ТЕОРИЈА СИСТЕМА

Основни појмови и дефиниције потребни за полагање усменог испита

„Теорија система“ Братислав Ј. Петровић:

<u>Глава 1</u>

1.3 Дефиниција 4
Дефиниција 5
Дефиниција 6
Појам стања
Параметризација простора

1.4 Дефиниција 1
(суштина услова узајамне и сопствене сагласности)
Дефиниција 4
Једначина прелаза стања
Једначина излаза

1.5 Последица 4
Пример 8

1.6 Дефиниција 1
Дефиниција 2
Дефиниција 3
Дефиниција 4

<u>Глава 2</u>

2.1 Блок дијаграми временски дискретних система

2.2 Веза између локалне и глобалне функције прелаза стања

2.3 Теорема 1
Дефиниција 3

2.4 Дефиниција 1
Дефиниција 2

2.5 Избор стања система помоћу модела система на аналогном рачунару
Путање (трајекторије) стања у фазном простору

Глава 3

3.1 (без функције одзива сложеног система)

3.2 Дефиниција 1
Дефиниција 2
Теорема 3
Дефиниција 4
Дефиниција 5
Дефиниција 6

3.4 Дефиниција 1
Поступак линеаризације – одређивање матрица F,G и H (пример 7)

Глава 4

4.1 Дефиниција 1
Дефиниција 2
Дефиниција 3
Дефиниција 4
Дефиниција 5
Дефиниција 11
Дефиниција 12

4.2 Дефиниција 1
Дефиниција 3
Теорема 9
Последица 10

4.4 Дефиниција1
Дефиниција 2
Последица 7
Теорема 8

Глава 5

5.3 Фундаментална матрица (израз 17)
Теорема 5

5.4 Замисао импулсног одзива (Диракова и Хевисајдова функција)

Глава 6

6.1 матрични експоненет
алгебарски еквивалентни стационарни системи

6.2 278,279 и 280 страна

6.3 Јорданова каноничка форма

6.4 Дефиниција Лапласове трансформације
Преносна функција и импулсни одзив

6.5 Мејсоново правило

Глава 7

7.1 Теорема 9

7.2 Теорема 1

7.3 Теорема 4
Последица 5

Глава 8

8.1 Дефиниција 1
Три различите врсте равнотеже

8.2 Теорема 1

8.3 Теорема 2
Последица 3
Теорема 4
Теорема 5

8.4 Теорема 6

Teorija sistema

skripta za usmeni deo ispita

by Marija &
Hijavata(prepravljena)

I glava

1.3

Definicija 4: Sistem ulaz-izlaz (U, i) određen je skupom ulaza U skupom izlaza Y i relacijom (ili pravilom ponašanja) sistema $\mathcal{R} \subset U \times Y$. Za bilo koji par (u, y) tako da je $u \in U$, $y \in Y$ i $(u, y) \in \mathcal{R}$ kažemo da je ulazno izlazni par sistema, gde je u ulaz, a y odgovarajući izlaz.

Definicija 5: Neka su U i Y skupovi ulaza i izlaza nekog ulazno-izlaznog sistema $\mathcal{R} \subset U \times Y$. Ako za svaki ulaz u iz cinjenice da je $(u, y_1) \in \mathcal{R}$, $(u, y_1) \in \mathcal{R}$ proističe da je $y_1 = y_2$, tada takav sistem ulaz-izlaz nazivamo sistem sa ulazno-izlaznim preslikavanjem(UIP). Preslikavanje $\varphi: U \to Y$ koje dodeljuje jedinstveni izlaz $y \in Y$ svakom ulazu $u \in U$ nazivamo preslikavanje ulaz-izlaz sistema.

Definicija 6: (Sistemi bez memorije) Neki sistem sa ulazno-izlaznim preslikavanjem(UIP) na skupu vremena T, sa skupom ulaza U, skupom izlaza Y je bez memorije ako postoji preslikavanje $\psi: T \times U \to Y$, tako da je (u, y) neki par ulaz-izlaz tada je:

$$y(t) = \psi(t, u(t)) \quad , t \in T$$

Pojam stanja: Stanje je sažeta predstava prethodnih ponašanja sistema, dovoljno potpuna da nam omogući da na osnovu ulaznih dejstava tačno predvidimo kakva će biti izlazna dejstva i promene samog stanja.

Parametrizacija prostora: Jedan način jedinstvenog povezivanja vrednosti y sa svakom vrednošću u je da se svakom paru ulaz – izlaz (u, y) pridruži neki parametar $x(t_0) \in X$ tako da y bude jednoznačno određeno vrednostima u i $x(t_0)$. Taj proces ćemo shvatiti kao parametrizaciju prostora parova ulaz-izlaz, a $x(t_0)$ cemo nazvati stanje $\mathcal{A}$u trenutku t_0. ($\mathcal{A}$ je apstraktni sistem, koji je model nekog fizičkog sistema).

1.4

Definicija 1: Neka prostor parova ulaz-izlaz modela $\mathcal{A}$ može da se parametrizuje u obliku jednačine

$$y(t) = A(\alpha, u_{t_0,t[}) \, \forall t > t_0, \forall t_0 \quad (1)$$

gde je A funkcija α i $u_{t_0,t}$, za t_0 i $t \in T$, $\alpha \in X$, a $u \in \mathcal{R}(u)$, $y \in \mathcal{R}(y)$ zadovoljavaju uslove uzajamne i sopstvene saglasnosti. Tada (1) zovemo jednačina ulaz-stanje-izlaz modela $\mathcal{A}$, X prostor stanja za $\mathcal{A}$, elemente X stanja apstraktnog sistema – modela $\mathcal{A}$, a α stanje $\mathcal{A}$ u trenutku t_0.

Definicija 4: (sistem ulaz-izlaz-stanje) Neka je T skup trenutaka vremena i U, Y, X skupovi funkcija vremena određenih na T. Elementi skupa U su ulazi , elementi skupa Y su izlazi i elementi skupa X su stanja. Tada je neki sistem ulaz-izlaz-stanje određen podskupom $\mathcal{R} \subset U \times X \times Y$ koji se naziva relacija(ili pravilo ponašanja) sistema, koji ima sledeću osobinu:

Pretpostavimo da $(u', x', y') \in \mathcal{R}$ i $(u'', x'', y'') \in \mathcal{R}$ tako da je $x'(t_0) = x''(t_0)$ za neko $t_0 \in T$. Tada je zadovoljeno sledeće:

- ✓ Saglasnost stanja: Neka su ulazi, izlazi i stanja

$$u(\tau)=\begin{cases}u'(\tau),\tau<t\\u''(\tau),\tau\geq t\end{cases}\qquad y(\tau)=\begin{cases}y'(\tau),\tau<t\\y''(\tau),\tau\geq t\end{cases}\qquad x(\tau)=\begin{cases}x'(\tau),\tau<t\\x''(\tau),\tau\geq t\end{cases}$$

za t_0 i $t \in T$. Tada ako vazi $x'(t_0)=x''(t_0)$ u, x, y obrazuju trojku ulaz-izlaz-stanje, tj. $(u, x, y)\in \mathcal{R}$.

