

# ФУНКЦИЈЕ ВИШЕ ПРОМЕНЉИВИХ

## Задаци са колоквијума

Драган Ђорић

### Садржај

1	Непрекидност	2
2	Парцијални изводи и диференцијал	4
3	Диференцијабилност	5
4	Градијент. Извод у правцу и смеру датог вектора	6
5	Тејлоров полином	6
6	Локални екстремуми	8
7	Условни екстремуми	10
8	Екстремне вредности на области	11

# 1 Непрекидност

Испитати непрекидност дате функције у тачки  $(0, 0)$ .

*Колоквијум, 2008*

$$\mathbf{1.1} \quad f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^5 + y^5}{x^4 + y^4}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

$$\mathbf{1.2} \quad f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 + y^5}{x^4 + y^4}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

$$\mathbf{1.3} \quad f(x, y) = \begin{cases} \frac{x + y^3}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

$$\mathbf{1.4} \quad f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

*Колоквијум, 2007*

$$\mathbf{1.5} \quad f(x, y) = \begin{cases} (x - y) \sin \frac{1}{x^2 + y^2} \cos \frac{1}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

$$\mathbf{1.6} \quad f(x, y) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x^2 + y^2} + y \cos \frac{1}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

*Колоквијум, 2006*

$$\mathbf{1.7} \quad f(x, y) = \begin{cases} -\frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

$$\mathbf{1.8} \quad f(x, y) = \begin{cases} \frac{y^3 - x^3}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

$$\mathbf{1.9} \quad f(x, y) = \begin{cases} -\frac{x^4 + y^4}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

$$\mathbf{1.10} \quad f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy^3}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

*Колоквијум, 2005*

$$\mathbf{1.11} \quad f(x, y) = \begin{cases} \frac{2x^4 + xy^2 - x^4y + 2y^2}{x^4 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 2, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

$$\mathbf{1.12} \quad f(x, y) = \begin{cases} \frac{y^3 - x^2y}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

$$\mathbf{1.13} \quad f(x, y) = \begin{cases} 5 - \frac{2xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} \sin \frac{2xy}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 5, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

$$\mathbf{1.14} \quad f(x, y) = \begin{cases} \frac{3x^2 + x^2y - xy^4 + 3y^4}{x^2 + y^4}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 3, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

*Колоквијум, 2004*

$$\mathbf{1.15} \quad f(x, y) = \begin{cases} 1 - \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 1, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

$$\mathbf{1.16} \quad f(x, y) = \begin{cases} 2 - \frac{x^2y - xy^4}{x^2 + y^4}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 2, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

$$\mathbf{1.17} \quad f(x, y) = \begin{cases} 3 - \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} \cos \frac{xy}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 3, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

$$\mathbf{1.18} \quad f(x, y) = \begin{cases} xy \cdot \frac{2x^2 + 3y^2}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

*Колоквијум, 2003*

$$\mathbf{1.19} \quad f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^4y - xy^2}{x^4 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

*Колоквијум, 2002*

*Колоквијум, 2001*

*Колоквијум, 2000*

*Колоквијум, 1999*

*Колоквијум, 1998*

*Колоквијум, 1997*

*Колоквијум, 1996*

*Колоквијум, 1995*

*Колоквијум, 1994*

*Колоквијум, 1993*

*Колоквијум, 1992*

## 2 Парцијални изводи и диференцијал

Колоквијум, 2009

Колоквијум, 2008

Колоквијум, 2007

Испитати да ли за дату функцију постоје парцијални изводи у тачки  $(0, 0)$

$$\mathbf{2.1} \quad f : (x, y) \mapsto \begin{cases} \frac{1 - \cos(x - y)}{x - y}, & x \neq y \\ 0, & x = y \end{cases}$$

$$\mathbf{2.2} \quad f : (x, y) \mapsto \begin{cases} \frac{1 - \cos(x^2 - y)}{x^2 - y}, & x^2 \neq y \\ 0, & x^2 = y \end{cases}$$

$$\mathbf{2.3} \quad f : (x, y) \mapsto \begin{cases} \frac{\cos(x + y) - 1}{x + y}, & y \neq -x \\ 0, & y = -x \end{cases}$$

$$\mathbf{2.4} \quad f : (x, y) \mapsto \begin{cases} \frac{\cos(x + y^2) - 1}{x + y^2}, & x \neq -y^2 \\ 0, & x = -y^2 \end{cases}$$

Колоквијум, 2006

**2.5** Функције  $(x, y) \mapsto u$  и  $(x, y) \mapsto v$  дефинисане су системом

$$u^2 + v^2 = xy, \quad uv + xy = 3$$

и условом  $u(1, 5) = 1$ . Израчунати  $du(1, 5)$  и  $dv(1, 5)$ .

**2.6** Функције  $(x, y) \mapsto u$  и  $(x, y) \mapsto v$  дефинисане су системом

$$u^2 + x^2 + y^2 = 5, \quad v^2 + uv = 2$$

и условом  $v(2, 0) = 1$ . Израчунати  $du(2, 0)$  и  $dv(2, 0)$ .

Колоквијум, 2005

Колоквијум, 2004

**2.7** Функције  $(x, y) \mapsto u$  и  $(x, y) \mapsto v$  дефинисане су системом

$$\ln(uv) = xy = -3, \quad xu + yv = 4$$

и условом  $u(1, 3) = 1$ . Израчунати  $du(1, 3)$  и  $dv(1, 3)$ .

**2.8** Функција  $f$  дефинисана је са  $f(x, y, z) = F\left(\frac{y-x}{xy}, \frac{z-x}{xz}\right)$ , где је  $F$  диференцијабилна функција. Упростити израз  $x^2 f'_x + y^2 f'_y + z^2 f'_z$ .

Колоквијум, 2003

**2.9** Функција  $(x, y) \mapsto z$  дефинисана је са  $F(x + y + z, 2xz + y^2) = 0$ , где је  $F$  диференцијабилна функција. Упростити израз  $(y - x)z'_x + (x - z)z'_y$ .

### 3 Диференцијабилност

Испитати да ли је дата функција  $f$  диференцијабилна у  $(0, 0)$ .

*Колоквијум, 2009*

*Колоквијум, 2008*

*Колоквијум, 2007*

*Колоквијум, 2006*

*Колоквијум, 2005*

*Колоквијум, 2004*

$$\mathbf{3.1} \quad f(x, y) = \begin{cases} 1 - \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 1, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

$$\mathbf{3.2} \quad f(x, y) = \begin{cases} 2 - \frac{x^2y - xy^4}{x^2 + y^4}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 2, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

$$\mathbf{3.3} \quad f(x, y) = \begin{cases} 3 - \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} \cos \frac{xy}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 3, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

$$\mathbf{3.4} \quad f(x, y) = \begin{cases} xy \cdot \frac{2x^2 + 3y^2}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

*Колоквијум, 2003*

$$\mathbf{3.5} \quad f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^4y - xy^2}{x^4 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

*Колоквијум, 2002*

*Колоквијум, 2001*

*Колоквијум, 2000*

*Колоквијум, 1999*

*Колоквијум, 1998*

*Колоквијум, 1997*

*Колоквијум, 1996*

*Колоквијум, 1995*

*Колоквијум, 1994*

## 4 Градијент. Извод у правцу и смеру датог вектора

*Колоквијум, 2009*

**4.1** Дата је функција  $f : (x, y) \mapsto 3xy^3 - x^2y + 4x$ .

- a) Одредити градијент функције  $f$  у тачки  $M(2, -2)$ .
- b) Израчунати извод функције  $f$  у тачки  $M$  у правцу вектора  $v = (4, -3)$ .

**4.2** Дата је функција  $f : (x, y) \mapsto 2x^3y + xy^2 - 3y + 1$ .

- a) Одредити градијент функције  $f$  у тачки  $M(-2, 3)$ .
- b) Израчунати извод функције  $f$  у тачки  $M$  у правцу вектора  $v = (-4, -3)$ .

