad f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 + y^5}{x^4 + y^4}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

$$\mathbf{1.7} \quad f(x, y) = \begin{cases} \frac{x + y^3}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

$$\mathbf{1.8} \quad f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

$$\mathbf{1.9} \quad f(x, y) = \begin{cases} \frac{y^3 - x^3}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

$$\mathbf{1.10} \quad f(x, y) = \begin{cases} \frac{y^3 - x}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

$$\mathbf{1.11} \quad f(x, y) = \begin{cases} \frac{y^5 - x^3}{x^4 + y^4}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

$$\mathbf{1.12} \quad f(x, y) = \begin{cases} \frac{y^5 - x^5}{x^4 + y^4}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

$$\mathbf{1.13} \quad f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy^3}{x^4 + y^4}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

$$\mathbf{1.14} \quad f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2y^3}{x^4 + y^4}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

$$\mathbf{1.15} \quad f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3y^4}{x^6 + y^6}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

$$\mathbf{1.16} \quad f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2y^4}{x^6 + y^6}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

$$\mathbf{1.17} \quad f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3y^2}{x^4 + y^4}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

$$\mathbf{1.18} \quad f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3y}{x^4 + y^4}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

$$\mathbf{1.19} \quad f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^4y^2}{x^6 + y^6}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

$$\mathbf{1.20} \quad f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^4y^3}{x^6 + y^6}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

*Колоквијум, 2007*

$$\mathbf{1.21} \quad f(x, y) = \begin{cases} (x^2 + y^2) \sin \frac{1}{|x| + |y|} \cos \frac{1}{|x| + |y|}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

$$\mathbf{1.22} \quad f(x, y) = \begin{cases} (x - y) \sin \frac{1}{x^2 + y^2} \cos \frac{1}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

$$\mathbf{1.23} \quad f(x, y) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x^2 + y^2} + y \cos \frac{1}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

$$\mathbf{1.24} \quad f(x, y) = \begin{cases} yx \sin \frac{1}{x^2 + y^2} + x \cos \frac{1}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

*Колоквијум, 2006*

$$\mathbf{1.25} \quad f(x, y) = \begin{cases} -\frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

$$\mathbf{1.26} \quad f(x, y) = \begin{cases} \frac{y^3 - x^3}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

$$\mathbf{1.27} \quad f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 - y^3}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

$$\mathbf{1.28} \quad f(x, y) = \begin{cases} -\frac{x^4 + y^4}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

$$\mathbf{1.29} \quad f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy^3}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

$$\mathbf{1.30} \quad f(x, y) = \begin{cases} \frac{y^4 - x^4}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

$$\mathbf{1.31} \quad f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 y}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

*Колоквијум, 2005*

$$\mathbf{1.32} \quad f(x, y) = \begin{cases} \frac{2x^4 + xy^2 - x^4 y + 2y^2}{x^4 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 2, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

$$\mathbf{1.33} \quad f(x, y) = \begin{cases} \frac{y^3 - x^2 y}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

$$\mathbf{1.34} \quad f(x, y) = \begin{cases} 5 - \frac{2xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} \sin \frac{2xy}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 5, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

$$\mathbf{1.35} \quad f(x, y) = \begin{cases} \frac{3x^2 + x^2 y - xy^4 + 3y^4}{x^2 + y^4}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 3, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

*Колоквијум, 2004*

$$\mathbf{1.36} \quad f(x, y) = \begin{cases} 1 - \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 1, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

$$\mathbf{1.37} \quad f(x, y) = \begin{cases} 2 - \frac{x^2 y - xy^4}{x^2 + y^4}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 2, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

$$\mathbf{1.38} \quad f(x, y) = \begin{cases} 3 - \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} \cos \frac{xy}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 3, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

$$\mathbf{1.39} \quad f(x, y) = \begin{cases} xy \cdot \frac{2x^2 + 3y^2}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

*Колоквијум, 2003*

$$\mathbf{1.40} \quad f(x, y) = \begin{cases} xy \frac{x^2 + 2y^2}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

$$\mathbf{1.41} \quad f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^4 y - xy^2}{x^4 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

$$\mathbf{1.42} \quad f(x, y) = \begin{cases} \frac{2x^2 y^2}{|x^3| + |y^3|}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

$$\mathbf{1.43} \quad f(x, y) = \begin{cases} xy \frac{x - y}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

*Колоквијум, 2002*

$$\mathbf{1.44} \quad f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 y}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

$$\mathbf{1.45} \quad f(x, y) = \begin{cases} \frac{(x - y^2)^3}{x^2 + y^4}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

$$\mathbf{1.46} \quad f(x, y) = \begin{cases} \frac{y^3}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

*Колоквијум, 2001*

$$\mathbf{1.47} \quad f(x, y) = \begin{cases} e^{-(x^2/y^2 + y^2/x^2)}, & xy \neq (0, 0) \\ 0, & xy = (0, 0) \end{cases}$$

$$\mathbf{1.48} \quad f(x, y) = \begin{cases} \sqrt[3]{xy} \cos \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

*Колоквијум, 2000*

Није било задатака на ову тему.

*Колоквијум, 1999*

Колоквијум није одржан због бомбардовања Југославија од стране НАТО пакта.

Колоквијум, 1998

$$1.49 \quad f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y - xy^4}{x^2 + y^4}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

$$1.50 \quad f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy + 2x^3}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Колоквијум, 1997

$$1.51 \quad f(x, y) = \begin{cases} x^2 \frac{x - y}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

$$1.52 \quad f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^{4/3} y^{5/3}}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Колоквијум, 1996

$$1.53 \quad f(x, y) = \begin{cases} x \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Колоквијум, 1995

$$1.54 \quad f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} \sin \frac{xy}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

$$1.55 \quad f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y - xy^2}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

## 2 Парцијални изводи и диференцијал

Колоквијум, 2010

$$2.1 \quad \text{Дата је функција } f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 y}{x^2 + y^2} + 3x - x^2, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}.$$

(1) Израчунати  $f'_y$  у тачки  $(x, y) \neq (0, 0)$ .

(2) Израчунати  $f'_y(0, 0)$ .

(3) Испитати непрекидност функције  $f'_y$  у тачки  $(0, 0)$ .

$$2.2 \quad \text{Дата је функција } f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy^3}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}.$$

(1) Израчунати  $f'_x$  у тачки  $(x, y) \neq (0, 0)$ .

(2) Израчунати  $f'_x(0, 0)$ .

(3) Испитати непрекидност функције  $f'_x$  у тачки  $(0, 0)$ .