- ✓ Kauzalnost: Ako je $u'(\tau)=u''(\tau)$ $t_0 \leq \tau < t$, t_0, τ i $t \in T$ tada ako je zadovoljeno $x'(t_0)=x''(t_0)$ biće

$$x'(\tau)=x''(\tau), t_0 \leq \tau < t$$

$$y'(\tau)=y''(\tau), t_0 \leq \tau < t$$

za t_0, τ i $t \in T$.

Jednačina prelaza stanja: $x(t)=\Phi(t, t_0, x(t_0), u_{t_0,t}), t> t$

Jednačina izlaza: $y(t)=\eta(x(t), u(t), t)$

[J-na prelaza stanja : $\dot{x}(t)=f\big(t, x(t), u(t)\big)$]
[j-na izlaza : $y(t)=(t, x(t), u(t))$]

1.5

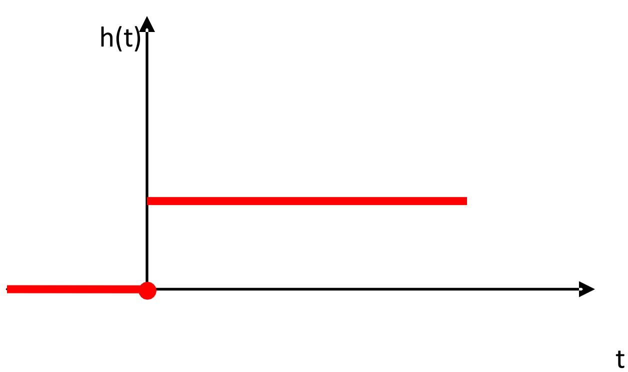
Posledica 4: Ako sistem A može da se opise osnovnom jednačinom prelaza stanja i izlaza

$$\frac{dx(t)}{dt}=f\,(x(t), u(t), t) \qquad (1)$$

$$y\ t\ =\eta(x(t), u(t), t),$$

gde su funkcije f i η tako određene na $T\times X\times U$ da (1) ima jedinstveno rešenje po $x(t)$, tada je $x(t)$stanje sistema $\mathcal{A}$ u trenutku t.

Primer 8: Verovatno je najpoznatija funkcija neprekidna sa leva , koja nije neprekidna, Hevisajdova funkcija $h(t)$(jedinična odskočna funkcija) koja je deo po deo konstantna, sa jediničnim skokom u $t=0$ kao što je prikazano na slici:



$$h(t)=\begin{cases}1, & t>0\\0, & t\leq 0\end{cases}$$

Napomena: drugačije definisana odskočna funkcija koja ima vrednost 1 za $t \geq 0$ i 0 u ostalim tačkama, nije neprekidna sa leva već sa desna.

1.6

Definicija 1: Operator pomeranja svakoj funkciji f pridružuje vremenski pomerenu funkciju $z^{-\tau}$ koja je definisana osobinom

$$(z^{-\tau}f)t \triangleq f(t-\tau), \forall t, \tau \text{ u domenu funkcije } f$$

Definicija 2: Posmatrajmo sistem ulaz-izlaz u diskretnom ili neprekidnom vremenu T. Sistem je vremenski nepromenljiv ako za svaki par ulaz-izlaz (u, y) i vremenski pomeren par$(z^{-\tau}u, z^{-\tau}y)$ je par ulaz-izlaz sistema za bilo koje dopustivo kašnjenje $\tau \in T$.

Definicija 3: Sistem sa ulazno izlaznim preslikavanjem i bez pamćenja , opisan preslikavanjem ulaz-izlaz

$$y(t) = \psi(t, u(t)), t \in T$$

je vremeski nepromenljiv ako i samo ako je $\psi(t_1, u) = \psi(t_2, u)$za sve trenutke $t_1, t_2 \in T$ i sva dopustiva upravljanja $u \in \Omega$.

Definicija 4: Sistem ulaz-izlaz-stanje opisan relacijom $\mathcal{R} \subset U \times X \times Y$ određen na skupu vremena T je vremenski nepromenljiv ako je $\mathcal{R}$ invarijantna na vremensko pomeranje, tj. ako je$(u, x, y) \in \mathcal{R}$, tada je i$(z^{-\tau}u, z^{-\tau}x, z^{-\tau}y) \in \mathcal{R}$ za bilo koje dopustivo vremensko kašnjenje $\tau \in T$.

II glava

2.1

Blok dijagrami vremenski diskretnih sistema: Sastoje se od blokova jediničnih kasnjenja, množenja konstantom i sabirača, a koji je opisan osnovnim jednačinama dinamike stanja u obliku

$$x(n+1) = F(n)x(n) + G(n)u(n)$$
$$y(n) = H(n)x(n)$$

gde su $F(n)$, $G(n)$, $H(n)$matrice odgovarajućih dimenzija.

2.2

Veza između lokalne i globalne funkcije prelaza stanja: Izvod globalne funkcije je jednak lokalnoj funkciji:

$$f(t, x(t), u(t)) = \frac{d}{dt}\phi(t, t_0, x(t_0), u(t))$$

2.3

Teorema 1:

Neka je X vektorski prostor na nekom polju K, i neka je A bilo koji skup. Neka je X^{A} skup svih funkcija iz A u X. Tada, ako definisemo sabiranje funkcija sa

$$(\mathrm{f}+\mathrm{f}')\mathrm{a} \triangleq \mathrm{f}(\mathrm{a})+\mathrm{f}'(\mathrm{a}), \forall \mathrm{a} \in \mathrm{A}$$

i množenje funkcija skalarom sa

$$[\mathrm{kf}](\mathrm{a}) \triangleq \mathrm{k}[\mathrm{f}(\mathrm{a})], \forall \mathrm{a} \in \mathrm{A}$$

tada je i sam X^{A} sa tim operacijama, vektorski prostor na K.

Definicija 3: Skup $\{x_\alpha\}_{\alpha\epsilon A}$ vektora u vektorskom prostoru X naziva se bazis ako je linearno nezavisan i ako je maksimalan u skupu $\{\mathrm{x}\} \cup \{x_\alpha\}_{\alpha\epsilon A}$ koji nije linearno nezavisan za neki različit vector x iz X koji ne pripada mnoštvu $\{x_\alpha\}_{\alpha\epsilon A}$

2.4

Definicija 1: Metrički prostor X, d je skup X sa funkcijom $d: \mathrm{X} \times \mathrm{X} \rightarrow \mathrm{R}$ koja dodeljuje svakom paru elemenata a i b iz X neki broj $\mathrm{d}\ \mathrm{a}, \mathrm{b}\ \geq 0$ koji ima osobine:

1. $\mathrm{d}(\mathrm{a}, \mathrm{b}) = 0$ akko je $\mathrm{a} = \mathrm{b}$
2. $\mathrm{d}(\mathrm{a}, \mathrm{b}) = \mathrm{d}(\mathrm{b}, \mathrm{a})$ (simetrija)
3. $\mathrm{d}(\mathrm{a}, \mathrm{b}) = \mathrm{d}(\mathrm{a}, \mathrm{c}) + \mathrm{d}(\mathrm{c}, \mathrm{b})$ (nejednakost trougla)

$\mathrm{d}(\mathrm{a}, \mathrm{b})$zovemo rastojanje između a i b, a d metrika ili funkcija rastojanja.