*Колоквијум, 2008*

*Колоквијум, 2007*

**4.3** Дата је функција  $f : (x, y, z) \mapsto xy^2 + x^2z + xyz - x + y + z$  и тачке  $A(0, 1, -1)$  и  $B(2, 3, 0)$ .

- a) Одредити градијент функције  $f$  у тачки  $A$ .
- b) Израчунати извод функције  $f$  у тачки  $A$  у правцу вектора  $AB$ .
- c) Написати једначину тангентне равни и нормале у тачки  $A$  површи задате једначином  $f(x, y, z) = 0$ .

**4.4** Дата је функција  $f : (x, y, z) \mapsto x^2y + y^2z + xyz - x + y + z$  и тачке  $A(1, 0, 1)$  и  $B(3, -2, 0)$ .

- a) Одредити градијент функције  $f$  у тачки  $A$ .
- b) Израчунати извод функције  $f$  у тачки  $A$  у правцу вектора  $AB$ .
- c) Написати једначину тангентне равни и нормале у тачки  $A$  површи задате једначином  $f(x, y, z) = 0$ .

*Колоквијум, 2006*

*Колоквијум, 2005*

## 5 Тејлоров полином

Одредити Тејлоров полином  $T_2$  у околини тачке

*Колоквијум, 2009*

**5.1**  $B(1, 1)$  за функцију  $f : (x, y) \mapsto z$  дефинисану са

$$2x^3 + 3x^2 + z^2 + (-2)^2 + 2yz = 6, \quad z \neq 0$$

**5.2**  $C(1, 1/2)$  за функцију  $f : (x, y) \mapsto z$  дефинисану са

$$xz + yz - \ln(2xy) = 3$$

**5.3** *Одредити Тејлоров полином другог степена који у околини тачке  $D(-1, -1)$  апроксимира функцију  $f : (x, y) \mapsto z$  дефинисану са*

$$3xz + yz + \ln xy + 4 = 0.$$

*Колоквијум, 2008*

**5.4** *Одредити Тејлоров полином другог степена који у околини тачке  $M(1, -1)$  апроксимира функцију  $f : (x, y) \mapsto z$  дефинисану имплицитно са*