**2.3** Дата је функција  $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 y}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$ .

(1) Израчунати  $f'_y$  у тачки  $(x, y) \neq (0, 0)$ .

(2) Израчунати  $f'_y(0, 0)$ .

(3) Испитати непрекидност функције  $f'_y$  у тачки  $(0, 0)$ .

**2.4** Дата је функција  $f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy^3}{x^2 + y^2} + 2y - y^2, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$ .

(1) Израчунати  $f'_x$  у тачки  $(x, y) \neq (0, 0)$ .

(2) Израчунати  $f'_x(0, 0)$ .

(3) Испитати непрекидност функције  $f'_x$  у тачки  $(0, 0)$ .

#### Колоквијум, 2009

Није било задатака на ову тему.

#### Колоквијум, 2008

Није било задатака на ову тему.

#### Колоквијум, 2007

Испитати да ли за дату функцију постоје парцијални изводи у тачки  $(0, 0)$

**2.5**  $f : (x, y) \mapsto \begin{cases} \frac{1 - \cos(x - y)}{x - y}, & x \neq y \\ 0, & x = y \end{cases}$

**2.6**  $f : (x, y) \mapsto \begin{cases} \frac{1 - \cos(x^2 - y)}{x^2 - y}, & x^2 \neq y \\ 0, & x^2 = y \end{cases}$

**2.7**  $f : (x, y) \mapsto \begin{cases} \frac{\cos(x + y) - 1}{x + y}, & y \neq -x \\ 0, & y = -x \end{cases}$

**2.8**  $f : (x, y) \mapsto \begin{cases} \frac{\cos(x + y^2) - 1}{x + y^2}, & x \neq -y^2 \\ 0, & x = -y^2 \end{cases}$

#### Колоквијум, 2006

**2.9** Функције  $(x, y) \mapsto u$  и  $(x, y) \mapsto v$  дефинисане су системом

$$u^2 + v^2 = xy, \quad uv + xy = 3$$

и условом  $u(1, 5) = 1$ . Израчунати  $du(1, 5)$  и  $dv(1, 5)$ .

**2.10** Функције  $(x, y) \mapsto u$  и  $(x, y) \mapsto v$  дефинисане су системом

$$u^2 + x^2 + y^2 = 5, \quad v^2 + uv = 2$$

и условом  $v(2, 0) = 1$ . Израчунати  $du(2, 0)$  и  $dv(2, 0)$ .



*Колоквијум, 2005*

**2.11** Функција  $f : (x, y) \mapsto z$  задата је имплицитно једнакошћу

$$xy^2 + 2y^2 + z^2 - 2yz - 2y = 3, \quad z > 0.$$

- (1) Одредити парцијане изводе првог реда функције  $f$ .
- (2) Одредити тотални диференцијал функције  $f$  у тачки  $A(0, 1)$ .
- (3) Написати једначину нормале површи  $z = f(x, y)$  у тачки  $(0, 1, z(A))$ .

**2.12** Функција  $f : (x, y) \mapsto z$  задата је имплицитно једнакошћу

$$4x^2 + 2y^2 + z^2 - 2yz - 2y = 3, \quad z > 0.$$

- (1) Одредити парцијане изводе првог реда функције  $f$ .
- (2) Одредити тотални диференцијал функције  $f$  у тачки  $A(0, 1)$ .
- (3) Написати једначину тангентне равни површи  $z = f(x, y)$  у тачки  $(0, 1, z(A))$ .

**2.13** Функција  $f : (x, y) \mapsto z$  задата је имплицитно једнакошћу

$$yz^2 - xy^2 + x^2z^2 + 2y - x = 0, \quad z < 0.$$

- (1) Одредити парцијане изводе првог реда функције  $f$ .
- (2) Одредити тотални диференцијал функције  $f$  у тачки  $A(1, 0)$ .
- (3) Написати једначину тангентне равни површи  $z = f(x, y)$  у тачки  $(1, 0, z(A))$ .

**2.14** Функција  $f : (x, y) \mapsto z$  задата је имплицитно једнакошћу

$$x^2y + 3xy^2 - xz^2 + x - 3y + xz = 0, \quad z > 0.$$

- (1) Одредити парцијане изводе првог реда функције  $f$ .
- (2) Одредити тотални диференцијал функције  $f$  у тачки  $A(1, 1)$ .
- (3) Написати једначину нормале површи  $z = f(x, y)$  у тачки  $(1, 1, z(A))$ .

*Колоквијум, 2004*

**2.15** Функције  $(x, y) \mapsto u$  и  $(x, y) \mapsto v$  дефинисане су системом

$$\ln(uv) = xy = -3, \quad xu + yv = 4$$

и условом  $u(1, 3) = 1$ . Израчунати  $du(1, 3)$  и  $dv(1, 3)$ .

**2.16** Функција  $f$  дефинисана је са  $f(x, y, z) = F\left(\frac{y-x}{xy}, \frac{z-x}{xz}\right)$ , где је  $F$  диференцијабилна функција. Упростити израз  $x^2f'_x + y^2f'_y + z^2f'_z$ .

*Колоквијум, 2003*

**2.17** Функција  $(x, y) \mapsto z$  дефинисана је са  $F(z/y, x^2 - yz) = 0$ , где је  $F$  диференцијабилна функција. Упростити израз  $\frac{1}{x}z'_x + \frac{1}{z}z'_y$ .

**2.18** Функција  $(x, y) \mapsto z$  дефинисана је са  $F(xz, y/z) = 0$ , где је  $F$  диференцијабилна функција. Упростити израз  $xz'_x - yz'_y$ .

**2.19** Дата је функција  $f(x, y) = \begin{cases} xy \frac{x^2 + 2y^2}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$ . Израчунати парцијалне изводе првог и мешовите парцијалне изводе другог реда функције  $f$  у тачки  $(0, 0)$ .

**2.20** Дата је функција  $f(x, y) = \begin{cases} xy \frac{x - y}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$ . Израчунати парцијалне изводе првог и мешовите парцијалне изводе другог реда функције  $f$  у тачки  $(0, 0)$ .

#### Колоквијум, 2002

**2.21** Функција  $(x, y) \mapsto z$  дефинисана је са  $F(x - az, y - bz) = 0$ , где су  $a$  и  $b$  реални бројеви, а  $F$  диференцијабилна функција. Упростити израз  $az'_x + bz'_y$ .

**2.22** Функција  $(x, y) \mapsto z$  дефинисана је са  $F(x + y + z, 2xz + y^2) = 0$ , где је  $F$  диференцијабилна функција. Упростити израз  $(y - x)z'_x + (x - z)z'_y$ .