Definicija 2: Neki vektorski prostor X nad kompleksnim ili realnim poljem naziva se normalni linearni prostor ako postoji preslikavanje $\ .\ : \mathrm{X} \rightarrow \mathrm{R}_+$ koje se naziva norma, a koje zadovoljava tri uslova:

1. $||\mathrm{x}|| = 0$ akko $\mathrm{x} = 0$, nula vektor
2. $||\alpha\mathrm{x}|| = |\alpha|\ ||\mathrm{x}||$ za sve $\mathrm{x} \in \mathrm{X}$i sve $\alpha \in \mathrm{K}$
3. $||\mathrm{x}+\mathrm{y}|| \leq ||\mathrm{x}|| + ||\mathrm{y}||$ za sve x, y $\in \mathrm{X}$

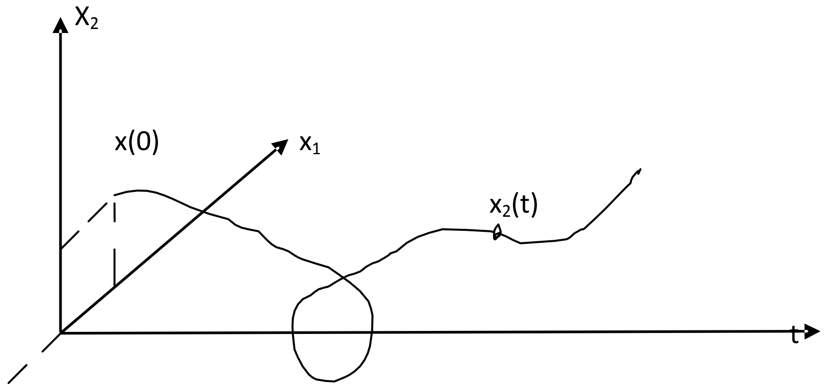
2.5

Izbor stanja sistema pomoću modela sistema na analognom računaru : Pri simulaciji sistema na analognim računarima, kada "rešavamo" diferencijalnu jednačinu koja opisuje ulazno-izlazno ponašanje sistema

$$h\left(y, y', \dots, y^{(m)}\right) = g\left(u, u', \dots, u^{(n)}\right)$$

izvod najvišeg reda $y^{(m)}$ određuje se preko izvoda najvišeg reda od u i y korišćenjem raspoloživih elemenata analognih računara (integratori, sabirači, konstante, množači, itd..). Zatim se iz analognih modela mogu dobiti različite predstave modela sistema korišćenjem različitih promenljivih stanja.

Putanje(trajektorije) stanja u faznom prostoru : (Pogledati sisteme iz primera 1 i 2 na 94. i 95. strani) U oba slučaja prostor stanja X je dvodimenzionalan, sa koordinatama stanja polozajem x_1 i brzinom x_2, te se $x\ t$ može nacrtati u zavisnosti od vremena t u 3-dimenzionalnom prostoru $X \times T$, kao na slici:



Gledajudi duz t-ose, možemo projektovati krivu $x(\ t)$na X ravan da bi odredili fazni portret ili trajektoriju(putanju) kretanja $x(\ t)$. X se naziva fazna ravan, a trajektorije mogu da se crtaju kao krive koristedi t kao parametar.

III glava

3.1

3.2

Definicija 1: Ako je preslikavanje $L: V \to W$ i aditivno i homogeno kaže se da je L linearno preslikavanje ili da je ono linearna transformacija iz V u W.

Definicije linearnog preslikavanja:

1. L je linearno preslikavanje akko je
$$L(av_1 + av_2) = aL(v_1) + bL(v_2)$$
za sva $v_1, v_2 \in V$ i sve skalare a

2. L je linearno preslikavanje akko je

$$L(k(v_1 - v_2)) = kL(v_1) - kL(v_2)$$

za sva $v_1, v_2 \in V$ i sve skalare k.

Definicija 2: Sistem$(T, U, Y, X, \Omega, \Phi, \eta)$je linearan sistem ako

1. U, Y, X i Ω su vektorski prostori nad istim poljem K;
2. Za bilo koje trenutke t_0, t_1 iz T preslikavanja

$$\Phi(t_1, t_0, \ldots) : X \times \Omega \to Y$$
i
$$\eta(t_1, \ldots) : X \to Y$$

su linearna.

Teorema 3: Odziv linearnog sistema je zbir odziva iz nultog stanja i odziva na nulto ulazno dejstvo:

$$\delta(t_1, t_0, (x, u)) = \delta(t_1, t_0, (0, u) + (x, 0)) = \delta(t_1, t_0, 0, u) + \delta(t_1, t_0, x, 0)$$

Definicija 3: Kaže se da je sistem linearan iz nultog stanja ako je preslikavanje $\delta(t_1, t_0, 0, \cdot): \Omega \to Y$ linearno preslikavanje za svako $t_1, t_0 \in T$ dok ćemo neki sistem zvati linearan na nulto ulazno dejstvo

ako je preslikavanje $\delta(t_1, t_0, \cdot, u): \Omega \to Y$ linearno preslikavanje za svako $t_1, t_0 \in T$.

Definicija 4: Neka je U skup ulaza, a Y skup izlaza nekog sistema ulaz-izlaz koji je opisan pravilom $\mathcal{R} \subset U \times Y$. Sistem ulaz-izlaz je linearan ako su U i Y linearni prostori i $\mathcal{R}$ je podprostor $U \times Y$. Po definiciji, $\mathcal{R}$ je podprostor ako ima osobinu da ako su (u_1, y_1) i (u_2, y_2) bilo koja dva ulazno-izlazna para, linearna kombinacija $(\alpha u_1 + \beta u_2, \alpha y_1 + \beta y_2)$je takođe ulazno-izlazni par za proizvoljne skalare α i β.

Definicija 5: Sistem sa skupom ulaza U, skupom izlaza Y i ulazno-izlaznim preslikavanjem $\Psi: U \to Y$ je linearan akko su U i Y linearni prostori a Ψ je linearno preslikavanje, tj.

$$\Psi(\alpha u_1 + \beta u_2) = \alpha\Psi(u_1) + \beta\Psi(u_2)$$

za svako $u_1, u_2 \in U$ i sve skalare α i β.