$$z^3 + xyz + x^2 - 2y^2 + 1 = 0, \quad z > 0.$$

*Колоквијум, 2007*

**5.5**  $M(0, 1)$  за функцију  $f : (x, y) \mapsto z$  дефинисану са

$$xyz - x^2y + xz^2 + x + y + z - 2 = 0$$

**5.6**  $N(1, 0)$  за функцију  $f : (x, y) \mapsto z$  дефинисану са

$$x + y + z + xyz - xy^2 + yz^2 = 0$$

**5.7**  $P(1, 1)$  за функцију  $f : (x, y) \mapsto z$  дефинисану са

$$x^2y + yz^2 - xz^2 + 2x - y + z - 1 = 0$$

**5.8**  $Q(1, 1)$  за функцију  $f : (x, y) \mapsto z$  дефинисану са

$$xy^2 + xz^2 - yz^2 - x + 2y + z - 3 = 0$$

*Колоквијум, 2006*

**5.9**  $A(0, 1)$  за функцију  $f : (x, y) \mapsto z$  дефинисану са

$$2x^2 - xy + 2xz - y + y^3 + z^2 = 1, \quad z > 0$$

**5.10**  $A(1, 0)$  за функцију  $f : (x, y) \mapsto z$  дефинисану са

$$z^2 - x - x^3 + 2y^2 - xy + 2yz = 1, \quad z < 0$$

**5.11**  $A(1, 0)$  за функцију

$$f(x, y) = e^{x-y}(2x^2 - 2xy + y^2)$$

**5.12**  $A(1, 0)$  за функцију

$$f(x, y) = e^{y-x}(x^2 - xy + 3y^2)$$

*Колоквијум, 2005*

**5.13**  $A(0, 1)$  за функцију  $f : (x, y) \mapsto z$  дефинисану са

$$4x^2 + 2y^2 + z^2 - 2yz - 2y = 3, \quad z > 0$$

**5.14**  $A(0, 1)$  за функцију  $f : (x, y) \mapsto z$  дефинисану са

$$xy^2 + 2y^2 + z^2 - 2yz - 2y = 3, \quad z > 0$$

**5.15**  $A(1,0)$  за функцију  $f : (x, y) \mapsto z$  дефинисану са

$$yz^2 - xy^2 + x^2z^2 + 2y - x = 0, \quad z < 0$$

**5.16**  $A(1,1)$  за функцију  $f : (x, y) \mapsto z$  дефинисану са

$$x^2y + 3xy^2 - xz^2 + x - 3y + xz = 0, \quad z > 0$$

*Колоквијум, 2004*

**5.17**  $A(1,0)$  за функцију  $f : (x, y) \mapsto z$  дефинисану са

$$x^2y + xz^2 - 2yz + xz - 2 = 0, \quad z > 0$$

**5.18**  $A(1,0)$  за функцију  $f : (x, y) \mapsto z$  дефинисану са

$$2x^2 + 4y^2 + z^2 - 2xz - 2x = 3, \quad z > 0$$

*Колоквијум, 2003*

**5.19**  $A(1,1)$  за функцију  $f : (x, y) \mapsto z$  дефинисану са

$$(x + y)z^2 - xy - x - y + z = 0, \quad z > 0$$

*Колоквијум, 2002*

*Колоквијум, 2001*

*Колоквијум, 2000*

*Колоквијум, 1999*

*Колоквијум, 1998*

*Колоквијум, 1997*

*Колоквијум, 1996*

*Колоквијум, 1995*

*Колоквијум, 1994*

*Колоквијум, 1993*

*Колоквијум, 1992*

## 6 Локални екстремуми

*Колоквијум, 2009*

**6.1** *Одредити локалне екстремуме функције  $f : (x, y) \mapsto z$  дефинисане једнакошћу*

$$3xz + yz - \ln(3xy) = 2.$$

**6.2** *Одредити локалне екстремуме функције  $f : (x, y) \mapsto z$  дефинисане једнакошћу*

$$xz + yz + \ln(xy) + 2 = 0.$$



**6.3** *Одредити локалне екстремуме функције  $f : (x, y) \mapsto z$  дефинисане једнакошћу*

$$y^3 - 3y^2 + z^2 + (x + 1)^2 - 2xz = 2.$$

**6.4** *Одредити локалне екстремуме функције  $f : (x, y) \mapsto z$  дефинисане једнакошћу*

$$x^3 + 3x^2 + z^2 + (y + 2)^2 + 2yz = 16.$$

*Колоквијум, 2008*

**6.5** *Одредити локалне екстремуме функције  $f : (x, y) \mapsto z$  дефинисане имплицитно са*

$$z^3 + xyz + x^2 + 2y^2 + 8 = 0.$$

*Колоквијум, 2007*

**6.6**  $f : (x, y) \mapsto, 2x + 6y - 3x^2 - 2xy + y^2 - 2z^2 + 13 = 0, z < 0$

**6.7**  $f : (x, y) \mapsto z, x^2 - 2xy - 3y^2 + 5z^2 + 6x + 2y = 0, z > 0$

**6.8**  $f : (x, y) \mapsto z, 3x^2 + xy + y^2 - 5z^2 + 7x + 3y + 10 = 0, z < 0$

**6.9**  $f : (x, y) \mapsto z, x^2 + xy + 3y^2 + 2z^2 + 3x + 7y - 3 = 0, z > 0$

*Колоквијум, 2006*

**6.10**  $f : (x, y) \mapsto z, x^2 + xy + y^2 + z^2 - 3y = 1, z > 0$

**6.11**  $f(x, y, z) = e^{x+z} \left( \frac{x^2}{2} + 4y + y^2 + z \right)$

**6.12**  $f(x, y, z) = e^{x+y} \left( x + \frac{y^2}{2} + 2z + z^2 \right)$

*Колоквијум, 2005*

**6.13**  $f(x, y) = 2x - 2y + \ln(2x - x^2 - y^2)$

**6.14**  $f(x, y) = e^{3x+2y}(3x^2 - 6xy + 8y^2)$

*Колоквијум, 2004*

**6.15**  $f(x, y) = e^{2x+3y}(8x^2 - 6xy + 3y^2)$

**6.16**  $f(x, y) = (x^2 - y^2)e^{-x^2/2 - y^2/2}$

*Колоквијум, 2003*

**6.17**  $f(x, y) = xye^{y-x^2/2}$

*Колоквијум, 2002*

*Колоквијум, 2001*

*Колоквијум, 2000*

*Колоквијум, 1999*

*Колоквијум, 1998*

*Колоквијум, 1997*

*Колоквијум, 1996*

*Колоквијум, 1995*

*Колоквијум, 1994*

*Колоквијум, 1993*

*Колоквијум, 1992*

## 7 Условни екстремуми

*Колоквијум, 2009*

**7.1** *Одредити локалне екстремуме функције  $f : (x, y) \mapsto 4xy - 5$  при услову  $x^2 + y^2 = 18$ .*

**7.2** *Одредити локалне екстремуме функције  $f : (x, y) \mapsto 9x^2 + y^2$  при услову  $xy = 3$ .*

**7.3** *Одредити локалне екстремуме функције  $f : (x, y) \mapsto x^2 + 4y^2$  при услову  $xy = -2$ .*

*Колоквијум, 2008*

**7.4** *Одредити локалне екстремуме функције  $f : R^+ \times R^+ \rightarrow R$  дате са  $f(x, y) = x^2 + y^2$  при услову  $xy = x + y$ .*

*Колоквијум, 2007*

**7.5**  $f(x, y) = x^2 + y^2 - 2xy, 3x^2 + y^2 = 12, x, y < 0$

**7.6**  $f(x, y) = x^2 + y^2 + 2xy, x^2 + 3y^2 = 12, x, y > 0$

**7.7**  $f(x, y) = x^2 + y^2 + 2xy, 2x^2 + y^2 = 6, x, y > 0$

**7.8**  $f(x, y) = x^2 + y^2 - 2xy, x^2 + 2y^2 = 6, x, y < 0$

*Колоквијум, 2006*

**7.9**  $f(x, y, z) = x + 2y - z, x^2 + y^2 + z^2 = 6$

**7.10**  $f(x, y) = xy, \frac{1}{x} - \frac{1}{y} = 2$

*Колоквијум, 2005*

**7.11**  $f(x, y, z) = x^4 y^3 z^2, 4x + 3y + 2z = 15, x > 0, y > 0, z > 0$

**7.12**  $f(x, y, z) = x^2 y^3 z^4, 2x + 3y + 4z = 6, x > 0, y > 0, z > 0$

Колоквијум, 2004

**7.13**  $f(x, y, z) = 2x + 2y + 3z, xy + yz + zx = \frac{15}{4}$

**7.14**  $f(x, y, z) = xz + yz, x^2 + y^2 + z^2 = 1$

Колоквијум, 2003

**7.15**  $f(x, y) = 3x + 4y - 2, x^2 + y^2 = 1$

Колоквијум, 2002

Колоквијум, 2001

Колоквијум, 2000

Колоквијум, 1999

Колоквијум, 1998

Колоквијум, 1997

Колоквијум, 1996

Колоквијум, 1995

Колоквијум, 1994

Колоквијум, 1993

Колоквијум, 1992

## 8 Екстремне вредности на области

Колоквијум, 2009

**8.1** Дати су функција  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  и скуп  $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2$  са

$$f(x, y) = (x - y)^2 + (y + 1)^2 - 3, \quad \mathcal{D} = \{(x, y) : y \geq x - 3, y \geq -x - 3, y \leq 0\}.$$

Одредити најмању и највећу вредност функције  $f$  на скупу  $\mathcal{D}$ .

**8.2** Одредити најмању и највећу вредност функције  $f : (x, y) \mapsto (x - y)^2 + (x + 1)^2 + 2$  на троугаоној области  $\mathcal{D}$  између права  $x = 0$ ,  $y = x + 3$  и  $y = -x - 3$ .

**8.3** Одредити најмању и највећу вредност функције  $f : (x, y) \mapsto (x + y)^2 + (y - 1)^2 + 1$  на троугаоној области  $\mathcal{D}$  између права  $y = 0$ ,  $y = x + 5$  и  $y = 5 - x$ .

**8.4** Одредити најмању и највећу вредност функције  $f : (x, y) \mapsto (x + y)^2 + (x - 2)^2 - 1$  на троугаоној области  $\mathcal{D}$  између права  $x = 0$ ,  $y = 5 - x$  и  $y = x - 5$ .

Колоквијум, 2008

**8.5** Дати су функција  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  и скуп  $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2$  са

$$f(x, y) = 2(x + 2)^2 + 3(y - 1)^2 + 1, \quad \mathcal{D} = \{(x, y) : 0 \leq y \leq x + 4, x \leq 0\}.$$

Одредити најмању и највећу вредност функције  $f$  на скупу  $\mathcal{D}$ .

*Колоквијум, 2007*

*Колоквијум, 2006*

**8.6**  $f(x, y) = x^2 - 2xy - 2y$ ,  $\mathcal{D} = \{(x, y) : -2 \leq y \leq -x^2/2\}$ .

*Колоквијум, 2005*

*Колоквијум, 2004*

*Колоквијум, 2003*

*Колоквијум, 2002*

*Колоквијум, 2001*

*Колоквијум, 2000*

*Колоквијум, 1999*

*Колоквијум, 1998*

*Колоквијум, 1997*

*Колоквијум, 1996*

*Колоквијум, 1995*

*Колоквијум, 1994*

*Колоквијум, 1993*

*Колоквијум, 1992*

## Упутства и резултати

### 1.1 Из неједнакости

$$|f(x, y)| \leq \frac{|x|^5}{x^4 + y^4} + \frac{|y|^5}{x^4 + y^4} = \frac{x^4}{x^4 + y^4}|x| + \frac{y^4}{x^4 + y^4}|y| \leq |x| + |y|$$

слиди  $|f(x, y)| \rightarrow 0$  када  $(x, y) \rightarrow (0, 0)$ , а то значи да и  $f(x, y) \rightarrow 0$  када  $(x, y) \rightarrow (0, 0)$ . Како је  $f(0, 0) = 0$ , функција  $f$  **је непрекидна** у тачки  $(0, 0)$ .

**1.2** Из  $f(0, 0) = 0$  и  $f(x, 0) = \frac{1}{x} \rightarrow +\infty$  када  $x \rightarrow 0_+$  слиди да функција  $f$  у тачки  $(0, 0)$  **има прекид**, односно **није непрекидна**.

**1.3** Из  $f(0, 0) = 0$  и  $f(x, 0) = \frac{1}{x} \rightarrow +\infty$  када  $x \rightarrow 0_+$  (или  $f(x, \sqrt{x}) \rightarrow 1$  када  $x \rightarrow 0_+$ ) слиди да функција  $f$  у тачки  $(0, 0)$  **има прекид**, односно **није непрекидна**.

### 1.4 Из неједнакости

$$|f(x, y)| \leq \frac{|x|^3}{x^2 + y^2} + \frac{|y|^3}{x^2 + y^2} = \frac{x^2}{x^2 + y^2}|x| + \frac{y^2}{x^2 + y^2}|y| \leq |x| + |y|$$

слиди  $|f(x, y)| \rightarrow 0$  када  $(x, y) \rightarrow (0, 0)$ , а то значи да и  $f(x, y) \rightarrow 0$  када  $(x, y) \rightarrow (0, 0)$ . Како је  $f(0, 0) = 0$ , функција  $f$  **је непрекидна** у тачки  $(0, 0)$ .