**2.23** Дата је функција  $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 y}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$ . Израчунати  $f''_{xy}(0, 0)$  и  $f''_{yx}(0, 0)$ .

#### Колоквијум, 2001

**2.24** Дата је функција  $f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy^3}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$ . Израчунати  $f''_{xy}(0, 0)$  и  $f''_{yx}(0, 0)$ .

**2.25** Дата је функција  $f(x, y) = \begin{cases} \frac{y^3}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$ . Испитати да ли постоје  $f''_{xy}(0, 0)$  и  $f''_{yx}(0, 0)$ .

#### Колоквијум, 2000

Нека је  $f(x, y) = (x^2 + y^2)g(xy)$ , где је  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  два пута диференцијабилна функција. Доказати да је

$$x^2 f''_{x^2} + y^2 f''_{y^2} - 2xy f''_{xy} + x f'_x + y f'_y = 4f.$$

**2.26** Дата је функција  $f(x, y) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{y}{x} - y^2 \sin \frac{x}{y}, & xy \neq 0 \\ 0, & xy = 0 \end{cases}$ .

Доказати да је  $f''_{xy}(0, 0) \neq f''_{yx}(0, 0)$ .

#### Колоквијум, 1999

Колоквијум није одржан због бомбардовања Југославија од стране НАТО пакта.

#### Колоквијум, 1998

**2.27** Функција  $(x, y) \mapsto z$  дефинисана је са  $F(x^2/z, z/y^2) = 0$ , где је  $F$  диференцијабилна функција. Упростити израз  $xz'_x + yz'_y$ .

**2.28** Дата је функција  $f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy + 2x^3}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$ . Испитати да ли постоје  $f''_{xy}(0, 0)$  и  $f''_{yx}(0, 0)$ .

*Колоквијум, 1997*

**2.29** Функција  $(x, y) \mapsto z$  дефинисана је са  $z = yF(y + z/x) - xy$ , где је  $F$  диференцијабилна функција. Упростити израз  $xz'_x + yz'_y + xy$ .

**2.30** Дата је функција  $f(x, y) = \begin{cases} x^2 \frac{x-y}{x^2+y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$ . Испитати да ли постоје  $f''_{xy}(0, 0)$  и  $f''_{yx}(0, 0)$ .

*Колоквијум, 1996*

**2.31** Функција  $f : (x, y) \mapsto z$  је дефинисана имплицитно једнакошћу

$$F\left(\frac{x}{y}, \frac{y}{z}\right) = 0$$

где је  $F$  диференцијабилна на  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ . Доказати да је

$$xf'_x(x, y) + yf'_y(x, y) = f(x, y).$$

*Колоквијум, 1995*

**2.32** Нека је  $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2y - xy^2}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$ . Испитати да ли постоје парцијални изводи  $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0)$  и  $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0)$ .

**2.33** Функције  $f : (x, y) \mapsto u$  и  $g : (x, y) \mapsto v$  дефинисане су системом једначина:

$$\begin{aligned} u^2 + uv &= \ln(xy) \\ v^2 + uv &= x^2 + y^2. \end{aligned}$$

Израчунати  $\frac{\partial f}{\partial x}(1, 1)$  и  $\frac{\partial g}{\partial y}(1, 1)$  ако је  $g(1, 1) = \sqrt{2}$ .

### 3 Диференцијабилност

Испитати да ли је дата функција  $f$  диференцијабилна у  $(0, 0)$ .

*Колоквијум, 2010*

Није било задатака на ову тему.

*Колоквијум, 2009*

Није било задатака на ову тему.

*Колоквијум, 2008*

Није било задатака на ову тему.

*Колоквијум, 2007*

Није било задатака на ову тему.

*Колоквијум, 2006*

$$\mathbf{3.1} \quad f(x, y) = \begin{cases} -\frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

$$\mathbf{3.2} \quad f(x, y) = \begin{cases} \frac{y^3 - x^3}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

$$\mathbf{3.3} \quad f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 - y^3}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

$$\mathbf{3.4} \quad f(x, y) = \begin{cases} -\frac{x^4 + y^4}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

$$\mathbf{3.5} \quad f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy^3}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

$$\mathbf{3.6} \quad f(x, y) = \begin{cases} \frac{y^4 - x^4}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

$$\mathbf{3.7} \quad f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3y}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

*Колоквијум, 2005*

$$\mathbf{3.8} \quad f(x, y) = \begin{cases} \frac{2x^4 + xy^2 - x^4y + 2y^2}{x^4 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 2, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

$$\mathbf{3.9} \quad f(x, y) = \begin{cases} \frac{y^3 - x^2y}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

$$\mathbf{3.10} \quad f(x, y) = \begin{cases} 5 - \frac{2xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} \sin \frac{2xy}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 5, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

$$\mathbf{3.11} \quad f(x, y) = \begin{cases} \frac{3x^2 + x^2y - xy^4 + 3y^4}{x^2 + y^4}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 3, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

*Колоквијум, 2004*

$$\mathbf{3.12} \quad f(x, y) = \begin{cases} 1 - \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 1, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

$$\mathbf{3.13} \quad f(x, y) = \begin{cases} 2 - \frac{x^2y - xy^4}{x^2 + y^4}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 2, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

$$\mathbf{3.14} \quad f(x, y) = \begin{cases} 3 - \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} \cos \frac{xy}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 3, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

$$\mathbf{3.15} \quad f(x, y) = \begin{cases} xy \cdot \frac{2x^2 + 3y^2}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

*Колоквијум, 2003*

$$\mathbf{3.16} \quad f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^4 y - xy^2}{x^4 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

$$\mathbf{3.17} \quad f(x, y) = \begin{cases} \frac{2x^2 y^2}{|x^3| + |y^3|}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

*Колоквијум, 2002*

$$\mathbf{3.18} \quad f(x, y) = \begin{cases} \frac{(x - y^2)^3}{x^2 + y^4}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

$$\mathbf{3.19} \quad f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

У овом задатку треба испитати диференцијабилност функције  $f'_x$ .

*Колоквијум, 2001*

$$\mathbf{3.20} \quad f(x, y) = \sqrt[3]{x^2 y}.$$

$$\mathbf{3.21} \quad f(x, y) = \begin{cases} \sqrt[3]{xy} \cos \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

*Колоквијум, 2000*

$$\mathbf{3.22} \quad f(x, y) = |x| + |y| - |x + y|.$$

$$\mathbf{3.23} \quad f(x, y) = \begin{cases} \frac{y^3}{\sqrt{x^2 + y^2}} \sin \frac{1}{x^2 + y^2} + \frac{x^2 y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \cos \frac{1}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

*Колоквијум, 1999*

Колоквијум није одржан због бомбардовања Југославија од стране НАТО пакта.