Definicija 6: Sistem ulaz-izlaz –stanje opisan relacijom $\mathcal{R} \subset U \times X \times Y$ je linearan ako su U, X, Y linearni prostori i $\mathcal{R}$ je linearan potprostor.

3.4

Definicija 1: Vremeski – diskretan sistem je linearan ako su njegovi prostori ulaza U, izlaza Y i prostora stanja X vektorski prostori, i ako postoje, za svaki trenutak vremena $k \in Z$, tri linearne transformacije

$$F(k): X \to X$$

$$G(k): U \to X$$

$$H(k): X \to Y$$

tako da su prelazi stanja i izlazi dati jednačinama

$$x\ k+1\ = F\ k\ x\ k\ + G\ k\ u\ k$$

$$y\ k\ = H\ k\ x\ k$$

Postupak linearizacije – određivanje matrica F, G i H (primer 7) : (strana143-144)

IV glava

4.1

Definicija 1: Neki par $(\tau, \bar{x})$, koji se sastoji iz trenutka vremena τ i stanja $\bar{x}$, nazivademo događaj.

Definicija 2: Neki događaj (τ, x)je dostižljiv iz nultog stanja akko postoji neki trenutak $s \leq \tau$ i upravljanje $u \in \Omega$, tako da je $x = \Phi(\tau, s, 0_x, u)$.

Drugačije rečeno, neki događaj je dostižljiv ako je moguće da bude u nultom stanju u nekom ranijem trenutku s i da bude preveden pomoću odgovarajućeg izbora ulaza u u željeno stanje x u željenom trenutku vremena τ.

Definicija 3: Kažemo da je neki sistem potpuno dostižljiv u trenutku τ akko je svaki događaj $(\tau, \bar{x})$ dostižljiv u trenutku τ.

Definicija 4: Kažemo da je neki događaj $(\tau, \bar{x})$, upravljiv u odnosu na nulto stanje 0_x akko postoji takav trenutak $t \geq \tau$ i takvo ulazno dejstvo $u \in \Omega$ tako da je $0_x = \Phi(t, \tau, \bar{x}, u)$.

Definicija 5: Neki sistem zvaćemo potpuno upravljiv u trenutku τ ako i samo ako je svaki događaj $(\tau, \bar{x})$, upravljiv u trenutku τ.

Definicija 11: Sistem $\sum$ je osmotriv u trenutku τ akko je svaki događaj $(\tau, \bar{x})$ osmotriv za dato τ.

Definicija 12: Sistem $\sum$ je saglediv u trenutku τ akko je svaki događaj $(\tau, \bar{x})$ saglediv za dato τ.

4.2

Definicija 1:Neki sistem je dostižljiv iz stanja $x_0 \in X$ ako i samo ako je svako stanje sistema dostizljivo iz x_0, tj. ako za svako stanje $x \in X$ postoji bar jedan niz ulaza $\omega \in U^*$ tako da je:

$$\Phi(x_0, \omega\ ) = \hat{x}$$

Definicija 3:Neki sistem je osmotriv ako za svaki par različitih stanja x i x postoji bar jedan niz ulaznih dejstava na koji ona daju različite odzive, tj. postoji $\omega \in U^*$ tako da je

$$\mathcal{s}_{\hat{x}}(\omega) \neq \mathcal{s}_{\tilde{x}}(\omega)$$

Teorema 9: Sistem n-tog reda $(F, G): x(k+1) = F(k)x(k) + G(k)u(k)$ je upravljiv ako i samo ako je

$$\mathcal{R}\ (F^n) \subset \mathcal{R}\ [F^{n-1}G| \dots |G]$$

Posledica 10: Diskretnom sistemu je "lakše" da bude upravljiv, nego dostižljiv:

$$\left.\begin{array}{ll} 1. & (F, G) \text{je dostižljiv} \Rightarrow F, G \text{ je upravljiv} \\ 2. & (F, G) \text{je upravljiv} \\ & \quad\quad \text{i} \\ & F \text{ je invertibilna} \end{array}\right\} \Rightarrow F, G \text{ je dostižljiv.}$$

4.4

Definicija 1: Dva stanja x i x sistema $\sum$ su k-nerazlučiva (nerazlična) sto pisemo $x \sim_k x$ ako i samo ako je $\mathcal{s}_{\bar{x}}(\omega) = \mathcal{s}_{\hat{x}}(\omega)$ za sve nizove ulaza ω dužine najviše k.
Dva stanja $\bar{x}$ I $\hat{x}$ sistema Σ su nerazluciva, sto pisemo $\bar{x} \sim \hat{x}$ akko je $\mathcal{s}_{\bar{x}}(\omega) = \mathcal{s}_{\hat{x}}(\omega)$ za sve nizove ulaza ω. Kada stanja $\bar{x}$ I $\hat{x}$ nisu nerazluciva kaze se das u ona razluciva I pisemo $\bar{x} \nsim \hat{x}$ da bi oznacili njihovu nerazlucivost.

Definicija 2: Linearnom sistemu(F, G, H)je dualan linearan sistem (F^*, G^*, H^*) sa vektorom stanja p, ulazom ω i izlazom v opisan jednačinama

$$P(k+1) = F^*p(k) + H^*\omega(k)$$

$$v(k) = G^*p(k)$$

Posledica 7: Linearan sistem (F, G, H) reda n je osmotriv ako i samo ako je

$$\text{rang}\ ([\ H^*\ \ F^*H^* \dots (F^*)^{n-1}H^*]) = n$$

Teorema 8 (Teorema dualnosti): Sistem(F, G, H) je osmotriv (dostižljiv) ako i samo ako je njegov dualni sistem (F^*, G^*, H^*)dostižljiv (osmotriv.)

V glava

5.3

Fundamentalna matrica (izraz 17) : $\Phi\ t, t_0\ = W\ t\ * W^{-1}\ t\ , \quad \forall t, t_0$

Zamisao impulsnog odziva(Dirakova i Hevisajdova funkcija) : Prema ovoj ideji, u teoriji sistema se ulazno dejstvo na malom intervalu vremena aproksimira pojednostavljenim ulazim dejstvom u jednom trenutku. Posmatrajmo sistem sa jednodimenzionalnim prostorom ulaza. Sa δ(ε) oznacicemo ε-impuls, koji je ulazna funkcija prikazana na slici

i zadata jednacinom : $\delta(\varepsilon) = \begin{cases} \frac{1}{\varepsilon}\ ako\ je\ 0 \le t \le \varepsilon, \\ 0 \end{cases}$

zamisljamo da je ε mali broj. Na sistem delujemo nenultim ulazom samo na kratkom intervalu vremena duzine ε koji pocinje u trenutju 0, na takav nacin da je njegova energija konacna i ukupni integral primenjenog impulsa jednak 1.