**1.15** Нека је  $f = 1 - g$ , где је

$$g(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Како је

$$|g(x, y)| = \frac{|x|}{\sqrt{|x|^2 + y^2}} \cdot |y| \leq |y| \rightarrow 0, \quad y \rightarrow 0$$

то  $g(x, y) \rightarrow 0$  када  $(x, y) \rightarrow (0, 0)$ , па је  $f$  непрекидна у тачки  $(0, 0)$ .

### 3.1

$$f'_x(0, 0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x, 0) - f(0, 0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1 - 1}{\Delta x} = 0$$

Слично је и  $f'_y(0, 0) = 0$ .

$$\frac{\Delta f(0, 0)}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}} = -\frac{\Delta x \Delta y}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}} \rightarrow \begin{cases} 0, & \Delta x = 0, \Delta y \rightarrow 0 \\ -\frac{1}{2}, & \Delta x = \Delta y \rightarrow 0 \end{cases}$$

Према томе,  $f$  није диференцијабилна у тачки  $(0, 0)$ .

**4.1** а) Из  $f'_x = 3y^3 - 2xy + 4$  и  $f'_y = 9xy^2 - x^2$  налазимо

$$\nabla f(M) = (f'_x(M), f'_y(M)) = (-12, 68).$$

б) Како је  $f$  диференцијабилна у  $R^2$  (јер су  $f'_x$  и  $f'_y$  непрекидне функције у  $R^2$ ), то је

$$f'_v(M) = \nabla f(M) \cdot \frac{v}{|v|} = (-12, 68) \cdot \left(\frac{4}{5}, -\frac{3}{5}\right) = -\frac{252}{5}.$$

**4.2** а) Из  $f'_x = 6x^2 + y^2$  и  $f'_y = 2x^3 + 2xy - 3$  налазимо

$$\nabla f(M) = (f'_x(M), f'_y(M)) = (81, -31).$$

На слици (Сл.1) су дати градијенти и у тачкама из околине тачке  $M$ .

б) Како је  $f$  диференцијабилна у  $R^2$  (јер су  $f'_x$  и  $f'_y$  непрекидне функције у  $R^2$ ), то је

$$f'_v(M) = \nabla f(M) \cdot \frac{v}{|v|} = (81, -31) \cdot \left(-\frac{4}{5}, -\frac{3}{5}\right) = -\frac{231}{5}.$$

**5.3** За  $x = -1$  и  $y = -1$  из дате једнакости добијамо  $\boxed{z(D) = 1}$ .

Диференцирањем по  $x$  дате једнакости имамо

$$3z + 3xz'_x + yz'_x + \frac{1}{x} = 0, \quad (1)$$

одакле заменом  $x = y = -1$ ,  $z = 1$  добијамо  $\boxed{z'_x(D) = 1/2}$ .

Слично, диференцирањем дате једнакости по  $y$  имамо

$$3xz'_y + z + yz'_y + \frac{1}{y} = 0, \quad (2)$$

одакле добијамо  $\boxed{z'_y(D) = 0}$ .

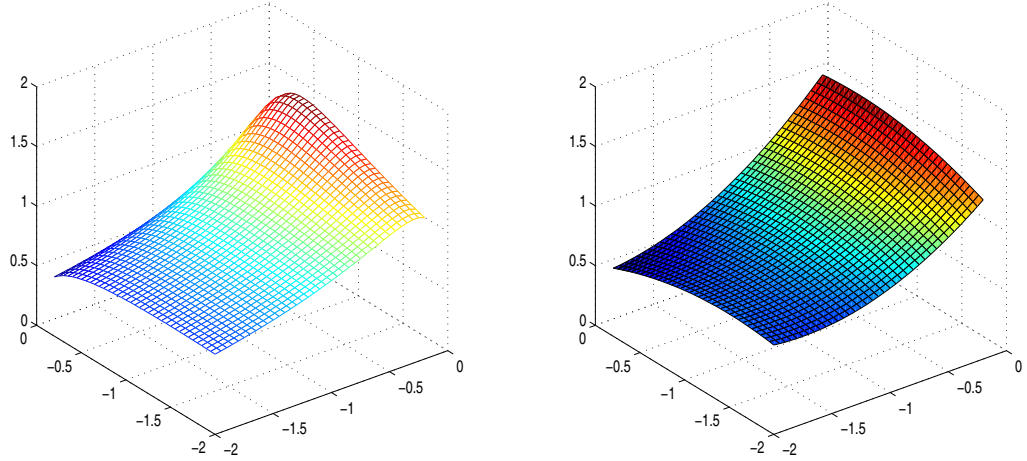
Диференцирањем једнакости (5) по  $x$  и заменом  $x = y = -1$ ,  $z = 1$  и  $z'_x = 1/2$  добијамо  $\boxed{z''_{x^2}(D) = 1/2}$ , а диференцирањем једнакости (5) по  $y$  и заменом наведених вредности, као и  $z'_y = 0$ , добијамо  $z''_{xy}(D) = 1/8$ .

Диференцирањем једнакости (6) по  $y$  и заменом одговарајућих вредности добијамо  $\boxed{z''_{y^2}(D) = -1/4}$ .

Узимајући у обзир вредности парцијалних извода првог и другог реда функције  $f$  у тачки  $D$  имамо

$$\begin{aligned} T_2(x, y) &= z(D) + dz(D) + \frac{1}{2}d^2z(D) \\ &= 1 + \frac{1}{2}(x+1) + \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{2}(x+1)^2 + 2 \cdot \frac{1}{8}(x+1)(y+1) - \frac{1}{4}(y+1)^2 \right] \\ &= \frac{7}{4} + \frac{9}{8}x - \frac{1}{8}y + \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{8}y^2 + \frac{1}{8}xy. \end{aligned}$$

*Напомена:* Задатак је решаван сматрајући да је функција  $f$  имплицитно дефинисана датом једнакошћу. Међутим, из те једнакости имамо и експлицитно вредност функције  $f$  (видети Друго решење.) Са графика функције  $f$  и добијеног Тејлоровог полинома (Сл.2) добијамо утисак о томе како Тејлоров полином апроксимира дату функцију.



Сл.2 Графици функције  $f$  (лево) и Тејлоровог полинома  $T_2$  (десно) у околини тачке  $D$

*Друго решење:* Из дате једнакости следи да је

$$f(x, y) = z = -\frac{4 + \ln xy}{3x + y}, \quad xy > 0.$$

Налажењем парцијалних извода добијамо

$$f'_x = \frac{9x - y + 3x \ln xy}{x(3x + y)^2}, \quad f'_y = -\frac{3x - 3y - y \ln xy}{y(3x + y)^2},$$

$$f''_{x^2} = -\frac{45x^2 - 12xy - y^2 + 18x^2 \ln xy}{x^2(3x + y)^3},$$

$$f''_{xy} = \frac{-18xy + y^2 + 9x^2 - 6xy \ln xy}{xy(3x + y)^3},$$

$$f''_{y^2} = \frac{9x^2 + 12xy - 5y^2 - 2y^2 \ln xy}{y^2(3x + y)^3}.$$

Заменом  $x = y = -1$  у добијеним парцијалним изводима имамо

$$f'_x(D) = \frac{1}{2}, \quad f'_y(D) = 0, \quad f''_{x^2}(D) = \frac{1}{2}, \quad f''_{xy}(D) = \frac{1}{8}, \quad f''_{y^2}(D) = -\frac{1}{4},$$

а даље исто као у Првом решењу.

