

# М А Т Е М А Т И К А 3

Задаци за писмених испита

(2003 – 2007)

**Јануар, 2003.**

1. Решити једначину

$$xy'' + xy'^2 - y' = 0.$$

2. Решити једначину

$$xyu'_x + (x^2 + y^2)u'_y + (x - y)^2u'_z = 0.$$

3. Испитати диференцијабилност функције  $f : z \mapsto \bar{z} \sin z$ .

4. Применом Лапласове трансформације решити систем

$$x' - y = e^t, \quad y' + x = \sin t, \quad x(0) = 1, \quad y(0) = 0.$$

**Јануар, 2003.**

5. Решити једначину

$$y''(x^2 - 1) + y'(x^2 - 2x) + y(1 - 2x) = 0$$

ако је познато да је  $y(x) = e^{-x}$  једно њено партикуларно решење.

6. Одредити партикуларно решење система

$$\frac{dx}{x + y^2 + z^2} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{z}$$

за које је  $x(1) = 10$  и  $y(1) = 2$ .

7. Одредити аналитичку функцију  $f : x + iy \mapsto u + iv$  за коју је

$$v(x, y) = e^{-x} \cos y - e^{-y} \sin x.$$

8. Применом Лапласове трансформације решити једначину

$$\int_0^t (y''(x) + 4y(x))e^{t-x} dx = 1, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1.$$

**Јануар, 2003.**

9. Сменом  $e^y = u(x)$  решити једначину

$$y' - e^{x-y} + e^x = 0.$$

10. Решити једначину

$$(x^2 - y^2 - z^2)u'_x + 2xyu'_y + 2xzu'_z = 0.$$

11. Израчунати  $\int_L f(z)dz$ , где је  $f : x + iy \mapsto u + iv$  аналитичка функција за коју је

$$u(x, y) = x \sin x \operatorname{ch} y - y \cos x \operatorname{sh} y$$

и где је  $L$  дуж  $AB$ , при чему је  $A = 0$  и  $B = i$ .

12. Применом Лапласове трансформације одредити опште решење једначине

$$y'' + 4y' + 5y = 2e^{-2t}(\sin t + \cos t).$$

**Јануар, 2003.**

13. Решити једначину

$$xy'' - 2x^2y'^{3/2} = 4y'^2.$$

14. Матричном методом решити систем

$$x' = x + y + 4t, \quad y' = -5x - y.$$

15. Израчунати  $\int_{C^+} \frac{e^z - 1}{z(z^2 + 1)^2} dz$  ако је  $C$  контура која не садржи тачке  $0, -i, i$ .

16. Применом Лапласове трансформације решити једначину

$$\int_0^t (y''(x) + 2y'(x) + 2y(x)) \sin(t - x) dx = e^t, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = -1.$$

**Јануар, 2003.**

17. Погодном сменом решити једначину

$$y' + \sin 2y = x \cos^2 y.$$

18. Решити једначину

$$(x^2 + y^2)u'_x + 2xyu'_y + (x + y)u'_z = 0.$$

19. Нека је  $f(z) = \frac{z^2}{\bar{z}}$  за  $z \neq 0$  и  $f(0) = 0$ . Испитати да ли за  $f$  у тачки  $0$  важе Коши - Риманови услови.

20. Применом Лапласове трансформације одредити опште решење једначине

$$x'' - x' - 6x = te^t.$$

**Јануар, 2003.**

21. Решити једначину

$$xy' = xe^{y/x} + y + x.$$

22. Решити једначину

$$2xzu'_x + 2yzu'_y + (z^2 - x^2 - y^2)u'_z = 0.$$

23. Испитати диференцијабилност функције  $f : z \mapsto ze^{\bar{z}}$ .

24. Одредити Лапласову трансформацију функције  $f$ , ако је  $f(t) = \frac{\sin^4 t}{t}$ .

**Фебруар, 2003.**

25. Погодном сменом решити једначину

$$y' + \sin 2y = x \cos^2 y.$$

26. Решити једначину

$$(x^2 + y^2)u'_x + 2xyu'_y + (x + y)u'_z = 0.$$

27. Нека је  $f(z) = \frac{z^2}{\bar{z}}$  за  $z \neq 0$  и  $f(0) = 0$ . Испитати да ли за  $f$  у тачки 0 важе Коши - Риманови услови.

28. Применом Лапласове трансформације одредити опште решење једначине

$$x'' - x' - 6x = te^t.$$

**Фебруар, 2003.**

29. Решити једначину

$$\frac{y - xy'}{x + yy'} = 2.$$

30. Матричном методом решити систем

$$x' = 4x + y + t^2, \quad y' = -2x + y.$$

31. Применом Лапласове трансформације одредити опште решење једначине

$$y'' + 4y' + 5y = -5.$$

32. Одредити екстремале функционала  $J$  ако је

$$J[y] = \int_1^e e^{xy'} dx, \quad y(1) = 2, \quad y(e) = \frac{1}{2}.$$

**Фебруар, 2003.**

33. Одредити  $a$  ( $a \neq 0$ ) тако да  $y = \cot ax$  буде партикуларно решење једначине

$$y'' \sin^2 x = 2y,$$

а затим одредити њено опште решење.

34. Решити једначину

$$2xzu'_x + 2yzu'_y + (z^2 - x^2 - y^2)u'_z = 0.$$

35. Испитати диференцијабилност функције  $f : z \mapsto ze^{\bar{z}}$ .

36. Одредити Лапласову трансформацију функције  $f$ , ако је  $f(t) = \frac{\sin^4 t}{t}$ .

**Фебруар, 2003.**

37. Решити једначину

$$(y' - x\sqrt{y})(x^2 - 1) = xy.$$

38. Матричном методом решити систем

$$x' = 3x + 2y, \quad y' = 2x + 5 \sin t.$$

39. Применом Лапласове трансформације одредити опште решење једначине

$$y'' + 4y' + 4y = -2e^{-2t}.$$

40. Одредити екстремале функционала  $J$  ако је

$$J[y] = \int_0^{1/2} y'^2 \tan^2 y dx, \quad y(0) = 0, \quad y(1/2) = \frac{\pi}{4}.$$

**Јуни, 2003.**

41. Одредити интеграциони фактор  $\lambda(y)$  и опште решење једначине

$$2xy \ln y dx + (x^2 + y^2 \sqrt{y^2 + 1}) dy = 0.$$

42. Решити систем

$$x' = \sin x \cos y, \quad y' = \cos x \sin y.$$

43. Израчунати  $\int_{C^+} \frac{\cos z}{ch z} dz$ , где је  $C = \{z \mid |z| = 2\}$ .

44. Применом *Laplace*-ове трансформације решити једначину

$$y'' + \int_0^t y' e^{2t-2x} dx = e^{2t}, \quad y(0) = A, \quad y'(0) = 0, \quad A \in \mathbb{R}.$$

**Јуни, 2003.**

45. Решити једначину

$$xy' = y' + (y + 1) \ln \frac{y + 1}{x - 1}.$$

46. Матричном методом решити систем

$$x' = -x - 2y + z, \quad y' = 2x + 2y - z, \quad z' = 2x + y.$$

47. Одредити аналитичку функцију  $f : x + iy \mapsto u + iv$  ако је

$$u(x, y) = \sin 3x \cdot ch 3y, \quad f(0) = i.$$

48. Применом *Laplace*-ове трансформације решити једначину

$$y''' - y'' - y' + y = 4 \sin t, \quad y(0) = y''(0) = 1, \quad y'(0) = 4.$$

**Јуни, 2003.**

49. Решити једначину

$$y' = (x + y)^3.$$

50. Решити систем

$$x' + \frac{1}{y} = 1, \quad y' = \frac{1}{x - t}.$$

51. Одредити скуп тачака у којима је функција  $f : z \mapsto ze^{\bar{z}}$  диференцијабилна.