Vl glava

6.1

Matrični eksponent (ne znam sta treba iz knjige, ali evo formule) :

$$e^A = I + \sum_{k=1}^{\propto} \frac{A^k}{k!}$$

A

Algebarski ekvivalentni stacionarni sistemi: Stacionarne linearne sisteme predstavljene sa $(\mathrm{F}, \mathrm{G}, \mathrm{H})$i $(\bar{F}, \bar{G}, \bar{H})$ zvademo algebarski ekvivalentnim ako postoji konstantna invertibilna matrica P tako da $\mathrm{x} = \mathrm{P} * \bar{x}$ povezuje njihova stanja x i $\bar{x}$. Pri tom važi:

$$\bar{F} = \mathrm{P}^{-1}\mathrm{FP}$$

$$\bar{G} = \mathrm{P}^{-1}\mathrm{G}$$

$$\bar{H} = \mathrm{HP}$$

6.2

Uslovi pri kojima mozemo da odredimo konstantnu slicnu transformaciju P tako da zamenom promenljivih : $x = P\bar{x}$ opis sistema

$$(F, G, H): \dot{x} = Fx + Gu$$
$$y = Hx \qquad (1)$$

Promenimo u ekvivalentan opis :

$$(\bar{F}, \bar{G}, \bar{H}): \dot{\bar{x}} = \bar{F}\bar{x} + \bar{G}u$$
$$y = \bar{H}\bar{x}$$

Tako da je F dijagonalna matrica. Pri konstantnoj slicnoj transformaciji P jednacine (1) su :

$$\bar{x} = P^{-1}FP\bar{x} + P^{-1}Gu$$
$$y = HP\bar{x}$$

Tako da je $\bar{F} = P^{-1}FP, \bar{G} = P^{-1}G, \bar{H} = HP \ i \ \bar{x}(0) = P^{-1}x(0)$

$P^{-1}FP = \bar{F} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix}$ odnosno da je FP=P$\bar{F}$

Definicija 1 : Neka je A : X→X linearna transformacija prostora X u prostor X. Kaze se da je nenulti vektor v iz x svojstveni vektor ako postoji skalar λ tako da je

$$\mathrm{A}v=\lambda v \qquad (1)$$

Ako je λ svojstvena vrednost A tada :

$$(\lambda I - A) = \lambda v - Av = 0$$

ima nenulto resenje, gde je I identicna transformacija na X.

λ je svojstvena vrednost A akko det($\lambda I - A$)=0

$$\det\begin{bmatrix} \lambda_1 - a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & \lambda_2 - a_{22} & \cdots & -a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & \lambda_n - a_{nn} \end{bmatrix} \triangleq X_A(\lambda)$$

je polinom oblika: $X_A(\lambda)$=$\lambda^n + \alpha_1\lambda^{n-1} + \cdots + \alpha_n$ stepena n sa koeficijentom 1 uz clan najviseg reda.

$X_A(\lambda)$ – karakteristicni polinom

6.3

Jordanova kanonička forma:

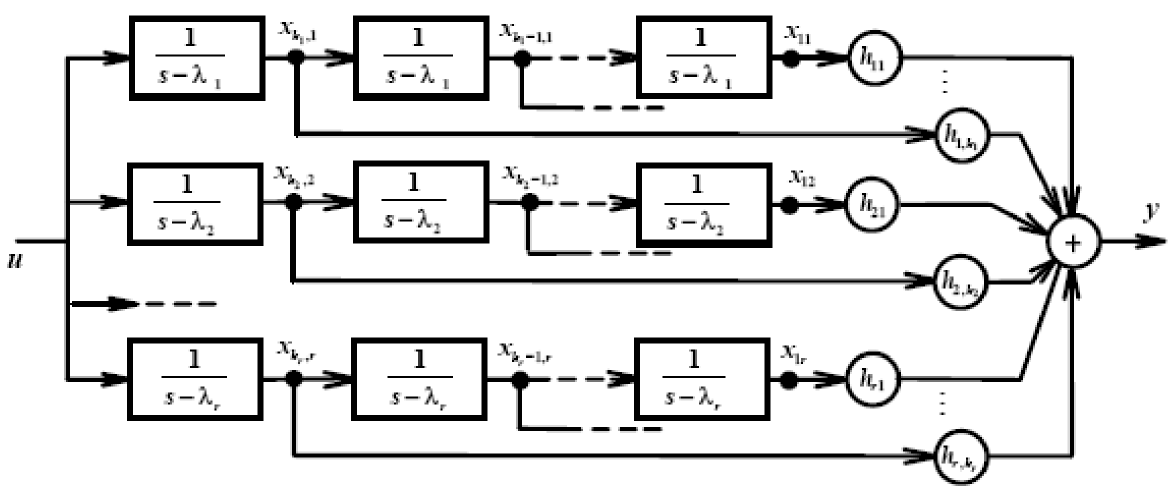
Са овако изабраним променљивима стања сваки вишеструки пол $\dfrac{1}{(s-\lambda)^k}$ одговара $k \times k$ Јордан-овом блоку:

$$\boxed{J_k(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda \end{bmatrix}_{k\times k}} \qquad (1)$$

Дакле, ако $G(s)$ има развој на парцијалне разломке

$$\boxed{\begin{aligned} G(s) = {} & \frac{h_{11}}{(s-\lambda_1)^{k_1}} + \frac{h_{12}}{(s-\lambda_1)^{k_1-1}} + \cdots + \frac{h_{1,k_1}}{(s-\lambda_1)} \\ & + \frac{h_{21}}{(s-\lambda_2)^{k_2}} + \frac{h_{22}}{(s-\lambda_2)^{k_2-1}} + \cdots + \frac{h_{2,k_2}}{(s-\lambda_2)} + \cdots \\ & + \frac{h_{r,1}}{(s-\lambda_r)^{k_r}} + \frac{h_{r,2}}{(s-\lambda_r)^{k_r-1}} + \cdots + \frac{h_{r,k_r}}{(s-\lambda_r)} \end{aligned}} \qquad (2)$$

који одговарају половима $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r$ вишеструкости $k_1, k_2, \dots, k_r$ добија се реализација приказана на слици 6-7:



Слика 6-7 Јорданова канонична реализација

$$x_N = \begin{bmatrix} x_{11} \\ \vdots \\ x_{k_1,1} \\ \hdashline x_{12} \\ \vdots \\ x_{k_2,2} \\ \hdashline \vdots \\ \hdashline x_{1r} \\ \vdots \\ x_{k_r,r} \end{bmatrix} \begin{matrix} \left.\vphantom{\begin{matrix} x \\ \vdots \\ x \end{matrix}}\right\} k_1 \\ \left.\vphantom{\begin{matrix} x \\ \vdots \\ x \end{matrix}}\right\} k_2 \\ \vdots \\ \left.\vphantom{\begin{matrix} x \\ \vdots \\ x \end{matrix}}\right\} k_r \end{matrix}$$