**5.4** За  $x = 1$  и  $y = -1$  из дате једнакости и услова  $z > 0$  добијамо  $\boxed{z(M) = 1}$ .

Диференцирањем по  $x$  дате једнакости имамо

$$3z^2 z'_x + yz + xyz'_x + 2x = 0, \tag{3}$$

одакле заменом  $x = z = 1$ ,  $y = -1$  добијамо  $\boxed{z'_x(M) = -1/2}$ .

Слично, диференцирањем дате једнакости по  $y$  имамо

$$3z^2 z'_y + xz + xyz'_y - 4y = 0, \tag{4}$$

одакле добијамо  $\boxed{z'_y(M) = -5/2}$ .

Диференцирањем једнакости (5) по  $x$  и заменом  $x = z = 1$ ,  $y = -$  и  $z'_x = -1/2$  добијамо  $z''_{x^2}(M) = -9/4$ , а диференцирањем једнакости (5) по  $y$  и заменом наведених вредности, као и  $z'_y = -5/2$ , добијамо  $z''_{xy}(M) = -21/4$ .

Диференцирањем једнакости (6) по  $y$  и заменом одговарајућих вредности добијамо  $z''_{y^2}(M) = -57/4$ .

Узимајући у обзир вредности парцијалних извода првог и другог реда функције  $f$  у тачки  $M$  имамо

$$\begin{aligned} T_2(x, y) &= z(A) + dz(A) + \frac{1}{2}d^2z(A) \\ &= 1 - \frac{1}{2}(x-1) - \frac{5}{2}(y+1) - \frac{9}{8}(x-1)^2 - \frac{21}{4}(x-1)(y+1) - \frac{57}{8}(y+1)^2 \\ &= -4 - \frac{7}{2}x - \frac{23}{2}y - \frac{9}{8}x^2 - \frac{57}{8}y^2 - \frac{21}{4}xy. \end{aligned}$$

**5.6**

$$\begin{aligned} z'_x &= \frac{y^2 - yz - 1}{1 + xy + 2yz}, \quad z'_y = \frac{2xy - z^2 - 1 - xz}{1 + xy + 2yz}, \quad z''_{x^2} = -\frac{2yz'_x + 2yz'^2_x}{1 + xy + 2yz} \\ z''_{y^2} &= \frac{2x - 4zz'_y - 2yz'^2_y - 2xz'_y}{1 + xy + 2yz}, \quad z''_{xy} = \frac{2y - 2zz'_x - xz'_x - yz'_y - z}{1 + xy + 2yz} \\ T_2(x, y) &= -x - y \end{aligned}$$

**5.9**

$$\begin{aligned} z'_x &= \frac{y - 4x - 2z}{2x + 2z}, \quad z'_y = \frac{x + 1 - 3y^2}{2x + 2z}, \quad z''_{x^2} = -\frac{4 + 4z'_x + 2z'^2_x}{2x + 2z} \\ z''_{y^2} &= -\frac{6y + 2z'^2_y}{2x + 2z}, \quad z''_{xy} = \frac{1 - 2z'_y - 2z'_x z'_y}{2x + 2z} \\ z'_x(A) &= -\frac{1}{2}, \quad z'_y(A) = -1, \quad z''_{x^2}(A) = -\frac{5}{4}, \quad z''_{y^2}(A) = -4, \quad z''_{xy}(A) = 1 \\ T_2(x, y) &= -\frac{3}{2}x + 3y - \frac{5}{8}x^2 + xy - 2y^2 \end{aligned}$$

**5.11**

$$\begin{aligned} f'_x &= e^{x-y}(2x^2 - 2xy + y^2 + 4x - 2y), \quad f'_y = e^{x-y}(-2x^2 + 2xy - y^2 - 2x + 2y) \\ f''_{x^2} &= e^{x-y}(2x^2 - 2xy + y^2 + 8x - 4y + 4), \quad f''_{xy} = e^{x-y}(-2x^2 + 2xy - y^2 - 6x + 4y - 2) \\ f''_{y^2} &= e^{x-y}(2x^2 - 2xy + y^2 + 4x - 4y + 2) \\ f'_x(A) &= 6e, \quad f'_y(A) = -4e, \quad f''_{x^2}(A) = 14e, \quad f''_{xy}(A) = -10e, \quad f''_{y^2}(A) = 8e \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T_2(x, y) &= f(A) + df(A) + \frac{1}{2}d^2f(A) \\ &= 2e + 6e(x-1) - 4ey + \frac{1}{2}(14e(x-1)^2 + 2(-10e)(x-1)y + 8ey^2) \\ &= 7ex^2 + 4ey^2 - 10exy - 8ex + 6ey + 3e \end{aligned}$$

**5.17** У тачки  $A$  је  $z^2 + z - 2 = 0$ , па је  $z = 1$  (због  $z > 0$ ).

$$2xy + z^2 + x \cdot 2zz'_x - 2yzz'_x + z + xz'_x = 0$$

У тачки  $A$  је  $z^2 + 2zz'_x + z + z'_x = 0$ , па је  $z'_x(A) = -2/3$ .

$$x^2 + 2x \cdot zz'_y - 2z - 2yzz'_y + xz'_y = 0$$



У тачки  $A$  је  $1 + 2z'_y - 2 + z'_y = 0$ , па је  $\boxed{z'_y(A) = 1/3}$ .

$$2y + 2zz'_x + (2z + 2xz'_x)z'_x + 2zxz''_{x^2} - 2yz''_{x^2} + z'_x + z'_x + xz''_{x^2} = 0$$

У тачки  $A$  је  $\boxed{z''_{x^2}(A) = 28/27}$ .

Слично налазимо  $\boxed{z''_{xy}(A) = -35/27}$  и  $\boxed{z''_{y^2}(A) = 10/27}$ .

$$\begin{aligned} T_2(x, y) &= f(A) + df(A) + \frac{1}{2}d^2f(A) \\ &= 1 - \frac{2}{3}dx + \frac{1}{3}dy + \frac{1}{2}\left(\frac{28}{27}dx^2 - 2 \cdot \frac{35}{27}dxdy + \frac{10}{27}dy^2\right) \\ &= 1 - \frac{2}{3}(x-1) + \frac{1}{3}y + \frac{1}{2}\left(\frac{28}{27}(x-1)^2 - \frac{70}{27}(x-1)y + \frac{10}{27}y^2\right) \\ &= 1 - \frac{2}{3}(x-1) + \frac{1}{3}y + \frac{14}{27}(x-1)^2 - \frac{35}{27}(x-1)y + \frac{5}{27}y^2 \end{aligned}$$

**6.1 Прво решење:** Диференцирањем по  $x$  дате једнакости имамо

$$3z + 3xz'_x + yz'_x - \frac{1}{x} = 0, \quad (5)$$

одакле добијамо  $\boxed{z'_x = \frac{1-3xz}{3x^2+xy}}$ . Приметимо да је  $3x^2 + xy \neq 0$  јер је  $xy > 0$ .

Слично, диференцирањем дате једнакости по  $y$  имамо

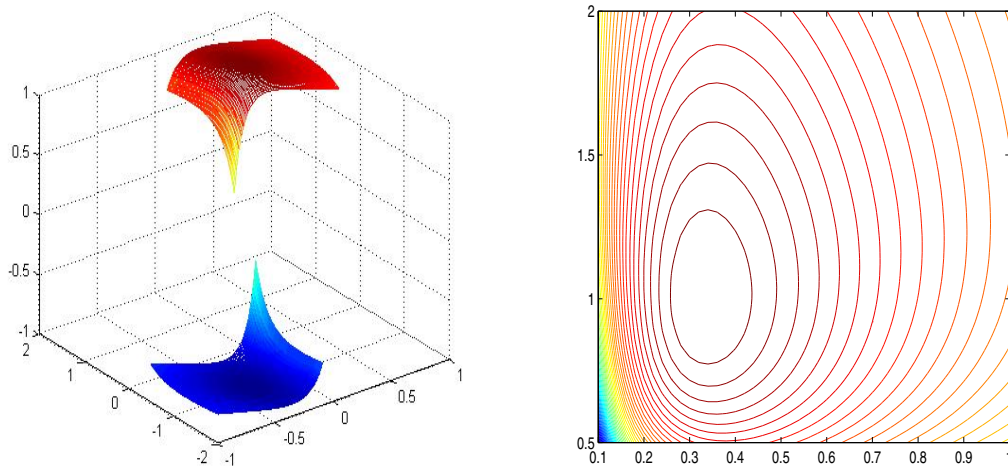
$$3xz'_y + z + yz'_y - \frac{1}{y} = 0, \quad (6)$$

одакле добијамо  $\boxed{z'_y = \frac{1-yz}{3xy+y^2}}$ .

