

## МАТЕМАТИКА 2

Септембар, 2009 - Група 2

1. Одредити екстремне вредности функције  $f : (x, y) \mapsto z$  задате имплицитно једнакошћу

$$x^2z + y^2z - 2xz^2 - 2yz^2 = 2.$$

*Решење:* Дати услов може да се напише у облику  $F(x, y, z) = 0$ , где је

$$F(x, y, z) = x^2z + y^2z - 2xz^2 - 2yz^2 - 2.$$

Диференцирањем дате једнакости по  $x$  имамо

$$2xz + x^2z'_x + y^2z'_x - 4xzz'_x - 2z^2 - 4yzz'_x = 0, \quad (1)$$

одакле добијамо

$$z'_x = \frac{2z^2 - 2xz}{x^2 + y^2 - 4xz - 4yz}.$$

Слично диференцирањем по  $y$  добијамо

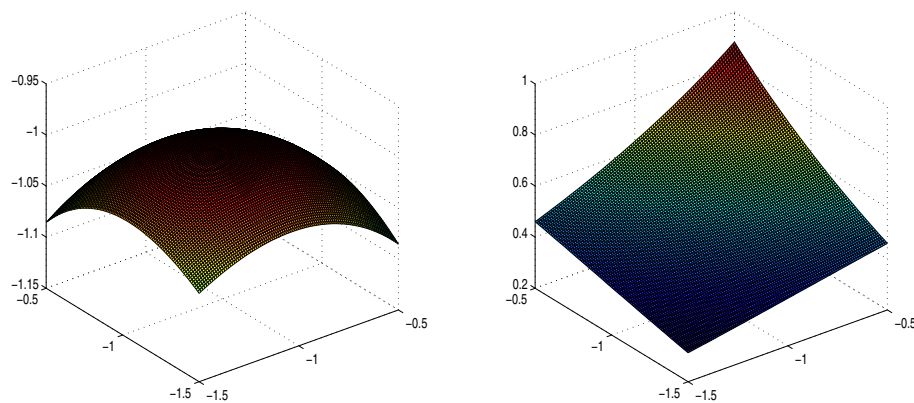
$$z'_y = \frac{2z^2 - 2yz}{x^2 + y^2 - 4xz - 4yz}.$$

Решавањем система

$$z'_x = 0, \quad z'_y = 0, \quad F(x, y, z) = 0$$

добијамо да је  $A(-1, -1)$  једина стационарна тачка функције  $f$  и да је  $f(A) = -1$ .

Диференцирањем једнакости (1) по  $x$  и заменом  $x = y = z = -1$  и  $z'_x = 0$  налазимо да је  $a = z''_{x^2}(A) = -1/3$ . Слично добијамо  $b = z''_{xy}(A) = 0$  и  $c = z''_{y^2}(A) = -1/3$ . Како је  $ac - b^2 > 0$  и  $a < 0$  у тачки  $A$  функција  $f$  има локални максимум који је једнак  $-1$ .



Слика 1: График функције  $z_1$  (лево) и график функције  $z_2$  (десно)

*Коментар.* У вези задатка и решења могу се дати разни коментари.

1. Изразе за  $z'_x$  и  $z'_y$  можемо добити и помоћу функције  $F$ ,

$$z'_x = -\frac{F'_x}{F'_z}, \quad z'_y = -\frac{F'_y}{F'_z}.$$

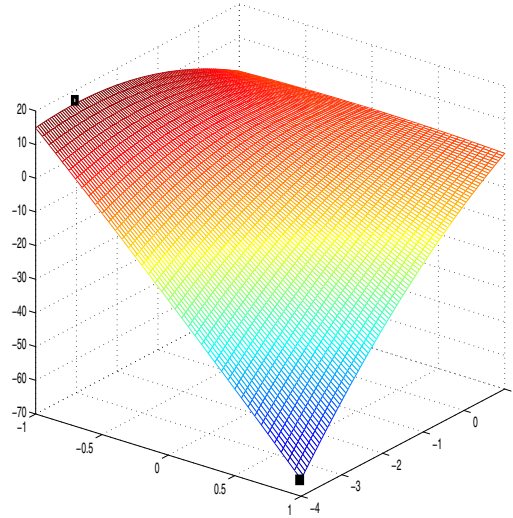
2. Изразе за  $z'_y$  и  $z''_{y^2}$  можемо и директно писати из израза за  $z'_x$  и  $z''_{x^2}$  тако што заменимо  $x$  са  $y$  и  $y$  са  $x$  (обзиром на симетрију функције  $F$  по  $x$  и  $y$ ).
3. Из дате једнакости  $z$  може и експлицитно да се изрази као функција променљивих  $x$  и  $y$  (квадратна једначина по  $z$ ), с тим што постоје две такве функције

$$z_{1/2} = \frac{x^2 + y^2 \pm \sqrt{(x^2 + y^2)^2 - 16(x + y)}}{4(x + y)}.$$

На слици 1 су приказани графици функција  $z_1$  (лево) и  $z_2$  (десно). На графику функције  $z_1$  се јасно види локални максимум у тачки  $A$ , а са графика функције  $z_2$  видимо да она у тачки  $A$  нема локални екстремум. Из решења задатка знамо да она у  $A$  нема ни стационарну тачку.

**2.** Одредити најмању и највећу вредност функције  $f : (x, y) \mapsto 8xy - x^2 - y^2 - 8x + 2y$  на области  $\mathcal{D} = \{(x, y) : -1 \leq x \leq 1, -4 \leq y \leq 1\}$ .

*Решење:* Како је  $f'_x = -2x + 8y - 8$  и  $f'_y = 8x - 2y + 2$ , једина стационарна тачка функције  $f$  је  $A(0, 1)$  и она не припада унутрашњости области  $\mathcal{D}$ .