*Колоквијум, 1998*

$$\mathbf{3.24} \quad f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y - xy^4}{x^2 + y^4}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Колоквијум, 1997

$$\mathbf{3.25} \quad f(x, y) = \begin{cases} x^2 \frac{x-y}{x^2+y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

$$\mathbf{3.26} \quad f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^{4/3}y^{5/3}}{x^2+y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Колоквијум, 1996

$$\mathbf{3.27} \quad f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} x, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Колоквијум, 1995

$$\mathbf{3.28} \quad f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} \sin \frac{xy}{x^2+y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

## 4 Градијент. Извод у правцу и смеру датог вектора

Колоквијум, 2010

Није било задатака на ову тему.

Колоквијум, 2009

**4.1** Дата је функција  $f : (x, y) \mapsto 3xy^3 - x^2y + 4x$ .

*a) Одредити градијент функције  $f$  у тачки  $M(2, -2)$ .*

*b) Израчунати извод функције  $f$  у тачки  $M$  у правцу вектора  $v = (4, -3)$ .*

**4.2** Дата је функција  $f : (x, y) \mapsto 2x^3y + xy^2 - 3y + 1$ .

*a) Одредити градијент функције  $f$  у тачки  $M(-2, 3)$ .*

*b) Израчунати извод функције  $f$  у тачки  $M$  у правцу вектора  $v = (-4, -3)$ .*

Колоквијум, 2008

**4.3** Нека је  $f(x, y) = x^3y^2 + 2x - y + 2$ .

(1) Одредити градијент функције  $f$  у тачки  $M_0(-1, 2)$ .

(2) Одредити извод функције  $f$  у тачки  $M_0$  у правцу вектора  $\vec{v} = (-3, 4)$ .

(3) Написати једначину тангентне равни и нормале површи дефинисане једначином  $z = f(x, y)$  у тачки  $M(-1, 2, f(M_0))$ .

**4.4** Нека је  $f(x, y) = 2x^3y^2 - y + 8$ .

(1) Одредити градијент функције  $f$  у тачки  $M_0(1, 3)$ .

(2) Одредити извод функције  $f$  у тачки  $M_0$  у правцу вектора  $\vec{v} = (3, -4)$ .

(3) Написати једначину тангентне равни и нормале површи дефинисане једначином  $z = f(x, y)$  у тачки  $M(1, 3, f(M_0))$ .

**4.5** Нека је  $f(x, y) = 3x^2y^3 + x - 2$ .

(1) Одредити градијент функције  $f$  у тачки  $M_0(-3, 1)$ .

(2) Одредити извод функције  $f$  у тачки  $M_0$  у правцу вектора  $\vec{v} = (-3, -4)$ .

(3) Написати једначину тангентне равни и нормале површи дефинисане једначином  $z = f(x, y)$  у тачки  $M(-3, 1, f(M_0))$ .

**4.6** Нека је  $f(x, y) = 2xy^3 + x^2y - 2x$ .

(1) Одредити градијент функције  $f$  у тачки  $M_0(3, -2)$ .

(2) Одредити извод функције  $f$  у тачки  $M_0$  у правцу вектора  $\vec{v} = (4, 3)$ .

(3) Написати једначину тангентне равни и нормале површи дефинисане једначином  $z = f(x, y)$  у тачки  $M(3, -2, f(M_0))$ .

**4.7** Нека је  $f(x, y) = 3x^3y - xy^2 + 2y$ .

(1) Одредити градијент функције  $f$  у тачки  $M_0(1, 4)$ .

(2) Одредити извод функције  $f$  у тачки  $M_0$  у правцу вектора  $\vec{v} = (-4, 3)$ .

(3) Написати једначину тангентне равни и нормале површи дефинисане једначином  $z = f(x, y)$  у тачки  $M(1, 4, f(M_0))$ .

**4.8** Нека је  $f(x, y) = 3xy^3 - x^2y + 4x$ .

(1) Одредити градијент функције  $f$  у тачки  $M_0(2, -2)$ .

(2) Одредити извод функције  $f$  у тачки  $M_0$  у правцу вектора  $\vec{v} = (4, -3)$ .

(3) Написати једначину тангентне равни и нормале површи дефинисане једначином  $z = f(x, y)$  у тачки  $M(2, -2, f(M_0))$ .

**4.9** Нека је  $f(x, y) = 2x^3y + xy^2 - 3y + 1$ .

(1) Одредити градијент функције  $f$  у тачки  $M_0(-2, 3)$ .

(2) Одредити извод функције  $f$  у тачки  $M_0$  у правцу вектора  $\vec{v} = (-4, -3)$ .

(3) Написати једначину тангентне равни и нормале површи дефинисане једначином  $z = f(x, y)$  у тачки  $M(-2, 3, f(M_0))$ .

*Колоквијум, 2007*

**4.10** Дата је функција  $f : (x, y, z) \mapsto xy^2 + x^2z + xyz - x + y + z$  и тачке  $A(0, 1, -1)$  и  $B(2, 3, 0)$ .

a) Одредити градијент функције  $f$  у тачки  $A$ .

b) Израчунати извод функције  $f$  у тачки  $A$  у правцу вектора  $AB$ .

c) Написати једначину тангентне равни и нормале у тачки  $A$  површи задате једначином  $f(x, y, z) = 0$ .

**4.11** Дата је функција  $f : (x, y, z) \mapsto x^2y + y^2z + xyz - x + y + z$  и тачке  $A(1, 0, 1)$  и  $B(3, -2, 0)$ .

a) Одредити градијент функције  $f$  у тачки  $A$ .

b) Израчунати извод функције  $f$  у тачки  $A$  у правцу вектора  $AB$ .

c) Написати једначину тангентне равни и нормале у тачки  $A$  површи задате једначином  $f(x, y, z) = 0$ .

**4.12** Дата је функција  $f : (x, y, z) \mapsto 2xyz + yz^2 + y^2z + x - y - z$  и тачке  $A(1, 0, 1)$  и  $B(3, 2, 2)$ .

- a) Одредити градијент функције  $f$  у тачки  $A$ .
- b) Израчунати извод функције  $f$  у тачки  $A$  у правцу вектора  $AB$ .
- c) Написати једначину тангентне равни и нормале у тачки  $A$  површи задате једначином  $f(x, y, z) = 0$ .