Из система

$$1 - 3xz = 0, \quad 1 - yz = 0, \quad 3xz + yz - \ln(3xy) = 2$$

добијамо две стационарне тачке  $A(1/3, 1)$  и  $B(-1/3, -1)$ , при чему је  $z(A) = 1$  и  $z(B) = -1$ . Са слике (Сл.2) је јасно да су у тим тачкама локални екстремуми функције  $f$ .



Сл.2 График функције  $f$  (лево) и ниво линије (десно) у околини тачке  $A$  (слично је и у околини тачке  $B$ ).

Диференцирањем једнакости (5) најпре по  $x$ , а затим и по  $y$ , као и једнакости (6) по  $y$ , узимајући у обзир да је  $z'_x(A) = z'_y(A) = z'_x(B) = z'_y(B) = 0$ , добијамо да је у стационарним тачкама

$$(3x + y)z''_{x^2} + \frac{1}{x^2} = 0, \quad z''_{xy} = 0, \quad (3x + y)z''_{y^2} + \frac{1}{y^2} = 0.$$

Заменом одговарајућих вредности налазимо

$$\boxed{z''_{x^2}(A) = -z''_{x^2}(B) = -9/2} \quad \text{и} \quad \boxed{z''_{y^2}(A) = -z''_{y^2}(B) = -1/2},$$

што значи да је у тачки  $A$  локални максимум, а у тачки  $B$  локални минимум.

Према томе,  $f_{\min} = f(B) = -1$  и  $f_{\max} = f(A) = 1$ .

*Напомена:* Задатак је решаван сматрајући да је функција  $f$  имплицитно дефинисана датом једнакошћу. Међутим, из те једнакости имамо и експлицитно вредност функције  $f$  (видети Треће решење.)

*Друго решење:* Ако је  $F(x, y, z) = 3xz + yz - \ln(3xy) - 2$ , тада је (слајдови са предавања: Тема3, егзистенција и диференцијабилност имплицитне функције)

$$z'_x = -\frac{F'_x}{F'_z} = -\frac{3z - 1/x}{3x + y}, \quad z'_y = -\frac{F'_y}{F'_z} = -\frac{z - 1/y}{3x + y}.$$

Стационарне тачке  $A$  и  $B$  добијамо решавањем система

$$3z - \frac{1}{x} = 0, \quad z - \frac{1}{y} = 0, \quad F(x, y, z) = 0.$$

Налажењем парцијалних извода другог реда добијамо

$$F''_{x^2} = \frac{1}{x^2}, \quad F''_{y^2} = \frac{1}{y^2}, \quad F''_{z^2} = 0, \quad F''_{xy} = 0, \quad F''_{xz} = 3, \quad F''_{yz} = 1$$

и

$$z''_{x^2} = \frac{-9x + 18x^2z - y}{x^2(3x + y)^2}, \quad z''_{y^2} = \frac{-3y + 2zy^2 - 3x}{y^2(3x + y)^2}, \quad z''_{xy} = \frac{-y + 6xyz - 3x}{xy(3x + y)^2}.$$

Даље исто као у Првом решењу.

*Треће решење:* Из дате једнакости следи да је

$$f(x, y) = z = -\frac{2 + \ln(3xy)}{3x + y}, \quad xy > 0.$$

Налажењем парцијалних извода добијамо

$$f'_x = \frac{-3x + y - 3x \ln(3xy)}{x(3x + y)^2}, \quad f'_y = \frac{3x - y - y \ln(3xy)}{y(3x + y)^2},$$

$$f''_{x^2} = \frac{9x^2 - 12xy - y^2 + 18x^2 \ln(3xy)}{x^2(3x + y)^3},$$

$$f''_{xy} = \frac{6xy - y^2 - 9x^2 + 6xy \ln(3xy)}{xy(3x + y)^3},$$

$$f''_{y^2} = \frac{-9x^2 - 12xy + y^2 + 2y^2 \ln(3xy)}{y^2(3x + y)^3},$$

а даље исто као у Првом решењу.

**6.5** Ако је  $F(x, y, z) = z^3 + xyz + x^2 + 2y^2 + 8$ , тада је

$$z'_x = -\frac{F'_x}{F'_z} = -\frac{yz + 2x}{3z^2 + xy}, \quad z'_y = -\frac{F'_y}{F'_z} = -\frac{xz + 4y}{3z^2 + xy}.$$

Стационарне тачке добијамо решавањем система

$$2x + zy = 0, \quad zx + 4y = 0, \quad F(x, y, z) = 0.$$

1. Ако је  $z^2 \neq 8$ , прве две једначине имају тривијално решење (по  $x$  и  $y$ ), при чему из треће једначине ( $F = 0$ ) добијамо  $z = -2$ . У том случају имамо стационарну тачку  $A(0, 0)$  за коју је  $z(A) = -2$ .
2. Ако је  $z^2 = 8$ , односно  $z = 2\sqrt{2}$  или  $z = -2\sqrt{2}$ , систем нема решења.

Према томе, једина стационарна тачка је  $A(0, 0)$ . Налажењем парцијалних извода другог реда добијамо  $z''_{x^2}(A) = -\frac{1}{6}$ ,  $z''_{xy}(A) = \frac{1}{6}$  и  $z''_{y^2}(A) = -\frac{1}{3}$ . Како је

$$z''_{x^2}(A) \cdot z''_{y^2}(A) - (z''_{xy}(A))^2 > 0, \quad z''_{x^2}(A) < 0,$$

то је  $f_{\max} = f(A) = -2$ .

## 6.10

$$\begin{aligned} z'_x &= -\frac{2x+y}{2z}, \quad z'_y = \frac{3-x-2y}{2z}, \quad A(-1, 2) \\ z''_{x^2}(a) &= -\frac{1}{2} = a, \quad z''_{y^2}(A) = -\frac{1}{2} = c, \quad z''_{xy}(A) = -\frac{1}{4} = b \\ ac - b^2 &= \frac{1}{4} - \frac{1}{16} > 0, \quad a < 0, \quad z_{\max} = z(A) = 2 \end{aligned}$$

**7.1 Прво решење:** За Лагранжову функцију  $F$ , где је

$$F(x, y) = 4xy - 5 + \lambda(x^2 + y^2 - 18),$$

имамо

$$F'_x = 4y + 2\lambda x, \quad F'_y = 4x + 2\lambda y.$$

Из једнакости  $F'_x = 0$  и  $F'_y = 0$  добијамо  $(y - x)(2 - \lambda) = 0$ .

Ако је  $x = y$ , тада из датог услова следи  $x^2 = 9$ , па имамо стационарне тачке  $A(3, 3; -2)$  и  $C(-3, -3; -2)$  (функције  $F$ ). Ако је  $\lambda = 2$ , тада је  $y = -x$ , па имамо стационарне тачке  $B(3, -3; 2)$  и  $D(-3, 3; 2)$ .