52. Применом *Laplace*-ове трансформације решити једначину

$$y'' - a^2 y = ch t, \quad a \in R.$$

**Јуни, 2003.**

53. Решити једначину

$$xy' - y = 1 + (x + y + 1) \ln \frac{x + y + 1}{x}.$$

54. Матричном методом решити систем

$$x' = 2x + y - z, \quad y' = -x + z, \quad z' = x + y.$$

55. Одредити аналитичку функцију  $f : x + iy \mapsto u + iv$  ако је

$$v(x, y) = \cos 3x \cdot sh 3y, \quad f(0) = 2.$$

56. Применом *Laplace*-ове трансформације решити једначину

$$y''' - y'' + y' - y = 1, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = y''(0) = 2.$$

**Септембар, 2003.**

57. Решити једначину

$$(\sqrt{x+y} + 1)y' + 1 = 0.$$

58. Матричном методом решити систем

$$x' = z, \quad y' = 2y - 5z, \quad z' = y.$$

59. Одредити константе  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  и  $\delta$  тако да функција  $f : x + iy \rightarrow u + iv$  дефинисана са

$$u = x^2 + \alpha xy + \beta y^2, \quad v = \gamma x^2 + \delta xy + y^2$$

буде аналитичка, а затим израчунати  $\int_L f(z) dz$ , где је  $L$  дуж  $AB$  чији су крајеви тачке  $A = 1$  и  $B = i$ .

60. Одредити *Laplace*-ову трансформацију функције  $f : t \rightarrow \sin^5 t$ .

**Септембар, 2003.**

61. Решити једначину

$$y' = \frac{1}{2} \left( \frac{x + y - 1}{x + 2} \right)^2.$$

62. Одредити партикуларно решење једначине

$$\sin^2 y \cdot u'_x + \cos^2 y \cdot u'_y + e^z u'_z = 0$$

за које је  $u(x, 0, z) = xe^z$ .

63. Применом *Laplace*-ове трансформације решити систем

$$x' = x - y - 1, \quad y' = 2x - y + 2e^t, \quad x(0) = y(0) = 1.$$

64. Одредити екстремале функционала  $J$  ако је

$$J[y] = \int_{x_1}^{x_2} e^{\sin x - y + y' + 1} dx.$$

**Септембар, 2003.**

65. Решити једначину

$$(\sqrt{x^2 + y^2} + x)y' = y.$$

66. Решити систем

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x + z}{y + z}, \quad \frac{dx}{dz} = \frac{y + z}{x + y}, \quad \frac{du}{dx} = \frac{u}{y + z}.$$

67. Израчунати  $\int_{C^+} \frac{dz}{z^5 + z^4 + z^3}$  ако је  $C = \{z \mid |z| = \frac{\pi}{4}\}$ .

68. Применом *Laplace*-ове трансформације решити једначину

$$y'' + y + \int_0^t (t - x + 1)y(x)dx, \quad y(0) = y'(0) = 1.$$

**Септембар, 2003.**

69. Решити једначину

$$x^3 \sin y \cdot y' = xy' - 2y.$$

70. Одредити партикуларно решење једначине

$$\cos^2 x \cdot u'_x + 2 \sin^2 x \cdot u'_y + zu'_z = 0$$

за које је  $u(0, y, z) = yz$ .

71. Применом *Laplace*-ове трансформације решити систем

$$x' = -2x + y + 3 \sin t, \quad y' = 4x - 2y, \quad x(0) = y(0) = -1.$$

72. Одредити екстремале функционала  $J$  ако је

$$J[y] = \int_{x_1}^{x_2} e^{2x^2 - 2y - y'} dx.$$



**Октобар, 2003.**

73. Решити једначину

$$y''' + 1 - (x + y'')e^x = 0.$$

74. Решити систем

$$x' = x + 2y, \quad y' = x - 5 \cos t.$$

75. Израчунати  $\int_{C^+} \frac{e^z dz}{z^2(z-1)}$ , где је  $C = \{z : |z+i| \leq 2\}$ .

76. Применом Лапласове трансформације решити једначину

$$tf(t) - 2 \int_0^t f(x) dx = 0, \quad f(1) = 3.$$

**Октобар, 2003.**

77. Решити једначину

$$\frac{y'''}{y'^2} - \frac{y''^2}{y'^3} + y' = 0.$$

78. Решити систем

$$x' = y + 5 \sin t, \quad y' = 2x + y.$$

79. Израчунати  $\int_{C^+} \frac{\cos z dz}{z(z - \pi/4)^2}$ , где је  $C = \{z : |z - i| < 3\}$ .

80. Применом Лапласове трансформације решити једначину

$$tf(t) - \int_0^t e^x f(t-x) dx = 0, \quad f(0) = 2.$$

**Октобар, 2003.**

81. Решити Бернулијеву једначину

$$y' + \frac{2}{x}y = \frac{2\sqrt{y}}{\sin^2 x}.$$

82. Решити једначину

$$y''' - 3y'' + 3y' - y = 1 + e^x.$$

83. Израчунати  $\int_{C^+} \bar{z} \operatorname{Re}(z) dz$  ако је  $C = \{z \mid |z| = 1\}$ .

84. Применом *Laplace*-ове трансформације решити систем

$$x' = x - y + \cos t, \quad y' = y - 4x.$$

**Октобар, 2003.**

85. Решити линеарну једначину

$$x(x^2 + 1)y' + x^2y = \pi.$$

86. Решити једначину

$$y''' + 3y'' - 4y = xe^{-2x}.$$

87. Израчунати  $\int_{C^+} \frac{e^{\pi z/2}}{4z^2 + z^4}$ , где је  $C = \{z : |z| = \pi\}$ .

88. Применом *Laplace*-ове трансформације решити систем

$$x' = x - 3y + \cos t, \quad y' = 3x + y.$$

**Октобар, 2003.**

89. Решити једначину

$$(x^2 + 2xy - y^2)dx + (y^2 + 2xy - x^2)dy = 0.$$

90. Решити једначину

$$x^2u'_x - (xy - 2z^2)u'_y - xzu'_z = 0.$$

91. Матричном методом решити систем

$$x' = -x + 2y - 2z, \quad y' = -2x + y - 2z, \quad z' = -y + z.$$

92. Применом *Laplace*-ове трансформације решити једначину

$$x''' + x - 1 = 0, \quad x(0) = x'(0) = x''(0) = 1.$$

**Октобар, 2003.**

93. Решити једначину

$$(x + y - 3)dy + (2x - 4y + 6)dx = 0.$$

94. Решити једначину

$$(z - y)u'_x + yu'_y - (y + z - 2x)u'_z = 0.$$

95. Матричном методом решити систем

$$x' = -8x - 9y + 8z, \quad y' = -2x - y + z, \quad z' = -12x - 12y + 11z.$$

96. Применом *Laplace*-ове трансформације решити једначину

$$y''' + y' - 2e^{2x} = 0, \quad y'(0) = y(0) = 2, \quad y''(0) = -2.$$

**Јануар, 2004.**

97. За диференцијалну једначину

$$\left(x^2 - \frac{\sin^2 y}{x}\right)dx + (xy + \sin 2y)dy = 0$$

одредити интеграциони фактор облика  $\lambda(x)$ , а затим решити диференцијалну једначину са тоталним диференцијалом.