одговара матрична представа $\left(F_N, G_N, H_N\right)$ где је

$$F_N = \begin{bmatrix} J_{k_1}(\lambda_1) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & J_{k_2}(\lambda_2) & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & J_{k_r}(\lambda_r) \end{bmatrix} \begin{matrix} \}k_1 \\ \}k_2 \\ \\ \}k_r \end{matrix} \qquad G_N = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \hdashline 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \hdashline \vdots \\ \hdashline 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} \left.\vphantom{\begin{matrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{matrix}}\right\} k_1 \\ \left.\vphantom{\begin{matrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{matrix}}\right\} k_2 \\ \vdots \\ \left.\vphantom{\begin{matrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{matrix}}\right\} k_r \end{matrix}$$

$$H_N = \left[\underbrace{h_{11} \quad h_{12} \quad \cdots \quad h_{1k}}_{k_1} \;\vdots\; \cdots \;\vdots\; \underbrace{h_{r1} \quad \cdots \quad h_{r,k_r}}_{k_r} \right] \tag{3}$$

6.4

Definicija Laplasove transformacije:

$$F(s) = \int_{0-}^{\propto} f(t)e^{-st}dt$$

F(s) u ovoj jednačini nazivamo jednostana Laplasova transformacija funkcije f(t) i označavamo F(s)= L $\{(f(t))\}$ a $f(t)$= $L^{-1}\{(F(s))\}$ je inverzna Laplasova transformacija.

Prenosna funkcija i impulsni odziv: (mislim da treba samo ovo)

G(s) =$H(sI - F)^{-1}G$- prenosna funkcija stacionarnog linearnog sistema (F, G, H)

g(t)= $L^{-1}\{G(s)\}$ $ili\ g(t) = He^{Ft}G\ za\ t > 0$ -impulsni odziv stacionarnog linearnog sistema (F, G,H)

6.5

Мејсоново правило (*Mason*): Укупно појачање од улаза u до излаза y је

$$G(s) = \frac{1}{\Delta}\sum_{k=1}^{N} G_k\ \Delta_k$$

где је Δ детерминанта графа (карактеристична функција графа)

$$\Delta = 1-(-1)^{k+1}\sum_k\sum_j G_{jk} = 1-\sum_j G_{j1}+\sum_j G_{j2}-\sum_j G_{j3}+\cdots$$

при чему је

$\sum_j G_{j1}$ збир појачања свих затворених путања графа,

$\sum_j G_{j2}$ збир производа појачања свих могућих комбинација од по две затворене путање које се међусобно не додирују,

$\sum_j G_{j3}$ збир производа појачања свих могућих комбинација од по три затворене путање које се међусобно не додирују,

. . . итд.

G_k је појачање k-те директне путање од улазног до излазног чвора, а N је број директних путања.

Δ_k се добија као и Δ али само за део графа који не додирује k-ту директну путању.

VII glava

7.1

Teorema 9: Sistem sa jednim ulazom F, g je upravljiv ako i samo ako u prenosnoj funkciji u odnosu na stanje $G_x(s) = (sI - F)^{-1}G$ nema skracivanja nula i polova.

7.2

Teorema 1: Vremenski neprekidan, vremenski invarijantan linearan sistem

$$\dot{x}(t) \;= \mathrm{Fx(t)+ Gu(t)}$$

sa prostorom stanja reda n je potpuno upravljiv ako i samo ako je

$$\mathrm{rang}(\;[\;G|\;\;FG|\ldots\;|F^{n-1}G])= n$$

7.3

Teorema 4 (Dualnost): Vremenski neprekidan linearan sistem ∑ je osmotriv na $[t_0, t_1]$ ako I samo ako je njegov dualni system Σ_D upravljiv na $[t_0, t_1]$.
Posledica 5: Linearan sistem je upravljiv ako i samo ako je njegov dualni sistem osmotriv.

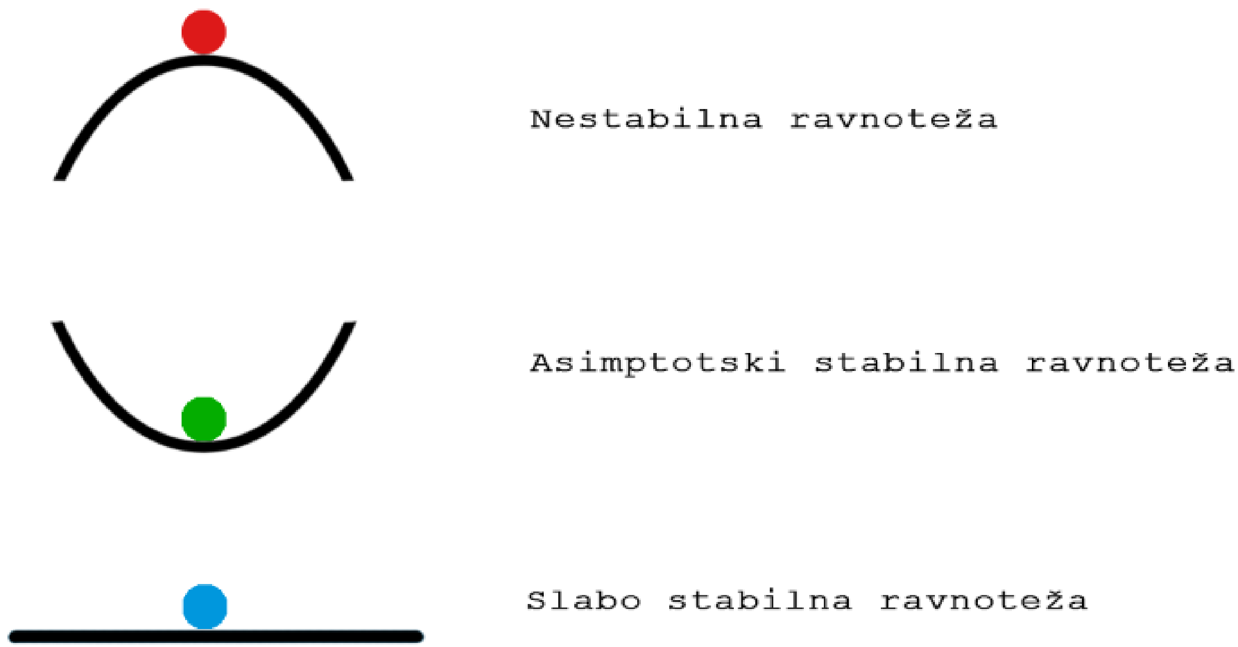
VIII glava

8.1

Definicija 1: Za neki (linearan ili nelinearan) sistem sa funkcijom prelaza stanja Φ kažemo da je X^e ravnotežno stanje ako se ne menja pri nultom ulaznom dejstvu 0, tj.

$$X^e = \phi(t, t_0, x^e, 0) za\ sve\ t_1 > t_0$$

Tri razlicite vrste ravnoteže:



8.2

Teorema 1: Stacionaran linearan, vremenski neprekidan sistem je asimptotski stabilan – u smislu da $x(t) \to 0$ kada $t \to \infty$ za bilo koje $x(0)$ i nulto ulazno dejstvo za $t \geq 0_-$ ako i samo ako su svi realni delovi svojstvenih vrednosti matrice F negativni. Stacionarni linearan, vremenski diskretan sistem je asimptotski stabilan ako i samo ako su sve svojstvene vrednosti matrice F po modulu manje od 1.