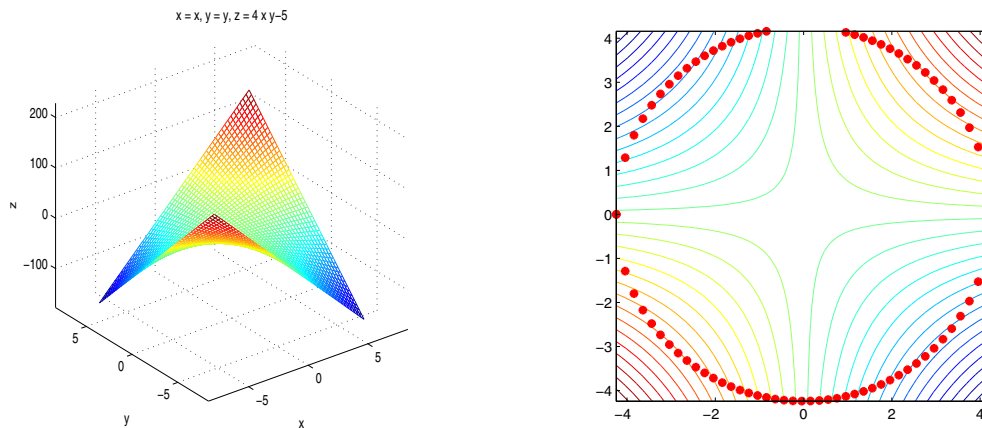
Како је  $F''_{x^2} = 2\lambda$ ,  $F''_{xy} = 4$ ,  $F''_{y^2} = 2\lambda$  и  $dy = -dx$  (при датом услову) за тачке  $A$  и  $C$ , односно  $dy = dx$  за тачке  $B$  и  $D$ , то је

$$\begin{aligned} d^2F(A) = d^2F(C) &= -4dx^2 + 8dxdy - 4dy^2 \\ &= -16dx^2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d^2F(B) = d^2F(D) &= 4dx^2 + 8dxdy + 4dy^2 \\ &= 16dx^2. \end{aligned}$$

Према томе, за  $dx \neq 0$  је  $d^2F(A) = d^2F(C) < 0$  и  $d^2F(B) = d^2F(D) > 0$ , па  $f$  у тачкама  $A$  и  $C$  има **условни локални минимум** (једнак  $-41$ ), а у тачкама  $B$  и  $D$  има **условни локални максимум** (једнак  $31$ ).

**Друго решење:** Ниво линија  $4xy - 5 = C$  површи дефинисане функцијом  $f$  и крива дефинисана условом  $x^2 + y^2 = 18$  се додирују ако је  $y + xy' = 0$  и  $x + yy' = 0$ , односно ако је  $x^2 = y^2$ . Према томе, једине могуће тачке условног локалног екстремума су тачке  $A$ ,  $B$ ,  $C$  и  $D$  (из првог решења). На слици (Сл.3) се лако уочавају додирне тачке ниво линија и криве  $\varphi = 0$ .



Сл.3 График функције  $f$  (лево) и ниво линије функције  $f$  заједно са линијом дефинисаном условом  $\varphi = 0$  (десно).

Функције  $f$  и  $g : (x, y) \mapsto 2xy$  достижу локални минимум у истим тачкама. Како је, при датом услову,

$$g(x, y) = 2xy = (x + y)^2 - (x^2 + y^2) = (x + y)^2 - 18,$$

минимум функције  $g$  се достиже за  $y = -x$ , односно у тачкама  $B$  и  $D$ .

Ако  $f$  у датој тачки има локални екстремум, тада и  $h : (x, y) \mapsto x^2y^2$  има у тој истој тачки локални екстремум. Како је, при датом услову,

$$h(x, y) = x^2y^2 = x^2(18 - y^2) = 18x^2 - x^4 = \varphi(x)$$

и

$$\varphi'(x) = 4x(9 - x^2), \quad \varphi''(x) = 36 - 12x^2,$$

функција  $h$  има условне локалне максимуме у тачкама  $A$ ,  $B$ ,  $C$  и  $D$ , а функција  $f$  у тачкама  $A$  и  $C$ . На графику функције  $f$  (Сл.3) се лако уочавају тачке условних локалних екстремума, као и то да функција нема локалних екстремума (безусловних).

**7.4 Прво решење:** Из услова следи  $y = \frac{x}{x-1}$  (јер је  $x \neq 1$ ), па је (при том услову)

$$f(x, y) = x^2 + \frac{x^2}{(x-1)^2} = g(x).$$

Како је

$$g'(x) = \frac{2x}{(x-1)^3}(x-2)(x^2-x+1),$$

то функција  $g$  у тачки  $x = 2$  има локални минимум. Према томе,  $f_{\min, xy=x+y} = f(2, 2) = 8$ .

*Друго решење:* За Лагранжову функцију  $F$ , где је

$$F(x, y) = x^2 + y^2 + \lambda(xy - x - y),$$

имамо

$$F'_x = 2x + \lambda y - \lambda, \quad F'_y = 2y + \lambda x - \lambda.$$

Из једнакости  $F'_x = 0$  и  $F'_y = 0$  добијамо  $2(x - y) = \lambda(x - y)$ .

Ако је  $x = y$ , тада из датог услова следи  $x = 2$  (јер је  $x > 0$ ) и  $\lambda = -4$ , па имамо стационарну тачку  $A(2, 2)$ . Ако је  $\lambda = 2$ , тада имамо систем  $x + y = 1$ ,  $xy = 1$  који нема реалних решења.

Како је  $F''_{x^2} = 2$ ,  $F''_{xy} = \lambda$ ,  $F''_{y^2} = 2$  и  $dy = -dx$  при датом услову, то је

$$\begin{aligned} d^2F(A) &= 2dx^2 + 2\lambda dx dy + 2dy^2 \\ &= 2dx^2 - 8dx dy + 2dy^2 \\ &= 12dx^2. \end{aligned}$$

Према томе,  $d^2F(A) > 0$  за  $dx \neq 0$ , па  $f$  у тачки  $A$  има **локални минимум**.

**7.5**

$$\begin{aligned} F'_x &= 2x - 2y + 6\lambda x, & F'_y &= 2y - 2x + 2\lambda y, & A(-\sqrt{3}, -\sqrt{3}), & \lambda = 0 \\ F''_{x^2} &= 2 + 6\lambda, & F''_{xy} &= -2, & F''_{y^2} &= 2 + 2\lambda, & dy = -3dx \\ d^2F(A) &= 2(dx - dy)^2 = 32dx^2 > 0, & f_{\min} &= f(A) = 0 \end{aligned}$$

**7.9**

$$\begin{aligned} F'_x &= 1 + 2\lambda x, & F'_y &= 2 + 2\lambda y, & F'_z &= -1 + 2\lambda z \\ x &= -\frac{1}{2\lambda}, & y &= -\frac{1}{\lambda}, & z &= \frac{1}{2\lambda}, & \lambda^2 = \frac{1}{4}, & A(-1, -2, 1), & \lambda_A = \frac{1}{2}, & B(1, 2, -1), & \lambda_B = -\frac{1}{2} \\ F''_{x^2} - F''_{y^2} &= F''_{z^2} = 2\lambda, & F''_{xy} &= F''_{xz} = F''_{yz} = 0 \\ d^2F(A) &= dx^2 + dy^2 + dz^2 > 0, & d^2F(B) &= -(dx^2 + dy^2 + dz^2) > 0 \\ f_{\min} &= f(A) = -6, & f_{\max} &= f(B) = 6 \end{aligned}$$

**7.13**

$$\begin{aligned} F &= 2x + 2y + 3z + \lambda \left( xy + yz + zx - \frac{15}{4} \right) \\ F'_x &= 2 + \lambda(y + z), & F'_y &= 2 + \lambda(x + z), & F'_z &= 3 + \lambda(x + y) \end{aligned}$$

Систем за СТ

$$2 + \lambda(y + z) = 0, \quad 2 + \lambda(x + z) = 0, \quad 3 + \lambda(x + y) = 0, \quad xy + yz + zx = \frac{15}{4}$$

Из прве две једначине следи  $\lambda(y - x) = 0$ , односно  $y = x$ .