98. Матричном методом решити систем диференцијалних једначина

$$\begin{aligned}x' &= -x - 5z \\y' &= x + y - z \\z' &= x + z\end{aligned}$$

99. Применом *Laplace*-ове трансформације одредити партикуларно решење диференцијалне једначине  $y''' + y' = 5$ , које задовољава услове  $y(0) = 0$ ,  $y'(0) = 2$  и  $y''(0) = 1$ .

100. Одредити екстремале функционала  $J[y] = \int_a^b e^{10 \sin x + 3y + y'} dx$ .

**Јануар, 2004.**

101. Решити диференцијалну једначину

$$xy' - y = \frac{x + y}{2} \ln \frac{x + y}{x}.$$

102. Испитати да ли је  $y = e^{-2x}$  решење диференцијалне једначине

$$y'' + xy' + (2x - 4)y = x - 2,$$

а затим одредити партикуларно решење које задовољава услове  $y(0) = 0$  и  $y'(0) = 1$ .

103. Израчунати  $\int_{C^+} (x^2 + iy^2)dz$ , ако је  $C = \{z : |z - 1| = 1\}$  и  $z = x + iy$ .

104. Применом *Laplace*-ове трансформације одредити партикуларно решење једначине

$$y'' - \int_0^1 xy(t-x)dx = u(t-2),$$

које задовољава услове  $y(0) = y'(0) = 0$  где је  $u$  јединична одскочна функција.

**Јануар, 2004.**

105. За диференцијалну једначину

$$(xy^2 + y \sin 2x)dx + (y^3 - \sin^2 x)dy = 0$$

одредити интеграциони фактор облика  $\lambda(y)$ , а затим решити диференцијалну једначину са тоталним диференцијалом.

106. Матричном методом решити систем диференцијалних једначина

$$\begin{aligned}x' &= 2x + z \\y' &= x - y - 2z \\z' &= -x + 4z\end{aligned}$$

107. Применом *Laplace*-ове трансформације одредити партикуларно решење диференцијалне једначине  $y''' + 4y' = -12$ , које задовољава услове  $y(0) = 1$ ,  $y'(0) = -2$  и  $y''(0) = 0$ .

108. Одредити екстремале функционала  $J[y] = \int_a^b e^{13 \cos x + 5x + 5y - y'} dx$ .

**Јануар, 2004.**

109. Решити диференцијалну једначину  $y' + \tanh y = \frac{\cos x}{\cosh y}$ .

110. Одредити опште решење диференцијалне једначине

$$y'' + y = \sin x + x^2 + x + 1.$$

111. Одредити све функције  $f : x + iy \mapsto u(x, y) + iv(x, y)$  аналитичке на скупу  $C \setminus \{-i\}$ , ако је

$$u(x, y) = \frac{y + 1}{x^2 + (y + 1)^2}.$$

112. Применом Лапласове трансформације одредити партикуларно решење диференцијалне једначине  $y'' + y' + 15y = f(t)$ , које задовољава услове  $y(0) = y'(0) = 0$ , ако је

$$f(t) = \begin{cases} 0, & t < 1 \\ 2t - 2, & t \geq 1. \end{cases}$$

**Фебруар, 2004.**

113. Решити диференцијалну једначину  $y' = y \ln y + y \sin^2 x$ .

114. Решити систем диференцијалних једначина

$$\frac{dx}{x(y^{3/2} - z^{3/2})} = \frac{dy}{y(z^{3/2} - x^{3/2})} = \frac{dz}{z(x^{3/2} - y^{3/2})}.$$

115. Израчунати  $\int_{C^+} \frac{dz}{z(1 - e^{2z})}$ , ако је  $C = \{z : |z| = \frac{3}{2}\pi\}$

116. Одредити Лапласову слику функције  $f(t) = \sinh^2 t \sin^3 t$ .

**Фебруар, 2004.**

117. Одредити решење диференцијалне једначине

$$yy'' = 2y'(y' + y^4)$$

које задовољава услов  $y(0) = 1$  и  $y'(0) = 2$ .

118. Матричном методом решити систем диференцијалних једначина

$$\begin{aligned} x' &= x + 2y \\ y' &= x - 5 \cos t \end{aligned}$$

119. Одредити све аналитичке функције  $f : x + iy \mapsto u(x, y) + iv(x, y)$ , и израчунати  $\int_i^1 f(z) dz$ , ако је  $u(x, y) = -\sin 3y \cosh 3x$ .

120. Применом Лапласове трансформације одредити решење једначине

$$\int_0^t e^{t-x} (y''(x) + y(x)) dx = t$$

које задовољава услове  $y(0) = y'(0) = 0$ .

**Фебруар, 2004.**

121. Решити диференцијалну једначину  $y' = 1 + e^{x+2y}$ .

122. Матричном методом решити систем диференцијалних једначина

$$\begin{aligned}x' &= 3x - y + z \\y' &= -2x + 4y - 2z \\z' &= -2x + 2y\end{aligned}$$

123. Израчунати  $\int_{C^+} \frac{\tan z}{z+1} dz$ , ако је  $C = \{z : |z| = \pi\}$ .

124. Коришћењем особина Лапласове трансформације доказати да за свако  $n > 2$ ,  $t > 0$  и  $Res > 0$ , важи једнакост

$$L(\sin^n t) = \frac{n(n-1)}{s^2 + n^2} L(\sin^{n-2} t).$$

### Фебруар, 2004.

125. Решити диференцијалну једначину  $xy'' = y' \ln \frac{y'}{x}$ .

126. Матричном методом решити систем диференцијалних једначина

$$x' = 2x - 4y + 4e^{-2t}, \quad y' = 2x - 2y$$

127. Одредити све аналитичке функције  $f : x + iy \mapsto u(x, y) + iv(x, y)$  и израчунати  $\int_i^1 f(z) dz$ , ако је  $v(x, y) = -\sin 2y \sinh 2x$ .

128. Применом Лапласове трансформације одредити решење једначине

$$\int_0^t e^{2(t-x)} (y''(x) - 2y'(x) + y(x)) dx = 2 \sin t$$

које задовољава услове  $y(0) = y'(0) = 0$ .

### Март, 2004.

129. Решити диференцијалну једначину  $yy'' = 1 + y'^2$ .

130. Матричном методом решити систем диференцијалних једначина

$$\begin{aligned}x' &= x + y + 2z \\y' &= 3x + 2y + 3z \\z' &= x - y\end{aligned}$$

131. Израчунати  $\int_{C^+} \frac{\cos z dz}{z(z+3i)^2}$  ако је  $C = \{z : |z| = \pi\}$ .

**132.** Применом Лапласове трансформације одредити партикуларно решење једначине

$$y''' - y'' = te^t$$

које задовољава услове  $y(0) = 0$ ,  $y'(0) = -1$ ,  $y''(0) = 1$ .

**Јун, 2004.**

**133.** За диференцијалну једначину

$$(x \sin y + y \cos y)dx + (x \cos y - y \sin y)dy = 0$$

одредити интеграциони фактор облика  $\lambda(x)$ , а затим решити диференцијалну једначину са тоталним диференцијалом.

**134.** Наћи опште решење диференцијалне једначине

$$x(x-1)^2 y'' + x(x-1)y' - y = 0$$

ако функција  $y_1 = \frac{x}{1-x}$  представља њено партикуларно решење.