**4.13** Дата је функција  $f : (x, y, z) \mapsto 3xyz + xz^2 + y^2z + x - y - z$  и тачке  $A(1, 1, 0)$  и  $B(-1, 3, 1)$ .

- a) Одредити градијент функције  $f$  у тачки  $A$ .
- b) Израчунати извод функције  $f$  у тачки  $A$  у правцу вектора  $AB$ .
- c) Написати једначину тангентне равни и нормале у тачки  $A$  површи задате једначином  $f(x, y, z) = 0$ .

*Колоквијум, 2006*

**4.14** Функција  $f : (x, y) \mapsto z$  задата је имплицитно једнакошћу

$$xy^2 + x^2 - x + z^2 - 2z = 9, \quad z > 0.$$

- (1) Израчунати парцијалне изводе функције  $f$  у тачкама  $A(1, 3)$  и  $B(2, 2)$ .
- (2) Одредити градијент функције  $f$  у тачки  $A$ .
- (3) Израчунати извод у смеру вектора  $AB$  функције  $f$  у тачки  $A$ .
- (4) Написати једначине тангентне равни и нормале површи  $z = f(x, y)$  у тачки  $(1, 3, z(A))$ .

*Колоквијум, 2005*

Није било задатака на ову тему.

*Колоквијум, 2004*

Није било задатака на ову тему.

*Колоквијум, 2003*

Није било задатака на ову тему.

*Колоквијум, 2002*

Није било задатака на ову тему.

*Колоквијум, 2001*

Није било задатака на ову тему.

*Колоквијум, 2000*

**4.15** Испитати у ком смеру постоји извод функције  $f : (x, y) \mapsto |x| + |y| - |x + y|$  у тачки  $(0, 0)$ .

*Колоквијум, 1999*

Није било колоквијума.

*Колоквијум, 1998*

Испитати у ком смеру постоји извод дате функције у тачки  $(0, 0)$ .



$$4.16 \quad f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y - xy^4}{x^2 + y^4}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

$$4.17 \quad f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy + 2x^3}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

*Колоквијум, 1997*

Испитати у ком смеру постоји извод дате функције у тачки  $(0, 0)$ .

$$4.18 \quad f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^{4/3} y^{5/3}}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

*Колоквијум, 1996*

Није било задатака на ову тему.

*Колоквијум, 1995*

Није било задатака на ову тему.