8.3

Teorema 2: Linearan sistem sa impulsnim odzivom $g(t, \tau)$ je OUOI stabilan ako i samo ako postoji broj M_g da je

$$\int_{-\infty}^{t} \|g(t,\xi)\| d\xi \leq M_g \; sa \; svako \; t$$

Posledica 3: Stacionaran linearan sistem sa impulsnim odzivom $g(\tau)$ je OUOI stabilan ako i samo ako postoji broj M_g da je

$$\int_{-\infty}^{t} \|g(t\tau)\| d\tau \leq M_g \; sa \; svako \; \tau$$

Teorema 4: Stacionaran , vremenski neprekidan, konacno dimenzionalan, linearan sistem F, G, H je OUOI stabilan ako i samo ako prenosna funkcija sistema

$$W(s) = H(sI - F)^{-1} G$$

ima sve polove u otvorenoj levoj poluravni s-ravni.

Teorema 5: Ako je sistem F, G, H asiptotski stabilan , on je i OUOI stabilan. Ako je F, G, H OUOI stabilan i upravljiv i osmotriv, tada je on i asimptotski stabilan.

8.4

Teorema 6 (Teorema Ljapunove stabilnosti) : Neka $\dot{x} = f(x)$ ima ravnoteznu tacku 0, tj neka je f(0)=0. Neka je neki S podskup iz X koji sadrzi 0, na kome je definisana funkcija V: S→R koja ima neprekidne parcijalne izvode, tako da je V(0)=0 I V(x)>0 za x≠0. Tada:

1.Ako je $\frac{d}{dt} V\big(x(t)\big) \leq 0$ za bilo koje resenje $x(t)$ jednacine $\dot{x} = f(x)$ tada je koordinatni početak slabo stabilna ravnotežna tačka.

2.Ako je $\frac{d}{dt} V\big(x(t)\big) < 0$ za $x(t)$ sasvim blizu 0, tada je koordinatni početak asimptotski stabilna ravnotežna tačka.

3.Ako je $\frac{d}{dt} V\big(x(t)\big) > 0$ za $x(t)$ sasvim blizu 0, tada je koordinatni početak asimptotski nestabilna ravnotežna tačka.

Usmeni 2013(teorija sistema) - sa vežbi

Laplasova transformacija:

$$F(s) = L\{f(t)\} = \int_{0^-}^{\infty} f(t)e^{-st}\,dt$$

Oblast je jednostrana (kreće od nula).

0^- - približavamo se nuli sa leve strane, jer proučavamo kauzalne sisteme.

- Diferencijalna jednačina $\xrightarrow{L(laplas)}$ algebarska jednačina
  $t\epsilon R$ s domen(kompleksni domen)
  vremenski domen $\downarrow$

  Resenje dif. Jednačine $\xleftarrow{L^{-1}}$ rešenje algebarske jednačine
  (u t domenu) (u s domenu)

Hevisajdova funkcija(jedinična odskočna funkcija)

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{t\to 0-} h(t) = 0 \\ \\ \lim\limits_{t\to 0+} h(t) = 1 \end{array}\right\} \text{U tački } t = 0 \text{ postoji prekid } \mathbf{i} \text{ vrste}$$

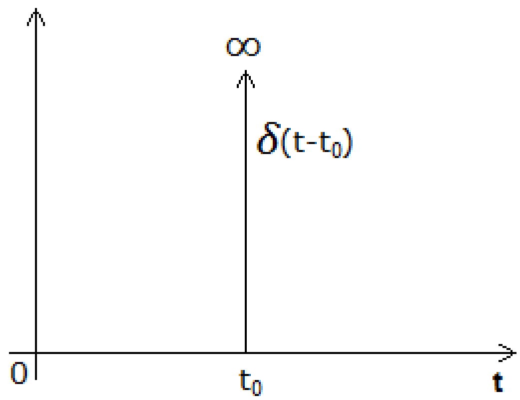
Ovo znaci da funkcija nije difernecijabilna na citavom interval(tj. u tacki prekida nije diferencijabilna, tu ne postoji izvod.)

Laplasove transformacije nekih funkcija:

- $L\{h(t)\} = \frac{1}{s}$
- $L\{\delta(t)\} = 1$
- $L\{t^n\} = \frac{n!}{s^{n+1}}$

Dirakova funkcija

Dirakova funkcija je aproksimacija pravougaonika površine 1 beskonačno velike amplitude i beskonačno malog vremena trajanja.



$$\delta(t-t_0)=\begin{cases}\infty\,, & t=t_0\\ 0\,, & t\neq t_0\end{cases}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t-t_0)dt=1$$

Veza između Dirakove i Hevisajdove funkcije:

$$\frac{d}{dt}h(t-t_0)=\delta(t-t_0)$$

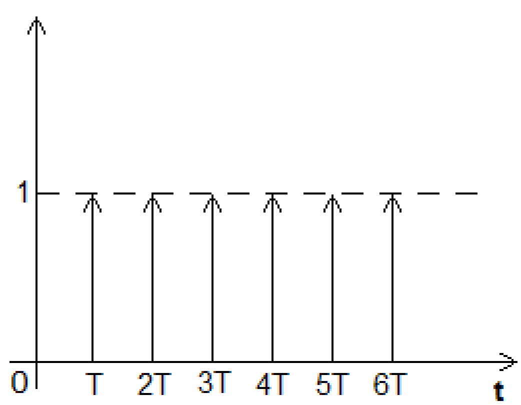
Inverzna Laplasova transformacija

$$L^{-1}[F(s)]=f(t)=\frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}e^{st}F(s)ds=\sum_{i=1}^{\infty}\mathrm{Res}[e^{st}F(s),\ \ s_i]$$

gde je s_i neki pol funkcije $F(s)$.