**135.** Матричном методом решити систем диференцијалних једначина

$$\begin{aligned}x' &= 5x - y - 4z \\y' &= -12x + 5y + 12z \\z' &= 10x - 3y - 9y\end{aligned}$$

**136.** Применом Лапласове трансформације одредити опште решење једначине

$$y'' - y = \cos t.$$

**Јун, 2004.**

**137.** Решити диференцијалну једначину

$$\frac{1}{y^2}dx + (1 - \cos(x + y + 1) + \frac{1}{y^2})dy = 0.$$

**138.** Решити парцијалну диференцијалну једначину

$$xyz'_x + y^2 z'_y = x^2 - 2yz.$$

**139.** Израчунати  $\int_{C^+} \frac{z-1}{(z^2+1)\sin^2 z} dz$  ако је  $C = \{z : |z| = 2\}$ .

140. Применом Лапласове трансформације решити једначину

$$y'' + 2y' + 5y = e^{-x} \sin 2x$$

ако је  $y(0) = y'(0) = 1$ .

**Јун, 2004.**

141. Решити диференцијалну једначину  $y' + x = x^3 e^{-y}$ .

142. Одредити опште решење диференцијалне једначине

$$y'' + 4y = x^2 \sin^2 x.$$

143. Решити парцијалну диференцијалну једначину

$$x(y^2 - z^2)u'_x + y(x^2 + z^2)u'_y + z(x^2 + y^2)u'_z = 0.$$

144. Применом Лапласове трансформације решити систем једначина

$$\begin{aligned}x'' &= x - y - z \\y'' &= -x + y - z \\z'' &= -x - y + z\end{aligned}$$

ако је  $x(0) = y(0) = z(0) = 0$ ,  $x'(0) = y'(0) = 0$ ,  $z'(0) = 1$ .

**Јун, 2004.**

145. За диференцијалну једначину

$$2 \sin y(x + 2 \sin y)dx = (x^2 + 1) \cos y dy$$

одредити интеграциони фактор облика  $\lambda(y)$ , а затим решити диференцијалну једначину са тоталним диференцијалом.

146. Матричном методом решити систем диференцијалних једначина

$$\begin{aligned}x' &= x - y + 2z \\y' &= x + 2y - z \\z' &= 4x - y - z\end{aligned}$$

147. Одредити све аналитичке функције  $f : x + iy \mapsto u(x, y) + iv(x, y)$  и израчунати  $\int_0^\pi f(z)dz$  ако је  $u(x, y) = (\cosh y - \sinh y) \cos x$ .



148. Применом Лапласове трансформације одредити решење једначине

$$\int_0^t (y''(x) - y(x)) \sin(t - x) dx = e^t$$

ако је  $y(0) = y'(0) = 0$ .

**Септембар, 2004.**

149. Одредити опште решење диференцијалне једначине

$$2xyy' = y^2 + \sqrt{x^2 + y^4}.$$

150. Матричном методом решити систем диференцијалних једначина

$$\begin{aligned}x' &= x + 2y + 2z \\y' &= x - z \\z' &= 3x + 3y + 2z\end{aligned}$$

151. Одредити све аналитичке функције  $f : x + iy \mapsto u(x, y) + iv(x, y)$  ако је

$$u(x, y) = (\cosh y - \sinh y) \cos x.$$

152. Применом Лапласове трансформације одредити партикуларно решење једначине

$$y''' - y'' - 2y' = U(t - 3)$$

ако је  $y(0) = 1$ ,  $y'(0) = -1$ ,  $y''(0) = 1$ .

**Септембар, 2004.**

153. Одредити интеграциони фактор  $\lambda(x)$  и решити једначину

$$(x^2 + y^2 + 1)dx = 2xydy.$$

154. Решити систем

$$\frac{dx}{x(\ln y - \ln z)} = \frac{dy}{y(\ln z - \ln x)} = \frac{dz}{z(\ln x - \ln y)}.$$

155. Одредити скуп свих тачака у којима је функција  $f : z \mapsto |z|^2 e^z$  диференцијабилна.

156. Одредити *Laplace*-ову трансформацију функције  $f : t \mapsto \sin^2 t \cos^3 t$ .

**Септембар, 2004.**

157. За диференцијалну једначину

$$(xy \sin x + x \sin y + y^2)dx + (x^2 \cos y - x \cos x + 2xy \ln xy)dy = 0$$

одредити интеграциони фактор облика  $\lambda(x)$ , а затим решити једначину.

158. Решити парцијалну диференцијалну једначину

$$(-x + y + z)u'_x + (x - y + z)u'_y + (x + y - z)u'_z = u.$$

159. Израчунати  $\int_{C^+} \frac{\sin z}{z(z^2 + 1)} dz$ , ако је  $C = \{z : |z| = \sqrt{2}\}$ .

160. Применом Лапласове трансформације решити систем једначина

$$\begin{aligned}x' &= y + e^t \\y' &= -x - \sin 2t\end{aligned}$$

ако је  $x(0) = \frac{1}{2}$ ,  $y(0) = 1$ .

**Септембар, 2004.**

161. Решити једначину  $y' = \frac{x}{x^2 + e^{2y}}$ .

162. Решити систем

$$\frac{dx}{x/y - x/z} = \frac{dy}{y/z - y/x} = \frac{dz}{z/x - z/y}.$$

163. Одредити скуп свих тачака у којима је функција  $f : z \mapsto z^2 e^{z\bar{z}}$  диференцијабилна.

164. Одредити  $L^{-1}[F]$ , ако је  $F(s) = \frac{s^2}{(s^3 - 1)^2}$ .

**Јануар, 2005.**

165. Одредити опште решење диференцијалне једначине

$$x(1 - x - xy)y' = 1 + y.$$

166. Одредити опште решење система диференцијалних једначина

$$\begin{aligned}x' &= 2x + y - z \\y' &= x + 3y - z \\z' &= 3x - y + 3z\end{aligned}$$

167. Израчунати  $\int_{C^+} \frac{2z - \pi}{\cos^2 z} dz$ , ако је  $C = \{z : |z - \frac{\pi}{2}| = \frac{\pi}{2}\}$ .

168. Одредити Лапласову слику функције  $f : t \mapsto \frac{e^{-3t} \sin^2 t}{t}$ .

**Јануар, 2005.**

169. Користећи погодну смену решити диференцијалну једначину

$$x^2 y' = 2x + e^{-y}.$$

170. Решити систем једначина

$$\frac{dx}{e^{2y-x} - e^{2z-x}} = \frac{dy}{e^{2z-y} - e^{2x-y}} = \frac{dz}{e^{2x-z} - e^{2y-z}}.$$

171. Одредити све аналитичке функције  $f : x + iy \mapsto u(x, y) + iv(x, y)$  ако је

$$v(x, y) = [2xy \cos 2y + (x^2 - y^2) \sin 2y] e^{2x},$$

а затим израчунати  $\int f(z) dz$ .

172. Применом Лапласове трансформације решити једначину

$$y'' - 4y' + 5y = f(t), \quad f(t) = \begin{cases} 5, & 0 \leq t < 1 \\ 0, & 1 \leq t \end{cases}$$

ако је  $y(0) = y'(0) = 0$

**Јануар, 2005.**

173. За диференцијалну једначину

$$2y' \tan x + \frac{\sin 2y}{\cos^2 x} = 0$$

одредити интеграциони фактор облика  $\lambda(y)$ , а затим решити једначину.

174. Наћи опште решење диференцијалне једначине

$$y'' - 2y' \cot 2x - y \sin 2x = 0$$

ако функција  $y_1 = e^{\sin^2 x}$  представља њено партикуларно решење.

175. Израчунати  $\int_{C^+} \frac{2z - \pi i}{\cosh^2 z} dz$ , ако је  $C = \{z : |z - \frac{\pi}{2}i| = \frac{\pi}{2}\}$ .