## 5 Тејлоров полином

Одредити Тејлоров полином  $T_2$  у околини тачке

*Колоквијум, 2010*

**5.1**  $A(-1, 0)$  за функцију  $f : (x, y) \mapsto z$  дефинисану са

$$z^2 + 3x^2 + y^2 - 2xy - 6y + 2zx - 3 = 0, \quad z \neq 0$$

**5.2**  $C(0, 1)$  за функцију  $f : (x, y) \mapsto z$  дефинисану са

$$3x^2 - y^2 - z^2 + 2xy - 4x + 2zy + 1 = 0, \quad z \neq 0$$

**5.3**  $B(1, 0)$  за функцију  $f : (x, y) \mapsto z$  дефинисану са

$$2x^2 - z^2 - y^2 - 6x - zy + 2xy + 5 = 0, \quad z < 0$$

**5.4**  $D(0, -1)$  за функцију  $f : (x, y) \mapsto z$  дефинисану са

$$y^2 + 2x^2 + z^2 - 2xy + 4y - 2zx + 2 = 0, \quad z > 0$$

**5.5**  $B(1, 0)$  за функцију  $f : (x, y) \mapsto z$  дефинисану са

$$z^2 + 3x^2 + y^2 + 2xy + 6y - 2xz - 3 = 0, \quad z \neq 0$$

**5.6**  $C(-1, 0)$  за функцију  $f : (x, y) \mapsto z$  дефинисану са

$$x^2 - 2y^2 - z^2 + 4xy + 6x + 2yz + 6 = 0, \quad z > 0$$

**5.7**  $D(0, 1)$  за функцију  $f : (x, y) \mapsto z$  дефинисану са

$$2y^2 + x^2 + z^2 + 4xy + 2xz - 4y + 1 = 0, \quad z < 0$$

*Колоквијум, 2009*

**5.8**  $B(1,1)$  за функцију  $f : (x, y) \mapsto z$  дефинисану са

$$2x^3 + 3x^2 + z^2 + (-2)^2 + 2yz = 6, \quad z \neq 0$$

**5.9**  $C(1,1/2)$  за функцију  $f : (x, y) \mapsto z$  дефинисану са

$$xz + yz - \ln(2xy) = 3$$

**5.10**  $D(-1, -1)$  за функцију  $f : (x, y) \mapsto z$  дефинисану са

$$3xz + yz + \ln xy + 4 = 0.$$

*Колоквијум, 2008*

**5.11**  $M(1, -1)$  за функцију  $f : (x, y) \mapsto z$  дефинисану имплицитно са

$$z^3 + xyz + x^2 - 2y^2 + 1 = 0, \quad z > 0.$$

**5.12**  $M(0, 0)$  за функцију  $f : (x, y) \mapsto z$  дефинисану са

$$z^3 + z^2x - x^2 - y^2 - 2y - 1 = 0.$$

**5.13**  $M(0, -1)$  за функцију  $f : (x, y) \mapsto z$  дефинисану са

$$z^3 - z^2x + x^2 + y^2 + 4y + 4 = 0.$$

**5.14**  $M(1, 1)$  за функцију  $f : (x, y) \mapsto z$  дефинисану са

$$z^3 - xyz - x^2 + 3y^2 - 2 = 0, \quad z < 0.$$

*Колоквијум, 2007*

**5.15**  $M(0, 1)$  за функцију  $f : (x, y) \mapsto z$  дефинисану са

$$xyz - x^2y + xz^2 + x + y + z - 2 = 0$$

**5.16**  $N(1, 0)$  за функцију  $f : (x, y) \mapsto z$  дефинисану са

$$x + y + z + xyz - xy^2 + yz^2 = 0$$

**5.17**  $P(1, 1)$  за функцију  $f : (x, y) \mapsto z$  дефинисану са

$$x^2y + yz^2 - xz^2 + 2x - y + z - 1 = 0$$

**5.18**  $Q(1, 1)$  за функцију  $f : (x, y) \mapsto z$  дефинисану са

$$xy^2 + xz^2 - yz^2 - x + 2y + z - 3 = 0$$

*Колоквијум, 2006*

**5.19**  $A(0, 1)$  за функцију  $f : (x, y) \mapsto z$  дефинисану са

$$2x^2 - xy + 2xz - y + y^3 + z^2 = 1, \quad z > 0$$

**5.20**  $A(1,0)$  за функцију  $f : (x, y) \mapsto z$  дефинисану са

$$z^2 - x - x^3 + 2y^2 - xy + 2yz = 1, \quad z < 0$$

**5.21**  $A(1,0)$  за функцију

$$f(x, y) = e^{x-y}(2x^2 - 2xy + y^2)$$

**5.22**  $A(1,0)$  за функцију

$$f(x, y) = e^{y-x}(x^2 - xy + 3y^2)$$

*Колоквијум, 2005*

**5.23**  $A(0,1)$  за функцију  $f : (x, y) \mapsto z$  дефинисану са

$$4x^2 + 2y^2 + z^2 - 2yz - 2y = 3, \quad z > 0$$

**5.24**  $A(0,1)$  за функцију  $f : (x, y) \mapsto z$  дефинисану са

$$xy^2 + 2y^2 + z^2 - 2yz - 2y = 3, \quad z > 0$$

**5.25**  $A(1,0)$  за функцију  $f : (x, y) \mapsto z$  дефинисану са

$$yz^2 - xy^2 + x^2z^2 + 2y - x = 0, \quad z < 0$$

**5.26**  $A(1,1)$  за функцију  $f : (x, y) \mapsto z$  дефинисану са

$$x^2y + 3xy^2 - xz^2 + x - 3y + xz = 0, \quad z > 0$$

*Колоквијум, 2004*

**5.27**  $A(1,0)$  за функцију  $f : (x, y) \mapsto z$  дефинисану са

$$x^2y + xz^2 - 2yz + xz - 2 = 0, \quad z > 0$$

**5.28**  $A(1,0)$  за функцију  $f : (x, y) \mapsto z$  дефинисану са

$$2x^2 + 4y^2 + z^2 - 2xz - 2x = 3, \quad z > 0$$

*Колоквијум, 2003*

**5.29**  $A(1,1)$  за функцију  $f : (x, y) \mapsto z$  дефинисану са

$$(x + y)z^2 - xy - x - y + z = 0, \quad z > 0$$

**5.30**  $A(1,0)$  за функцију  $f : (x, y) \mapsto z$  дефинисану са

$$z^2 - y^2x - x^3 + xyz = 0, \quad z > 0$$

*Колоквијум, 2002*

**5.31**  $A(2,0)$  за функцију  $f : (x, y) \mapsto z$  дефинисану са

$$x^2y + y^2z + z^2 = x + y, \quad z > 0$$

**5.32**  $A(0,-1)$  за функцију  $f : (x, y) \mapsto z$  дефинисану са

$$f(x, y) = (x - 2y)e^{x^2+y^2}$$

*Колоквијум, 2001*

**5.33**  $A(-1,1)$  за функцију  $f : (x, y) \mapsto z$  дефинисану са

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2yz - 4z - 3 = 0, \quad z > 0$$

*Колоквијум, 2000*

**5.34**  $A(0,1)$  за функцију  $f : (x, y) \mapsto z$  дефинисану са

$$z^2 - x^2y - y^3 + xyz = 0, \quad z > 0$$

**5.35**  $A(1,1)$  за функцију  $f : (x, y) \mapsto z$  дефинисану са

$$z^2 + xyz - xy^2 - x^3 = 0, \quad z > 0$$

**5.36**  $A(1,1)$  за функцију  $f : (x, y) \mapsto z$  дефинисану са

$$z^2 + xyz - xy^2 - x^3 = 0, \quad z > 0$$

*Колоквијум, 1999*

Није било колоквијума.

*Колоквијум, 1998*

**5.37**  $A(0,1)$  за функцију  $f : (x, y) \mapsto z$  дефинисану са

$$xz^2 - x^2y + y^2z + 2x - y = 0.$$

*Колоквијум, 1997*

**5.38**  $A(-2,0)$  за функцију  $f : (x, y) \mapsto z$  дефинисану са

$$2x^2 + 2y^2 + z^2 + 8xz - z + 34, \quad z < 14.$$

*Колоквијум, 1996*

**5.39**  $M(1,-1)$  за функцију  $f : (x, y) \mapsto z$  дефинисану са

$$5x^2 + 5y^2 + 5z^2 - 2xy - 2xz - 2yz - 32 = 0, \quad z > 0.$$

*Колоквијум, 1995*

Није било задатака на ову тему.