Из прве и треће једначине је  $1 + \lambda x - \lambda z = 0$ .

Из ове и друге једначине је  $3 + 2\lambda x = 0$ , односно  $\lambda x = -3/2$ .

Како је сада  $\lambda z = -1/2$ , то је  $x = 3z$ .

Заменом  $x = y = 3z$  у четвртој једначини система добијамо  $z^2 = 1/4$ .

Стационарне тачке су:  $A^* \left( \frac{3}{2}, \frac{3}{2}, \frac{1}{2}, -1 \right)$  и  $B^* \left( -\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, 1 \right)$

Довољни услови

$$\begin{aligned} F''_{x^2} &= F''_{y^2} = F''_{z^2} = 0, & F''_{xy} &= F''_{yz} = F''_{xz} = \lambda, & d^2F &= 2\lambda(dxdy + dydz + dzdx) \\ & & (x + y)dz &+ (x + z)dy + (y + z)dx &= 0 \end{aligned}$$

1. У тачки  $A$  је  $3dz + 2dy + 2dx = 0$ , односно  $dz = -\frac{2}{3}(dx + dy)$ , па је

$$\begin{aligned} d^2F(A^*) &= -2(dx + dy) - 2dy \left( -\frac{2}{3} \right) (dx + dy) - 2dy \left( -\frac{2}{3} \right) (dx + dy) \\ &= \frac{4}{3}dx^2 + \frac{4}{3}dy^2 + \frac{2}{3}dxdy \\ &= \frac{1}{3}(dx + dy)^2 + dx^2 + dy^2 \end{aligned}$$

Како је  $d^2F(A^*) > 0$  за  $dx^2 + dy^2 \neq 0$ , функција  $f$  у тачки  $A$  има условни локални минимум.

2. Слично се показује да  $f$  у тачки  $B$  има условни локални максимум.

**7.15** Стационарне тачке су  $A(3/5, 4/5)$  са  $\lambda = -5/2$  и  $B(-3/5, -4/5)$  са  $\lambda = 5/2$ .

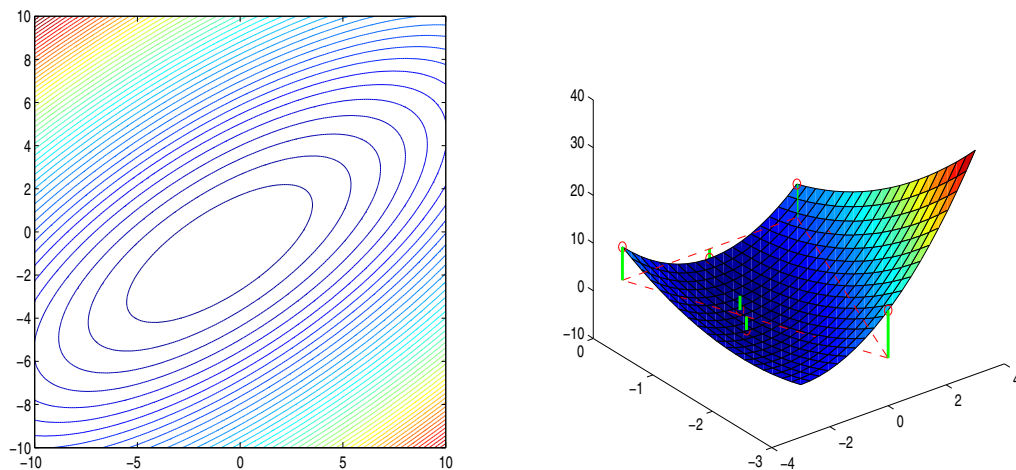
$$F''_{x^2} = F''_{y^2} = 2\lambda, \quad F''_{xy} = 0$$

$$d^2F(A^*) = -5(dx^2 + dy^2) < 0, \quad d^2F(B^*) = 5(dx^2 + dy^2) > 0$$

$$f_{\max} = f(A) = 3, \quad f_{\min} = f(B) = -7$$

**8.1 Прво решење:** Функција  $f$  има најмању вредност  $-3$  и то у тачки  $A(-1, -1)$ . Из  $A \in \mathcal{D}$  следи да је  $\min_{\mathcal{D}} f(x, y) = f(A) = -3$ .

Како је скуп  $\mathcal{D}$  је троугао са теменима  $C(-3, 0)$ ,  $D(3, 0)$  и  $F(0, -3)$  и како је график функције  $f$  параболоид са теменом у тачки  $A$  (Сл.3), највећа вредност функције на скупу  $\mathcal{D}$  је у некој од тачака  $C$ ,  $D$  или  $F$ . Пошто је  $f(C) = f(D) = 7$  и  $f(F) = 10$ , то је  $\max_{\mathcal{D}} f(x, y) = f(F) = 10$ .



Сл.2 Ниво линије функције  $f$  у околини тачке  $A$  (лево) и тачке у области  $\mathcal{D}$  чије су вредности тестиране за екстремне вредности (десно).

*Друго решење:* Како је  $f'_x = 2(x - y)$  и  $f'_y = 4y - 2x + 2$ , тачка  $A$  је једина стационарна тачка функције  $f$  и она припада скупу  $\mathcal{D}$ .

Функције  $f(x, 0)$ ,  $f(x, x - 3)$  и  $f(x, -x - 3)$  (које одређују границу скупа  $\mathcal{D}$ ) имају стационарне тачке  $B(0, 0)$ ,  $E(2, -1)$  и  $G(-8/5, -7/5)$ , при чему је  $f(B) = -2$ ,  $f(E) = 6$  и  $f(G) = -14/5$ . Упоредјујући вредности функције  $f$  у тачкама  $A, B, C, D, E, F, G$  видимо да је (Сл.3)

$$\min_{\mathcal{D}} f(x, y) = f(A) = -3, \quad \max_{\mathcal{D}} f(x, y) = f(F) = 10.$$

**8.5** Функција  $f$  има најмању вредност  $1$  и то у тачки  $A(-2, 1)$ . Из  $A \in \mathcal{D}$  следи да је  $\min_{\mathcal{D}} f(x, y) = f(A) = 1$ .

Како је скуп  $\mathcal{D}$  је троугао са теменима  $E(-4, 0)$ ,  $F(0, 4)$  и  $G(0, 0)$  и како је график функције  $f$  параболоид (елиптички) са теменом у тачки  $A$ , највећа вредност функције на скупу  $\mathcal{D}$  је у некој од тачака  $E$ ,  $F$  или  $G$ . Пошто је  $f(E) = f(G) = 12$  и  $f(F) = 36$ , то је  $\max_{\mathcal{D}} f(x, y) = f(F) = 36$ .

Друго решење: Како је  $f'_x = 4(x + 2)$  и  $f'_y = 6(y - 1)$ , тачка  $A$  је једина стационарна тачка функције  $f$  и она припада скупу  $\mathcal{D}$ . Функције  $f(0, y)$ ,  $f(x, 0)$  и  $f(x, x + 4)$  (које одређују границу скупа  $\mathcal{D}$ ) имају стационарне тачке  $B(0, 1)$ ,  $C(-2, 0)$  и  $D(-13/5, 7/5)$ , при чему је  $f(B) = 9$ ,  $f(C) = 4$  и  $f(D) = 11/5$ . Упоредјујући вредности функције  $f$  у тачкама  $A, B, C, D, E, F, G$  видимо да је

$$\min_{\mathcal{D}} f(x, y) = f(A) = 1, \quad \max_{\mathcal{D}} f(x, y) = f(F) = 36.$$