176. Применом Лапласове трансформације решити систем једначина

$$x'' + x + y = 5$$

$$y'' - 4x - 3y = -3$$

ако је  $x(0) = x'(0) = y(0) = y'(0) = 0$

**Јануар, 2005.**

177. Користећи погодну смену решити диференцијалну једначину

$$y' \cos y + \sin y = \cos x.$$

178. Решити диференцијалну једначину

$$2yy'' - 3y'^2 = 4y^2.$$

179. Одредити све аналитичке функције  $f : x + iy \mapsto u(x, y) + iv(x, y)$  ако је

$$u(x, y) = e^{x-y} \cos(x+y) + e^{x+y} \cos(x-y),$$

а затим израчунати  $\int f(z) dz$ .

180. Применом Лапласове трансформације решити једначину

$$y'' + \int_0^t (y''(x) + y(x)) \sin(t-x) dx = 2U(t-2\pi) \cos t$$

ако је  $y(0) = y'(0) = 0$ .

**Фебруар, 2005.**

181. За диференцијалну једначину

$$(2x + 3e^x \cos y) \cos y dx + (1 + x^2 \sin y) dy = 0$$

одредити интеграциони фактор облика  $\lambda(y)$ , а затим решити једначину.

182. Решити парцијалну диференцијалну једначину

$$(x^2 - y^2 + 2yz)z'_x + (x^2 - y^2 + 2xz)z'_y = (x - y)z.$$

183. Израчунати  $\int_{C^+} \frac{e^{2z}}{z^2(e^z + 1)} dz$  ако је  $C = \{z : |z - 2i| = 3\}$ .

184. Применом Лапласове трансформације решити систем једначина

$$x'' - x - 2y = 0$$

$$y'' + 2x + 3y = 0$$

ако је  $x(0) = y(0) = y'(0) = 0, x'(0) = 1$ .

**Фебруар, 2005.**

185. Користећи погодну смену решити диференцијалну једначину

$$y' \sin y = (\sin x + \cos y) \cos x.$$

186. Одредити опште решење диференцијалне једначине

$$y''' - y' = \frac{1}{\sinh x}.$$

187. Одредити све реалне функције  $\alpha(x)$  и  $\beta(x)$  за које је функција

$$f : x + iy \mapsto \alpha(x)(x \cos y - y \sin y) + i\beta(x)(x \sin y + y \cos y)$$

аналитичка за све  $x + iy \in \mathbb{C}$ .

188. Применом Лапласове трансформације решити једначину

$$y'(t) + t \sin t = \int_0^t (y'''(x) - y(x))e^{t-x} dx$$

ако је  $y(0) = y'(0) = y''(0) = 0$ .

**Фебруар, 2005.**

189. Решити диференцијалну једначину

$$x(x^2 \cos y - \tan y)dy = 2dx.$$

190. Одредити опште решење система диференцијалних једначина

$$x' = 5x + y - z$$

$$y' = -2x + y + z$$

$$z' = 3x + 2z$$

191. Израчунати  $\int_{C^+} \frac{e^{\pi z}}{z^6 - z^2} dz$  ако је  $C = \{z : |2z - i| = 2\}$ .

192. Применом Лапласове трансформације решити систем једначина

$$x'' - 3x + 2y = 0$$

$$y'' - 8x + 5y = 0$$

ако је  $x(0) = y(0) = 0$ ,  $x'(0) = y'(0) = 1$ .

**Фебруар, 2005.**

193. За диференцијалну једначину

$$(x + y)dx + \tan x dy = 0$$

одредити интеграциони фактор облика  $\lambda(x)$ , а затим решити једначину.

194. Одредити опште решење диференцијалне једначине

$$y''' + y' = \frac{1}{\sin x}.$$

195. Одредити све аналитичке функције  $f : x + iy \mapsto u(x, y) + iv(x, y)$  ако је

$$u(x, y) = \frac{\sinh 2x}{\cosh 2x + \cos 2y}.$$

196. Применом Лапласове трансформације решити једначину

$$y'''(t) - y'(t) = t \sinh t$$

ако је  $y(0) = C \in R$ ,  $y'(0) = y''(0) = 0$ .

**Јун, 2005.**

197. Користећи смену  $\sin y = z$  решити диференцијалну једначину

$$y' \cos y - \cos x \sin^2 y - \sin y = 0.$$

198. Наћи опште решење диференцијалне једначине

$$y'' - y' \cot x + y \sin^2 x = 0$$

ако функција  $y_1 = \cos(\cos x)$  представља њено партикуларно решење.

199. Испитати регуларност функције

$$f : z \rightarrow \begin{cases} \frac{1}{z} - \frac{1}{e^z - 1}, & z \neq 0 \\ a, & z = 0 \end{cases}$$

где је  $a \in C$ .

200. Применом Лапласове трансформације решити систем једначина

$$x' + x + y = f(t)$$

$$y' - x + y = U(t)$$

ако је  $f(t) = \begin{cases} 0, & t < 1 \\ e^{1-t}, & t \geq 1 \end{cases}$  и  $x(0) = y(0) = 0$ .

**Јун, 2005.**

201. За диференцијалну једначину

$$(xy \sin x + y \ln y)dx + (x + y + \ln y)dy = 0$$

одредити интеграциони фактор облика  $\lambda(y)$ , а затим решити једначину.

202. Одредити опште решење система диференцијалних једначина

$$x' = -x + 4y - 4z$$

$$y' = x - y + 3z$$

$$z' = x - 2y + 3z$$

203. Израчунати  $\int_{C^+} \frac{e^z - 1}{(z^2 - z)^2} dz$  ако је  $C = \{z : |z| = \frac{3}{2}\}$ .

204. Применом Лапласове трансформације решити једначину

$$y''(t) - 4y'(t) + 4y(t) = f(t)$$

ако је  $f(t) = \begin{cases} 0, & t < 2 \\ e^{2(t-2)}, & t \geq 2 \end{cases}$ .

**Јун, 2005.**

205. Користећи смену  $\sin x = z$  решити диференцијалну једначину

$$(y^2 + 4 \sin x)y' = \cos x.$$

206. Одредити опште решење диференцијалне једначине

$$y''' + 4y' = \cot 2x.$$

207. Испитати регуларност функције  $f : z \rightarrow \begin{cases} \frac{e^z}{z} - \frac{\sin z}{z^2}, & z \neq 0 \\ a, & z = 0 \end{cases}$ , где је  $a \in \mathbb{C}$ .

208. Применом Лапласове трансформације решити систем једначина

$$x' - x - y = U(t)$$

$$y' + x - y = f(t),$$

$$\text{ако је } f(t) = \begin{cases} 0, & t < 1 \\ e^{t-1}, & t \geq 1 \end{cases} \text{ и } x(0) = y(0) = 0.$$

**Јун, 2005.**

209. Одредити опште решење диференцијалне једначине

$$y' = \frac{(2y + 1)^2}{(x + 2y - 2)^2}.$$

210. Одредити опште решење диференцијалне једначине

$$y''' + 4y' = \frac{4}{\cos 2x}.$$

211. Израчунати  $\int_{C^+} \frac{\sin \frac{\pi}{2} z}{(z^2 - z)^2} dz$  ако је  $C = \{z : |z| = \frac{\pi}{2}\}$ .

212. Применом Лапласове трансформације решити једначину

$$y''(t) - 3y'(t) = 1 + \sin t + \cos t.$$

**Септембар, 2005.**

213. Користећи смену  $z = e^y$  решити диференцијалну једначину

$$(1 - 2xe^y)y' = e^y - 1.$$

214. Одредити опште решење диференцијалне једначине

$$y^{iv} + y'' = \ln x.$$

215. Дата је  $\phi$ -ја  $f(z) = \begin{cases} z^2/\bar{z}, & z \neq 0 \\ 0, & z = 0 \end{cases}$ .