## 6 Локални екстремуми

*Колоквијум, 2010*

**6.1**  $f(x, y, z) = 2x^2 - xy + 2xz - y + y^3 + z^2.$

**6.2**  $f(x, y, z) = x^3 - xy - x + 2y^2 + 2yz + z^2.$

**6.3**  $f(x, y) = \frac{1}{x} + \frac{1}{y^2} + \ln(xy).$

**6.4**  $f(x, y) = \frac{1}{x} + \frac{1}{y^2} + \ln \frac{y}{x}.$

*Колоквијум, 2009*

**6.5** *Одредити локалне екстремуме функције  $f : (x, y) \mapsto z$  дефинисане једнакошћу*

$$3xz + yz - \ln(3xy) = 2.$$

**6.6** *Одредити локалне екстремуме функције  $f : (x, y) \mapsto z$  дефинисане једнакошћу*

$$xz + yz + \ln(xy) + 2 = 0.$$

**6.7** *Одредити локалне екстремуме функције  $f : (x, y) \mapsto z$  дефинисане једнакошћу*

$$y^3 - 3y^2 + z^2 + (x + 1)^2 - 2xz = 2.$$

**6.8** *Одредити локалне екстремуме функције  $f : (x, y) \mapsto z$  дефинисане једнакошћу*

$$x^3 + 3x^2 + z^2 + (y + 2)^2 + 2yz = 16.$$

*Колоквијум, 2008*

**6.9** *Одредити локалне екстремуме функције  $f : (x, y) \mapsto z$  дефинисане имплицитно са*

$$z^3 + xyz + x^2 + 2y^2 + 8 = 0.$$

**6.10**  $f : (x, y) \mapsto z, \quad z^3 - z^2x + x^2 + y^2 + 4y + 4 = 0, \quad z \neq 0$

**6.11**  $f : (x, y) \mapsto z, \quad z^3 + z^2x - x^2 - y^2 - 2y - 1 = 0, \quad z \neq 0$

**6.12**  $f : (x, y) \mapsto z, \quad z^3 - xyz - x^2 - 3y^2 - 1 = 0$

*Колоквијум, 2007*

**6.13**  $f : (x, y) \mapsto z, \quad 2x + 6y - 3x^2 - 2xy + y^2 - 2z^2 + 13 = 0, \quad z < 0$

**6.14**  $f : (x, y) \mapsto z, \quad x^2 - 2xy - 3y^2 + 5z^2 + 6x + 2y = 0, \quad z > 0$

**6.15**  $f : (x, y) \mapsto z, \quad 3x^2 + xy + y^2 - 5z^2 + 7x + 3y + 10 = 0, \quad z < 0$

**6.16**  $f : (x, y) \mapsto z, \quad x^2 + xy + 3y^2 + 2z^2 + 3x + 7y - 3 = 0, \quad z > 0$

*Колоквијум, 2006*

**6.17**  $f : (x, y) \mapsto z, \quad x^2 + xy + y^2 + z^2 - 3y = 1, \quad z > 0$

**6.18**  $f(x, y, z) = e^{x+z} \left( \frac{x^2}{2} + 4y + y^2 + z \right)$

**6.19**  $f(x, y, z) = e^{x+y} \left( x + \frac{y^2}{2} + 2z + z^2 \right)$

**6.20**  $f : (x, y) \mapsto z, \quad x^2 + xy + y^2 + z^2 + 3x = 1, \quad z > 0$

*Колоквијум, 2005*

**6.21**  $f(x, y) = 2x - 2y + \ln(2x - x^2 - y^2)$

**6.22**  $f(x, y) = e^{3x+2y}(3x^2 - 6xy + 8y^2)$

*Колоквијум, 2004*

**6.23**  $f(x, y) = e^{2x+3y}(8x^2 - 6xy + 3y^2)$

**6.24**  $f(x, y) = (x^2 - y^2)e^{-x^2/2-y^2/2}$

*Колоквијум, 2003*

**6.25**  $f(x, y) = e^{2x}(x^2 + y^2 + 2y - 1)$

**6.26**  $f(x, y) = e^{2x}(x^2 + y^2 + 2x - 1)$

*Колоквијум, 2002*

**6.27**  $f(x, y) = xy e^{y-x^2/2}$

**6.28**  $f(x, y) = (x^2 - y^2 + 2xy)e^{y-x}$

**6.29**  $f(x, y) = y \ln(4x^2 + y^2)$

**6.30**  $(x, y) \mapsto z, (x-1)^2 + y^3 + 6y^2 + 2z^2 + 2xz = 12, y \geq 0$

*Колоквијум, 2001*

**6.31**  $f(x, y, z) = \frac{1}{x} + \frac{x^2}{y} + \frac{y^2}{z} + \frac{z^2}{2^{11}}$

**6.32**  $f(x, y, z) = \ln(x^3 y^4 z^5 (22 - x - y^2 - z))$

**6.33**  $f(x, y) = xy \sqrt{1 - x^2 - y^2}, x^2 + y^2 < 1$

*Колоквијум, 2000*

**6.34**  $f(x, y) = xy e^{-x^2-y^2}$

**6.35**  $(x, y) \mapsto z, x^3 + (y-1)^2 + z^2 + 3xz + 2yz - 6x = 0$

**6.36**  $f(x, y, z) = e^{-z/2} (2xz + x^2 + y^2 - 3z - 6)$

*Колоквијум, 1999*

Није било колоквијума.

*Колоквијум, 1998*

**6.37**  $f(x, y) = e^{x+y} (x^2 + xy - y^2)$

*Колоквијум, 1997*

**6.38**  $f(x, y, z) = 2x^2 - 4y + \frac{z^2}{x} + \frac{2y^2}{z}$

*Колоквијум, 1996*

**6.39**  $f(x, y) = x \ln(x^2 + y^2)$

*Колоквијум, 1995*

**6.40**  $f(x, y, z) = \frac{2}{x} + \frac{x^2}{y} + z + \frac{y^2}{4z}$

**6.41**  $(x, y) \mapsto z, (x-1)^2 + y^3 + 6y^2 + 2z^2 + 2xz - 8 = 0$

**6.42**  $f(x, y, z) = 2x^2 + \frac{y^2}{x} - 4z + \frac{2z^2}{y}$

## 7 Условни екстремуми

*Колоквијум, 2009*

**7.1**  $f(x, y) = 2x + y, x^2 + y^2 = 5$

**7.2**  $f(x, y) = x + 2y, x^2 + y^2 = 20$

**7.3**  $f(x, y) = 2x^2 + 2y^2, 5(x+y)^2 = 4(xy+2)$

**7.4**  $f(x, y) = x^2 + y^2, 5x^2 + 6xy + 5y^2 = 8$

*Колоквијум, 2009*

**7.5** *Одредити локалне екстремуме функције  $f : (x, y) \mapsto 4xy - 5$  при услову  $x^2 + y^2 = 18$ .*

**7.6** *Одредити локалне екстремуме функције  $f : (x, y) \mapsto 9x^2 + y^2$  при услову  $xy = 3$ .*

**7.7** *Одредити локалне екстремуме функције  $f : (x, y) \mapsto x^2 + 4y^2$  при услову  $xy = -2$ .*

*Колоквијум, 2008*

**7.8** *Одредити локалне екстремуме функције  $f : R^+ \times R^+ \rightarrow R$  дате са  $f(x, y) = 2x^2 + 12xy - 3y^2$  при услову  $x^2 + y^2 = 13$ .*

**7.9** *Одредити локалне екстремуме функције  $f : R^+ \times R^+ \rightarrow R$  дате са  $f(x, y) = 3x^2 - 12xy - 2y^2$  при услову  $x^2 + y^2 = 13$ .*

**7.10** *Одредити локалне екстремуме функције  $f : R^+ \times R^+ \rightarrow R$  дате са  $f(x, y) = x^2 + y^2$  при услову  $xy = x + y$ .*

**7.11** *Одредити локалне екстремуме функције  $f : R^+ \times R^+ \rightarrow R$  дате са  $f(x, y) = x^2 + y^2$  при услову  $xy + x + y = 0$ .*

