

МАТЕМАТИКА 2

Јуни, 2009 - Група 2

1. Одредити екстремне вредности функције $f : (x, y) \mapsto z$ задате имплицитно једнакошћу

$$1 + 6x^2z + 3y^2z + z^3 = 0.$$

Решење: Диференцирањем дате једнакости по x имамо

$$12xz + 6x^2z'_x + 3y^2z'_x + 3z^2z'_x = 0, \quad (1)$$

одакле добијамо

$$z'_x = -\frac{4xz}{2x^2 + y^2 + z^2}.$$

Слично диференцирањем по y добијамо

$$z'_y = -\frac{2yz}{2x^2 + y^2 + z^2}.$$

Очигледно да је $A(0, 0)$ једина стационарна тачка функције f .

Диференцирањем једнакости (1) по x и заменом $x = y = z'_x = 0$ и $z = -1$ налазимо да је $a = z''_{x^2}(A) = 4$. Слично добијамо $b = z''_{xy}(A) = 9$ и $c = z''_{y^2}(A) = 2$. Како је $ac - b^2 > 0$ и $a > 0$ у тачки A функција f има локални минимум који је једнак -1 .

2. Одредити најмању и највећу вредност функције $f : (x, y) \mapsto e^{xy-2x-y}$ на троугаоној области D одређеној тачкама $B(0, 0)$, $C(5, 0)$ и $D(0, 5)$.

Решење: Како је $f'_x = (y - 2)f$ и $f'_y = (x - 1)f$, једина стационарна тачка функције f је $A(1, 2)$ и она припада области D .

На границама $x = 0$ и $y = 0$ функција нема стационарних тачака обзиром да је

$$f(x, 0) = e^{-2x}, \quad f(0, y) = e^{-y}.$$

На граници $y = -x + 5$ функција има стационарну тачку $E(2, 3)$ јер је

$$h(x) = f(x, -x + 5) = e^{-x^2+4x-5}, \quad h'(x) = (-2x + 4)h(x).$$

Вредности функције f у критичним тачкама су:

$$f(A) = e^{-2}, \quad f(B) = 1, \quad f(C) = e^{-10}, \quad f(D) = e^{-5}, \quad f(E) = e^{-1}.$$

Према томе, $\min_D f = f(C) = e^{-10}$ и $\max_D f = f(B) = 1$.

3. Израчунати $\int \frac{x \ln x}{(1 + x^2)^2} dx$.

Решење: Приметимо најпре да је $x > 0$. За $u = \ln x$ и $dv = \frac{xdx}{(1 + x^2)^2}$ имамо

$$du = \frac{dx}{x}, \quad v = \frac{1}{2} \int \frac{d(1 + x^2)}{(1 + x^2)^2} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1 + x^2},$$

па је

$$I = \int \frac{x \ln x}{(1 + x^2)^2} dx = -\frac{1}{2} \frac{\ln x}{1 + x^2} + \frac{1}{2} J,$$

где је

$$J = \int \frac{dx}{x(1+x^2)} = \int \frac{1+x^2-x^2}{x(1+x^2)} dx = \int \frac{dx}{x} - \int \frac{xdx}{1+x^2}.$$

Према томе,

$$I = -\frac{1}{2} \frac{\ln x}{1+x^2} + \frac{1}{2} \ln x - \frac{1}{4} \ln(1+x^2) + C = \frac{x^2}{2(1+x^2)} \ln x - \frac{1}{4} \ln(1+x^2) + C.$$

4. Израчунати површину дела површи $z = xy$ над облашћу $D = \{(x, y) \mid 3 \leq x^2 + y^2 \leq 8\}$.

Решење: Површина P траженог дела површи је дата са

$$P = \iint_D \sqrt{1 + z_x'^2 + z_y'^2} dx dy = \iint_D \sqrt{1 + y^2 + x^2} dx dy.$$

Увођењем поларних координата имамо нову област $G = [\sqrt{3}, \sqrt{8}] \times [0, 2\pi]$, па је

$$P = \iint_G \rho \sqrt{1 + \rho^2} d\rho d\varphi = 2\pi \int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{8}} \rho \sqrt{1 + \rho^2} d\rho = \frac{2\pi}{3} (1 + \rho^2)^{3/2} \Big|_{\sqrt{3}}^{\sqrt{8}} = \frac{38}{3} \pi.$$

Драган Ђорић