1. Испитати да ли у тачки  $z = 0$  важе Коши-Риманови услови.

2. Израчунати  $\int_{C^+} f(z) dz$  ако је  $C = \{z : |z| = r\}$ ,  $r \neq 0$ .



216. Применом Лапласове трансформације решити једначину

$$y'''(t) + y'(t) = \sin t$$

ако је  $y(0) = y'(0) = 1$ ,  $y''(0) = 0$ .

**Септембар, 2005.**

217. Користећи смену  $z = y^2$  решити диференцијалну једначину

$$2xy' = y + \sqrt{y^2 + \frac{x^2}{y^2}}.$$

218. Решити систем диференцијалних једначина

$$\frac{dx}{x^3 - y^3 + y^2z} = \frac{dy}{x^3 - y^3 + x^2z} = \frac{dz}{(x^2 - y^2)z}.$$

219. Одредити све аналитичке функције  $f : x + iy \mapsto u(x, y) + iv(x, y)$  ако је

$$u(x, y) = e^x[(x^2 - y^2) \cos y + 2(1 - xy) \sin y].$$

220. Применом Лапласове трансформације решити једначину  $y'' + y = f(t)$ , ако је

$$f(t) = \begin{cases} 4, & 0 \leq t < 2 \\ t + 2, & t \geq 2 \end{cases}$$

и  $y(0) = y'(0) = 0$ .

**Октобар, 2005.**

221. Користећи смену  $z = e^y$  решити диференцијалну једначину

$$y'(e^y - x) = xe^{-y} + 1.$$

222. Наћи опште решење диференцијалне једначине

$$4y'' + 4y' + y = \cosh \frac{x}{2}.$$

223. Решити парцијалну диференцијалну једначину

$$(2z - 5y)u'_x + (5x - 3z)u'_y + (3y - 2x)u'_z = 0.$$

224. Применом Лапласове трансформације решити једначину

$$y'' - 3y' = 1 + \sin t + \cos t$$

ако је  $y(0) = y'(0) = 0$

**Октобар, 2005.**

**225.** За диференцијалну једначину

$$2(x + 2 \sin y) \sin y dx - (x^2 + 1) \cos y dy = 0$$

одредити интеграциони фактор облика  $\lambda(y)$ , а затим решити једначину.

**226.** Решити парцијалну диференцијалну једначину

$$(xz + y)u'_x + (yz + x)u'_y + (z^2 - 1)u'_z = 0$$

**227.** Израчунати  $\int_{C^+} \frac{z-1}{z^5 + 2z^3 + z} dz$  ако је  $C = \{z : |z - i| = \frac{3}{2}\}$ .

**228.** Применом Лапласове трансформације решити интегралну једначину

$$y(t) = f(t) + 2 \int_0^t y(x) \cos(t-x) dx, \quad f(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t < 3 \\ 0, & 3 \leq t \end{cases}.$$

**Октобар, 2005.**

**229.** Решити диференцијалну једначину

$$y' = \frac{y}{\sin(\ln y) - x}.$$

**230.** Решити диференцијалну једначину

$$(1 - y^2)y'' = 2y'(1 + y')$$

ако је  $y(0) = -1$  и  $y'(0) = -2$ .

**231.** Решити систем диференцијалних једначина

$$y'x = zx + z - y$$

$$z'x = yx + y - z.$$

**232.** Применом Лапласове трансформације решити једначину

$$y'' - 2y' + y = 2 + 2e^t \sin t$$

ако је  $y(0) = y'(0) = 0$ .

**Октобар, 2005.**

**233.** Решити диференцијалну једначину

$$y' = \frac{2y}{y^2(1 + \ln y) - x}.$$

**234.** Одредити опште решење система диференцијалних једначина

$$\begin{aligned}x' &= 2x - y - 2z \\y' &= -x + z \\z' &= x + y - z\end{aligned}$$

**235.** Израчунати  $\int_{C^+} \frac{z+1}{z^5 - 2z^3 + z} dz$  ако је  $C = \{z : |z-1| = \frac{3}{2}\}$ .

**236.** Применом Лапласове трансформације решити интегралну једначину

$$y(x) = e^{-x} \cos x + \int_0^x y(t) dt$$

**Јануар, 2006.**

**237.** За диференцијалну једначину

$$(\ln y + 2x - 1)y' = 2y$$

одредити интеграциони фактор  $\lambda(y)$ , а затим решити једначину.

**238.** Решити парцијалну диференцијалну једначину

$$x(y^2 - 2x^2)z'_x + y(2y^2 - x^2)z'_y = 4z(x^2 - y^2).$$

**239.** Одредити све аналитичке функције  $f : x + iy \rightarrow u(x, y) + iv(x, y)$  за које је

$$v(x, y) = \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2}, \quad (x, y) \neq (0, 0).$$

**240.** Применом Лапласове трансформације решити једначину

$$y'' - 5y' + 6y = 10e^t \cos t, \quad y(0) = 3, \quad y'(0) = -4.$$

**Јануар, 2006.**

**241.** За диференцијалну једначину

$$(xe^{y-x} + 1)y' + e^{y-x} + y = 0$$

одредити интеграциони фактор облика  $\lambda(x)$ , а затим решити једначину.

242. Одредити опште решење диференцијалне једначине

$$y''' - y' = \tanh x.$$

243. Испитати диференцијабилност и аналитичност функције

$$f(z) = z^3 \bar{z}.$$

244. Применом Лапласове трансформације решити једначину

$$y'' + 3y = f(t), \quad f(t) = \begin{cases} 3, & 0 \leq t < 1 \\ 0, & 1 \leq t \end{cases}$$

за  $y(0) = 0$ ,  $y'(0) = 1$ .

**Јануар, 2006.**

245. Решити диференцијалну једначину

$$xy'(y - x^2 e^{-y^2}) = 1.$$

246. Одредити опште решење система диференцијалних једначина

$$x' = -x + 2y + 3z$$

$$y' = x - 2z$$

$$z' = -x + y + 2z$$

247. Израчунати  $\int_{C^-} \frac{e^{-z}}{z^2(z^2 + 2z + 2)} dz$ , ако је  $C = \{z : |z| = 2\}$ .

248. Применом Лапласове трансформације решити једначину

$$y'' + y = f(t), \quad f(t) = \begin{cases} \cos t, & 0 \leq t < \pi \\ 0, & \pi \leq t \end{cases}$$

за  $y(0) = 1$ ,  $y'(0) = 0$

**Фебруар, 2006.**

249. Решити диференцијалну једначину

$$2xyy' = 2y^2 + \sqrt{x^4 + y^4}.$$

250. Одредити опште решење диференцијалне једначине

$$y''' - y'' - y' + y = 16 \cosh x.$$

251. Израчунати  $\int_{C^+} \frac{e^{iz}}{z^2(2z^2 - 3iz + 2)} dz$  ако је  $C = \{z : |z| = 1\}$ .

252. Применом Лапласове трансформације решити једначину

$$y'' - 2y' + 2y = f(t), \quad f(t) = \begin{cases} \sin t - 2 \cos t, & 0 \leq t < \pi \\ 0, & \pi \leq t \end{cases}$$

за  $y(0) = 1$ ,  $y'(0) = 2$ .