*Колоквијум, 2007*

**7.12**  $f(x, y) = x^2 + y^2 - 2xy, 3x^2 + y^2 = 12, x, y < 0$

**7.13**  $f(x, y) = x^2 + y^2 + 2xy, x^2 + 3y^2 = 12, x, y > 0$

**7.14**  $f(x, y) = x^2 + y^2 + 2xy, 2x^2 + y^2 = 6, x, y > 0$

**7.15**  $f(x, y) = x^2 + y^2 - 2xy, x^2 + 2y^2 = 6, x, y < 0$

*Колоквијум, 2006*

**7.16**  $f(x, y, z) = x + 2y - z, x^2 + y^2 + z^2 = 6$

**7.17**  $f(x, y) = xy, \frac{1}{x} - \frac{1}{y} = 2$

*Колоквијум, 2005*

**7.18**  $f(x, y, z) = x^4 y^3 z^2, 4x + 3y + 2z = 15, x > 0, y > 0, z > 0$

**7.19**  $f(x, y, z) = x^2 y^3 z^4, 2x + 3y + 4z = 6, x > 0, y > 0, z > 0$

*Колоквијум, 2004*

**7.20**  $f(x, y, z) = 2x + 2y + 3z, xy + yz + zx = \frac{15}{4}$

**7.21**  $f(x, y, z) = xz + yz, x^2 + y^2 + z^2 = 1$

*Колоквијум, 2003*

**7.22**  $f(x, y) = 3x + 4y - 2, x^2 + y^2 = 1$

**7.23**  $f(x, y) = 2x - 3y + 4, x^2 + y^2 = 1$

*Колоквијум, 2002*

Није било задатака на ову тему

*Колоквијум, 2001*

**7.24**  $f(x, y) = 4x^2 - 2\sqrt{3}xy + 6y^2, x^2 + y^2 = 1$

*Колоквијум, 2000*

**7.25**  $f(x, y) = x^2 - 3xy + y^2, xy + 1 = 0$

*Колоквијум, 1999*

Није било колоквијума.

*Колоквијум, 1998*

**7.26**  $f(x, y, z) = x^2 + y^2 - \frac{2}{3}z, x + y + z = 1, x^2 + y^2 + z^2 = 1$

*Колоквијум, 1997*

**7.27**  $f(x, y, z) = xz + yz, y + z = 2, x^2 + y^2 = 2$

*Колоквијум, 1996*

**7.28**  $f(x, y, z) = x + y + z, x^2 + yz = 5$

*Колоквијум, 1995*

**7.29**  $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2, \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{4} = 1$

**7.30**  $f(x, y, z) = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}, \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2} = \frac{3}{4}$



## 8 Екстремне вредности на области

*Колоквијум, 2010*

Није било задатака на ову тему.

*Колоквијум, 2009*

**8.1** Дати су функција  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  и скуп  $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2$  са

$$f(x, y) = (x - y)^2 + (y + 1)^2 - 3, \quad \mathcal{D} = \{(x, y) : y \geq x - 3, y \geq -x - 3, y \leq 0\}.$$

Одредити најмању и највећу вредност функције  $f$  на скупу  $\mathcal{D}$ .

**8.2** Одредити најмању и највећу вредност функције  $f : (x, y) \mapsto (x - y)^2 + (x + 1)^2 + 2$  на троугаоној области  $\mathcal{D}$  између правих  $x = 0$ ,  $y = x + 3$  и  $y = -x - 3$ .

**8.3** Одредити најмању и највећу вредност функције  $f : (x, y) \mapsto (x + y)^2 + (y - 1)^2 + 1$  на троугаоној области  $\mathcal{D}$  између правих  $y = 0$ ,  $y = x + 5$  и  $y = 5 - x$ .

**8.4** Одредити најмању и највећу вредност функције  $f : (x, y) \mapsto (x + y)^2 + (x - 2)^2 - 1$  на троугаоној области  $\mathcal{D}$  између правих  $x = 0$ ,  $y = 5 - x$  и  $y = x - 5$ .

*Колоквијум, 2008*

**8.5** Дати су функција  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  и скуп  $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2$  са

$$f(x, y) = 2(x + 2)^2 + 3(y - 1)^2 + 1, \quad \mathcal{D} = \{(x, y) : 0 \leq y \leq x + 4, x \leq 0\}.$$

Одредити најмању и највећу вредност функције  $f$  на скупу  $\mathcal{D}$ .

**8.6** Дати су функција  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  и скуп  $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2$  са

$$f(x, y) = 2x^2 + (y - 2)^2 + 3, \quad \mathcal{D} = \{(x, y) : x^2 \leq y \leq 4\}.$$

Одредити најмању и највећу вредност функције  $f$  на скупу  $\mathcal{D}$ .

**8.7** Дати су функција  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  и скуп  $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2$  са

$$f(x, y) = 2x^2 + (y + 1)^2 - 5, \quad \mathcal{D} = \{(x, y) : x^2 - 3 \leq y \leq 1\}.$$

Одредити најмању и највећу вредност функције  $f$  на скупу  $\mathcal{D}$ .

**8.8** Дати су функција  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  и скуп  $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2$  са

$$f(x, y) = 5(x - 2)^2 + (y + 1)^2 - 3, \quad \mathcal{D} = \{(x, y) : x - 4 \leq y \leq 0, x \geq 0\}.$$

Одредити најмању и највећу вредност функције  $f$  на скупу  $\mathcal{D}$ .

*Колоквијум, 2007*

Није било задатака на ову тему.

*Колоквијум, 2006*

**8.9**  $f(x, y) = x^2 - 2xy - 2y$ ,  $\mathcal{D} = \{(x, y) : -2 \leq y \leq -x^2/2\}$ .

*Колоквијум, 2005*

Није било задатака на ову тему.

*Колоквијум, 2004*

Није било задатака на ову тему.

*Колоквијум, 2003*

Није било задатака на ову тему.

*Колоквијум, 2002*

Није било задатака на ову тему.

*Колоквијум, 2001*

**8.10**  $f(x, y) = 2x^2 - 12xy + 5y^2 - 2x + 6y$ ,  $\mathcal{D} = \{(x, y) : |y| \leq x \leq 1\}$ .

*Колоквијум, 2000*

**8.11**  $f(x, y) = x^4 + y^2 + 2x^2y$ ,  $\mathcal{D} = \{(x, y) : -1 \leq x \leq 1, x^2 - 1 \leq y \leq 2(1 - x)\}$ .

*Колоквијум, 1999*

Није било колоквијума.

*Колоквијум, 1998*

Није било задатака на ову тему.

*Колоквијум, 1997*

Није било задатака на ову тему.

*Колоквијум, 1996*

**8.12**  $f(x, y) = 2x^3 + 4x^2 + y^2 - 2xy$ ,  $\mathcal{D} = \{(x, y) : -1 \leq y \leq -x^2\}$ .

*Колоквијум, 1995*

**8.13**  $f(x, y) = x^2 + y^2$ ,  $\mathcal{D} = \left\{ (x, y) : \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} \leq 1 \right\}$ .