Слика 2: График функције  $f$  са означеним тачкама минимума и максимума на области  $\mathcal{D}$ .

На граници  $x = -1$  је

$$g(y) = f(-1, y) = -y^2 - 6y + 7, \quad -4 \leq y \leq 1,$$

па  $g$  има стационарну тачку за  $y = -3$ . То значи да је тачка  $B(-1, -3)$  кандидат за екстремум функције  $f$  на  $\mathcal{D}$ . На границама  $x = 1$  и  $y = -4$  је

$$h(y) = f(1, y) = -y^2 + 10y - 9, \quad -4 \leq y \leq 1,$$

$$\alpha(x) = f(x, -4) = -x^2 - 40x - 24, \quad -1 \leq x \leq 1,$$

при чему  $h$  и  $\alpha$  немају стационарних тачака. На граници  $y = 1$  је

$$\beta(x) = f(x, 1) = -x^2 + 1, \quad -1 \leq x \leq 1.$$

У  $x = 0$  функција  $\beta$  има стационарну тачку, односно тачка  $A$  је кандидат за екстремум функције  $f$  на  $\mathcal{D}$ . Поред тачака  $A$  и  $B$  за кандидате за екстремум функције  $f$  на  $\mathcal{D}$  треба узети и тачке  $C(-1, -4)$ ,  $D(1, -4)$ ,  $E(-1, 1)$  и  $F(1, 1)$ .

Вредности функције  $f$  у критичним тачкама су:

$$f(A) = 1, \quad f(B) = 16, \quad f(C) = 15, \quad f(D) = -65, \quad f(E) = f(F) = 0.$$

Према томе,  $\min_{\mathcal{D}} f = f(D) = -65$  и  $\max_{\mathcal{D}} f = f(B) = 16$ . На слици 2 су означене екстремне вредности функције  $f$  на  $\mathcal{D}$ .

**3. Израчунати**  $\int \frac{e^{2x} - e^x}{(e^{2x} + 2e^x + 2)^2} dx.$

**Решење:** Нека је  $I$  дати интеграл и нека је  $e^x = t$ . Тада је  $e^x dx = dt$ , па је

$$I = \int \frac{t-1}{(t^2+2t+2)^2} dt = \int \frac{t+1}{(t^2+2t+2)^2} dt - 2 \int \frac{dt}{((t+1)^2+1)^2} = J - 2K.$$

Како је

$$J = \frac{1}{2} \int \frac{d(t^2+2t+2)}{(t^2+2t+2)^2} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{t^2+2t+2} + C_1$$

и

$$2K = 2 \int \frac{d(t+1)}{((t+1)^2+1)^2} = \frac{t+1}{t^2+2t+2} + 2 \arctan(t+1) + C_2,$$

то је

$$I = -\frac{1}{2} \cdot \frac{2e^x+3}{e^{2x}+2e^x+2} - \arctan(e^x+1) + C.$$

**Коментар.** У решавању овог интеграла кандидати су имали великих проблема, иако су сви знали да га сведу (сменом  $e^x = t$ ) на интеграл рационалне функције.

1. Највећи проблем је био интеграл  $\int \frac{dt}{(t^2+1)^2}$ , а било је и оних који су користили неке 'нове формуле'. Једна од њих је

$$\int \frac{dt}{(t^2+1)^2} = \arctan^2 t + C !!!.$$

На слајдовима 10. термина предавања, у 1.3 под тачком 5 је дато како се долази до рекурентне везе за интеграле типа  $I_k = \int \frac{dx}{(x^2+a^2)^k}$  и наведен је и пример за  $k=2$  (дакле, интеграл који је овде био проблем). Други начин да се тај интеграл реши је да се пође од једнакости (која је свима позната)

$$\int \frac{dt}{t^2+1} = \arctan t + C$$

и да се на интеграл примени парцијална интеграција са  $u = \frac{1}{t^2+1}$  и  $dv = dt$  (истина, мало необичан избор  $u$  и  $dv$ ). Добија се

$$\arctan - C = \frac{t}{t^2+1} + 2 \int \frac{t^2 dt}{(t^2+1)^2} = \frac{t}{t^2+1} + 2 \arctan t - 2 \int \frac{dt}{(t^2+1)^2}.$$

Према томе,

$$2 \int \frac{dt}{(t^2+1)^2} = \frac{t}{t^2+1} + \arctan t + C.$$

2. Међутим, проблема је било чак и са табличним интегралом  $\int \frac{dt}{t^2}$ . И за њега се појавила 'нова формула'

$$\int \frac{dt}{t^2} = \ln t^2 + C !!!$$

и масовно се користила.

4. Израчунати  $\iint \ln \sqrt{x^2 + y^2 + 2x + 1} \, dx dy$  ако је  $D = \{(x, y) \mid 1 \leq (x+1)^2 + y^2 \leq e^2\}$ .

*Решење:* Сменом

$$x + 1 = \rho \cos \varphi, \quad y = \rho \sin \varphi, \quad (\rho, \varphi) \in [1, e] \times [0, 2\pi], \quad J = \rho$$

имамо

$$I = \iint \ln \sqrt{x^2 + y^2 + 2x + 1} \, dx dy = \iint_G \rho \ln \rho \, \rho d\varphi = 2\pi \int_1^e \rho \ln \rho \, d\rho.$$

Како је

$$\int x \ln x \, dx = \frac{1}{2} x^2 \ln x - \frac{1}{4} x^2 + C,$$

лако добијемо  $I = \frac{\pi}{2}(e^2 + 1)$ .

*Коментар.* За оне који су спремали двојни интеграл ово је био веома лак задатак. Нажалост, мали је број оних који су покушали да га реше.

Драган Ђорић