**Фебруар, 2006.**

253. Коришћењем одговарајуће смене решити једначину

$$y' = 2 + \frac{y^2 - 4xy + 4x^2 + 4}{2y - 4x + 3}.$$

254. Одредити опште решење диференцијалне једначине

$$y'' + y = x \cos x.$$

255. Испитати диференцијабилност и аналитичност функције

$$f : z \mapsto ze^{i\bar{z}}.$$

256. Применом Лапласове трансформације решити систем једначина

$$x' + y = 0, \quad y' - 4x = \sin 2t.$$

**Фебруар, 2006.**

257. Решити диференцијалну једначину

$$(x^2 - \ln y)y' = xy.$$

258. Решити систем диференцијалних једначина

$$\frac{dx}{y + xz^2} = \frac{dy}{x + yz^2} = \frac{dz}{z^4 - 1}.$$

259. Одредити све реалне  $\phi$ -је  $\alpha(y)$  и  $\beta(y)$  за које је функција

$$f : x + iy \mapsto u(x, y) + iv(x, y),$$

где је

$$u(x, y) = (\cos x + \sin x)\alpha(y), \quad v(x, y) = (\cos x - \sin x)\beta(y),$$

свуда аналитичка.

**260.** Применом Лапласове трансформације решити интегралну једначину

$$y(t) + \int_0^t (y'''(x) + y''(x))e^{x-t} dx = e^t(2 \cos t + \sin t),$$

ако је  $y'(0) = y(0) = 0$ .

**Јун, 2006.**

**261.** Користећи одговарајућу смену решити диференцијалну једначину

$$y' + x = x^3 e^{-y}.$$

**262.** Одредити опште решење система диференцијалних једначина

$$\begin{aligned}x' &= -x - 5z \\y' &= x + y - z \\z' &= x + z\end{aligned}$$

**263.** Израчунати  $\int_{C^+} \frac{dz}{z(1 - e^{2z})}$  ако је  $C = \{z : |z| = \frac{3}{2}\pi\}$ .

**264.** Применом Лапласове трансформације одредити партикуларно решење једначине

$$y'' - 5y' + 6y = e^t \sin t,$$

за које је  $y(0) = 0, y'(0) = 1$ .

**Јун, 2006.**

**265.** За диференцијалну једначину

$$2xydx + (y^2 - 3x^2)dy = 0$$

одредити интеграциони фактор облика  $\lambda(y)$ , а затим решити једначину.

**266.** Решити парцијалну диференцијалну једначину

$$(x - y)u'_x + (x - z)u'_y + (z - y)u'_z = 0.$$

**267.** Одредити све аналитичке функције  $f : x + iy \rightarrow u(x, y) + iv(x, y)$  за које је

$$u(x, y) = (\cosh y - \sinh y) \cos x.$$

**268.** Применом Лапласове трансформације одредити партикуларно решење једначине

$$y''' - y'' - y' + y = 9e^{-2t}$$

ако је  $y(0) = y'(0) = 0$  и  $y''(0) = -1$ .

**Јун, 2006.**

**269.** Одредити решење диференцијалне једначине

$$yy'' = 2y'(y' + y^4)$$

за које је  $y(0) = 1$  и  $y'(0) = 2$ .

**270.** Одредити опште решење система диференцијалних једначина

$$\begin{aligned}x' &= x + 2y + z \\y' &= x - z \\z' &= 3x + 3y + 2z\end{aligned}$$

**271.** Израчунати  $\int_{C^+} \frac{\cos 2z}{z(z^2 + 1)} dz$  ако је  $C = \{z : |z| = \sqrt{2}\}$ .

**272.** Применом Лапласове трансформације одредити партикуларно решење једначине

$$y'' + 4y' + 4y = \cos 2t$$

ако је  $y(0) = y'(0) = 1$ .

**Јун, 2006.**

**273.** Одредити опште решење диференцијалне једначине

$$(y^2 \sin x - 1)dx + 2\frac{x}{y}dy = 0.$$

**274.** Решити парцијалну диференцијалну једначину

$$(-x + y + z)u'_x + (x - y + z)u'_y + (x + y - z)u'_z = u.$$

**275.** Одредити све аналитичке функције  $f : x + iy \rightarrow u(x, y) + iv(x, y)$  за које је

$$v(x, y) = -\sin 2y \sinh 2x.$$

**276.** Применом Лапласове трансформације одредити партикуларно решење једначине

$$y'' - 4y' + 5y = f(t), \quad f(t) = \begin{cases} 5, & 0 \leq t < 1 \\ 0, & 1 \leq t \end{cases}$$

за које је  $y(0) = 0$  и  $y'(0) = 0$ .

**Септембар, 2006.**

277. Решити диференцијалну једначину

$$xy' = y \cos \left( \ln \frac{y}{x} \right).$$

278. Одредити опште решење система диференцијалних једначина

$$\begin{aligned}x' &= -x - 2y + z \\y' &= 2x + 2y - z \\z' &= 2x + y\end{aligned}$$

279. Израчунати  $\int_{C^+} \frac{\sin iz}{\cosh z} dz$  ако је  $C = \{z : |z| = 2\}$ .

280. Применом Лапласове трансформације решити интегралну једначину

$$\int_0^t e^{t-x} (y''(x) + 4y(x)) dx = t$$

ако је  $y(0) = y'(0) = 0$ .

**Септембар, 2006.**

281. За диференцијалну једначину

$$(x \sin x + \sin y) dx + \cos y dy = 0$$

одредити интеграциони фактор облика  $\lambda(x)$ , а затим решити једначину.

282. Решити парцијалну диференцијалну једначину

$$x(\sqrt{y} - \sqrt{z})u'_x + y(\sqrt{z} - \sqrt{x})u'_y + z(\sqrt{x} - \sqrt{y})u'_z = 0.$$

283. Израчунати  $\int_{C^+} \frac{\cos z}{z(z-3i)^2} dz$  ако је  $C = \{z : |z| = \pi\}$ .

284. Применом Лапласове трансформације одредити партикуларно решење једначине

$$y''' - y'' - 2y' = U(t-3)$$

ако је  $y(0) = y''(0) = 1$  и  $y'(0) = -1$ .

**Септембар, 2006.**

285. Одредити опште решење диференцијалне једначине

$$y'^2 = y(y'' - 2y' \ln y)$$

за које је  $y(0) = y'(0) = 1$ .



**286.** Одредити опште решење система диференцијалних једначина

$$\begin{aligned}x' &= 3x - y + z \\y' &= -2x + 4y - 2z \\z' &= -2x + 2y\end{aligned}$$

**287.** Одредити све аналитичке функције  $f : x + iy \mapsto u(x, y) + iv(x, y)$  за које је

$$u(x, y) = (x \cos x - y \sin x)e^{-y}.$$

**288.** Применом Лапласове трансформације одредити партикуларно решење једначине

$$y'' + 3y' + 2y = te^{-t}$$

за које је  $y(0) = 0$  и  $y'(0) = 2$ .

**Јануар, 2007.**

**289.** Решити диференцијалну једначину

$$y' = \frac{2xy}{y - x^2 + 2y \ln y}.$$

**290.** Решити парцијалну диференцијалну једначину

$$z^2 y z'_x + z^2 x z'_y = (x - y)^2.$$

**291.** Одредити аналитичку функцију  $f : x + iy \mapsto u(x, y) + iv(x, y)$  такву да је  $f(0) = 0$  и

$$u(x, y) = x \operatorname{sh} x \cos y - y \operatorname{ch} x \sin y.$$

**292.** Применом Лапласове трансформације одредити опште решење система

$$\begin{aligned}x' - x + y &= \sin t \\y' - 2x + y &= 0.\end{aligned}$$

**Јануар, 2007.**

**293.** За диференцијалну једначину

$$(2x \sin y + 4 \sin^2 y) dx = (x^2 + 1) \cos y dy$$

одредити интеграциони фактор облика  $\lambda(y)$ , а затим решити једначину.

294. Одредити опште решење система диференцијалних једначина

$$\begin{aligned}x' &= y \\y' &= -5x + 2y \\z' &= x\end{aligned}$$

295. Израчунати  $\int_{C^-} \frac{\cosh z}{z(z+i)^2} dz$ , ако је  $C = \{z : |z| = 2\}$ .

296. Применом Лапласове трансформације решити једначину

$$y'' - y = t \sinh t$$

ако је  $y(0) = y'(0) = 0$ .

**Април, 2007.**

297. Решити диференцијалну једначину

$$(2\sqrt{xy} - y)dx = xdy.$$

298. Одредити опште решење диференцијалне једначине

$$y''' + y'' = xe^{-x}.$$

299. Израчунати  $\int_{C^-} \frac{dz}{(z^3 + z) \sin z}$ , ако је  $C = \{z : |z - i| = \sqrt{2}\}$ .

300. Применом Лапласове трансформације решити систем

$$\begin{aligned}x'' - 3x &= 4y \\y'' + y &= -x,\end{aligned}$$

ако је  $x(0) = y(0) = 0$  и  $x'(0) = y'(0) = 1$ .

**Април, 2007.**

301. Решити диференцијалну једначину

$$x^2 y' = xy + y^2 e^{-x/y}.$$

302. Решити парцијалну диференцијалну једначину

$$x(\ln^2 y - \ln^2 z)u'_x + y(\ln^2 z - \ln^2 x)u'_y + z(\ln^2 x - \ln^2 y)u'_z = 0.$$

303. Одредити све реалне  $\phi$ -је  $\alpha$  и  $\beta$ , такве да је  $\phi$ -ја

$$f : x + iy \mapsto \alpha(x)(e^{2y} + e^{-2y}) + i\beta(x)(e^{2y} - e^{-2y})$$

аналитичка на  $C$ .

**304.** Применом Лапласове трансформације одредити партикуларно решење једначине  $y'' + 4y = f(t)$  ако је

$$f(t) = \begin{cases} 2, & 0 \leq t < 1 \\ 0, & 1 \leq t \end{cases}$$

и  $y(0) = y'(0) = 1$ .

**Април, 2007.**

**305.** За диференцијалну једначину

$$\left(\frac{1-x}{y}\right) dx + \left(2xy + \frac{x}{y} + \frac{x^2}{y^2}\right) dy = 0,$$

одредити интеграциони фактор облика  $\lambda(x)$ , а затим решити једначину.

**306.** Одредити решење диференцијалне једначине

$$yy'' - 2yy' \ln y = y'^2$$

ако је  $y(0) = y'(0) = 1$ .

**307.** Испитати диференцијабилност и аналитичност  $\phi$ -је  $f : z \rightarrow z^3 \bar{z}$ .

**308.** Применом Лапласове трансформације решити систем

$$\begin{aligned} x'' + y' &= -x \\ y'' + x' &= 1, \end{aligned}$$

ако је  $x(0) = y(0) = 1$  и  $x'(0) = y'(0) = 0$ .

**Јуни, 2007.**

**309.** Решити диференцијалну једначину

$$(1+x^2)y' - 2xy = 2\sqrt{y(1+x^2)}.$$

**310.** Одредити опште решење система диференцијалних једначина

$$\begin{aligned} x' &= 2x - 2y \\ y' &= 2x \\ z' &= 2x - 2z \end{aligned}$$

**311.** Израчунати  $\int_{C^-} \frac{\cos z}{z^4 - z^2} dz$ , ако је  $C = \{z : |z - 1| = \sqrt{2}\}$ .

**312.** Применом Лапласове трансформације решити једначину

$$y(t) = \cos t + \int_0^t (t-x)y(x)dx.$$

**Јуни, 2007.**

**313.** Решити диференцијалну једначину

$$\left(\frac{1}{x} - \frac{y^2}{(x-y)^2}\right) dx + \left(\frac{x^2}{(x-y)^2} - \frac{1}{y}\right) dy = 0.$$

**314.** Решити парцијалну диференцијалну једначину

$$(x^2 - y^2 - z^2)z_x' + 2xyz_y' = 2xz.$$

**315.** Одредити све аналитичке функције  $f : x + iy \mapsto u(x, y) + iv(x, y)$ , такве да је

$$v(x, y) = \frac{x - y - 1}{x^2 + y^2 - 2x + 1}.$$

**316.** Применом Лапласове трансформације решити систем

$$\begin{aligned}x' &= 3x + 2y + 9e^t \\y' &= x + 2y + 9e^{4t}\end{aligned}$$

ако је  $x(0) = y(0) = 0$ .

**Септембар, 2007.**

**317.** За диференцијалну једначину

$$(2x \sin x - y \cot x)dx + (2y \sin x + 1)dy = 0$$

одредити интеграциони фактор облика  $\lambda(x)$ , а затим решити једначину.

**318.** Одредити опште решење једначине

$$y''' + y'' + 4y' + 4y = 100xe^x + 20 \cos 2x.$$

**319.** Израчунати  $\int_{C^+} \frac{e^{iz}}{(z^3 + z)^2} dz$ , ако је  $C = \left\{ z : |z + i| = \frac{3}{2} \right\}$

**320.** Применом Лапласове трансформације решити систем

$$\begin{aligned}x' - 5x + 4y &= 10 \cos t \\y' - 3y + 2x &= 10 \sin t\end{aligned}$$

ако је  $x(0) = y(0) = 0$ .

**Септембар, 2007.**

**321.** Решити диференцијалну једначину

$$x \cos^2 y dx + (x^2 + 1) dy = 0.$$

**322.** Одредити опште решење система диференцијалних једначина

$$\begin{aligned}x' &= -x - 2z \\y' &= -x + y - 3z \\z' &= x + z\end{aligned}$$

**323.** Одредити све аналитичке функције  $f : x + iy \mapsto u(x, y) + iv(x, y)$ , такве да је

$$u(x, y) = e^{2x}(x \cos 2y - y \sin 2y).$$

**324.** Применом Лапласове трансформације решити једначину

$$y''' - y'' + y' - y = e^{-t},$$

ако је  $y(0) = y'(0) = 1$ ,  $y''(0) = 0$ .

**Октобар, 2007.**

**325.** Решити диференцијалну једначину

$$2ye^{x^2}(y' + xy) = x \sin x.$$

**326.** Одредити опште решење система диференцијалних једначина

$$\begin{aligned}x' &= 2x + y + 3z \\y' &= -x + 2y \\z' &= -x + 2z\end{aligned}$$

**327.** Одредити све аналитичке функције  $f : x + iy \mapsto u(x, y) + iv(x, y)$ , такве да је

$$u(x, y) = \cosh(x + 1) \cos(y - 1).$$

**328.** Применом Лапласове трансформације решити једначину

$$y'' - 4y' + 3y = 2e^{2t} \cos t$$

ако је  $y(0) = 0$ ,  $y'(0) = 1$ .

**Октобар, 2007.**

**329.** За диференцијалну једначину

$$(x^3 - \sin^2 y)dx + (x^2y + x \sin 2y)dy = 0$$

одредити интеграциони фактор облика  $\lambda(x)$ , а затим решити једначину.

**330.** Одредити опште решење једначине

$$y''' - 2y'' + y' - 2y = xe^x - 5 \cos x.$$

**331.** Израчунати  $\int_{C^+} \frac{e^{\pi z}}{z(z-i)^3} dz$ , ако је  $C = \{z : |z| = \sqrt{2}\}$

**332.** Применом Лапласове трансформације решити систем

$$\begin{aligned}x' &= 2x - y + (1+t)e^t \\y' &= 2x + (1-t)e^t\end{aligned}$$

ако је  $x(0) = y(0) = 0$ .