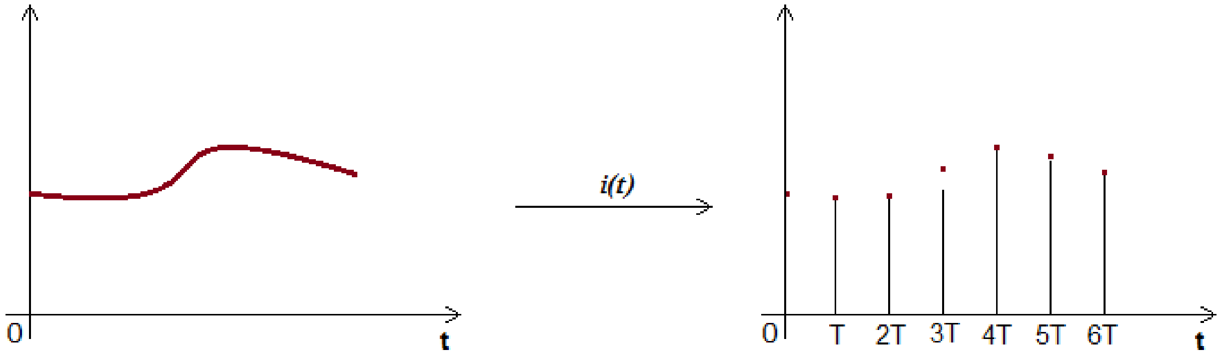
Kvazidirakova funkcija

Ova funkcija se koristi pri prevođenju analitičke funkcije $f(t)$ u prekidnu funkciju. Koristi se funkcija $i(t)$ (povorka jediničnih impulsa) tj. kvazidirakova funkcija.



$$\delta(t-kT)=\begin{cases}1\,, & t=kt\\ 0\,, & t\neq kt\end{cases}$$

Ova funkcija se koristi pri prevođenju analitičke funkcije $f(t)$ u prekidnu funkciju. Koristi se funkcija $i(t)$ (povorka jediničnih impulsa) tj. kvazidirakova funkcija.



Veza između L i Z transformacije:

$$F^*(s) = F(z) \text{ pod uslovom } z = e^{st}$$

Z-transformacija

Definicija:

$$F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} f(kT)z^{-k}$$

Upotreba:

Diferentna jednacina $\xrightarrow{Z}$ algebarska jednacina

(k) ili (n) z domen(kompleksni domen)

$\downarrow$

Resenje dif. Jednacine $\xleftarrow{Z^\wedge - 1}$ resenje algebarske jednacine

(diskretnom domenu-n/k) (u z domenu)

*diferentna jednačina je isto što i diferencijalna, samo je u diskretnom domenu.

Laplasova i Z transformacija(misli se i na inverznu) se koriste pri analizi linearnih i stacionarnih sistema.

Laplasovu i z transformaciju koristimo za izracunavanje odziva sistema i prenosne funkcije.

Inverzna Z transformacija

$$z^{-1}[F(z)] = f(n) = \frac{1}{2\pi i}\int_{r} F(z)z^{n-1}dz = \sum_{i=1}^{\infty} \mathrm{Res}[F(z)z^{n-1}, \ z_i]$$

gde je z_i neki pol funkcije $F(z)$.

Vrste modela sistema:

I. Model ulaz-izlaz
II. Ulazno-izlazno preslikavanje
III. Model ulaz-stanje-izlaz
IV. Model u prostoru stanja (state space model)

Postoje dva načina za prevođenje modela iz ulazno-izlaznog opisa u model u prostoru stanja:

1. korišćenje osobina saglasnosti stanja
2. pomoću analognog modela (kontinualno vreme) ili blok dijagrama (diskretno vreme)

Model u prostoru stanja (F,G,H) u opstem obliku:

$\dot{X}(t) = f\big(t, x(t), u(t)\big)$ - jednačina prelaza stanja
$y(t) = \eta\big(t, x(t)\big)$ jednačina izlaza

Terema odabira (Sampling Theorem)

def: Neka je ω_g granična učestanost signala spektra funkcije $f_{\omega_g}(t)$ tako da je $\left|F_{\omega_g}(j\omega)\right| = 0$ za $\omega \geq \omega_g$. Tada je funkcija $f(t)$ jednoznačno određena svojim odbircima $f(kT), k \in N$ ako je $\Omega \geq \omega_g$, gde je Ω učestanost odabirača. Ukoliko je $\Omega < \omega_g$ dolazi do gubitaka prilikom prevođenja.

Odziv sistema

Odziv sistema pobuđenog iz nultog stanja u trenutku 0 opisujemo prenosnom funkcijom:
$G(s)$ - prenosna funkcija za kontinualno vreme
$G(z)$ - prenosna funkcija za diskretno vreme
$y(t)$ - odziv sistema
$g(t)$ - impulsni odziv.
$u(t)$ - pobuda

$$y(t) = \int_0^t g(t,\tau)\, u(t) d\tau$$

posle dejstva Laplasovom transformacijom:

$$Y(s) = G(s)U(s) \;\Rightarrow\; G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} - \text{ kontinualno vreme}$$

analogno:

$$Y(z) = G(z)U(z) \;\Rightarrow\; G(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} \;-\; \text{diskretno vreme}$$

Impulsni odziv

Impulsni odziv je odziv sistema na jediničnu pobudu $\delta(t)$, tj. onda kada je $u(t) = \delta(t)$. Ovaj odziv se takođe može dobiti inverznom Laplasovom/Z transformacijom odziva sistema iz nultog stanja ($G(s)$ ili $G(z)$).

Ω - Skup dopustivih ulaza (ulaznih dejstava). Funkcije moraju biti deo po deo integrabilne.

0_Ω - $\{u(t)|u(t) = 0\}$ skup ulaznih nultih dejstava

f - lokalna (osnovna) funkcija prelaza stanja. Ona nam govori kako da pređemo u sledeće stanje (npr. iz $x(t)$ u $\dot{x}(t)$)

Φ - globalna funkcija prelaza stanja. Ona nam govori kako da pređemo u bilo koje stanje.

X_θ - dobija se za nulto dopustivo ulazno dejstvo (0_Ω) i nulti izlaz (0_Y)

Teorema: Odziv linearnog sistema je zbir odziva iz nultog stanja i odziva na nulto ulazno dejstvo.

$$\mathcal{s}\big(t_1, t_0, x(t_0), u(t)\big) = \mathcal{s}\big(t_1, t_0, X_\theta, u(t)\big) + \mathcal{s}(t_1, t_0, x(t_0), 0_\Omega)$$

Uslov za ravnotežno stanje (cilj je da ne dođe do promene):

Kontinualno vreme : $\dot{x}(t) = 0$

Diskretno vreme: $x(n + 1) = x(n)$

Određivanje prenosnih funkcija:

1) $G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)}$ i $G(z) = \frac{Y(z)}{U(z)}$
2) $G(s) = L[g(t)]$ i $G(s) = Z[g(n)]$
3) za modele u prostoru stanja:
   $G(s) = H(sI - F)^{-1}G$ i $G(z) = H(zI - F)^{-1}G$
4) Mejsonovo pravilo

Dijagonalizacija i sopstvene vrednosti:

Sistem (F, G, H) prevodimo u $(\overline{F}, \overline{G}, \overline{H})$ preko matrice slične transformacije P. Pri tom, P mora biti invertibilna matrica (da ima inverznu matricu). Iz $X = P\overline{X}$ sledi:

$$\overline{F} = P^{-1}FP$$

$$\overline{G} = P^{-1}G$$

$$\overline{H} = HP$$

Pri tom, $\bar{F}$ ima oblik:

$$\bar{F} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \cdots & \\ & \lambda_2 & & \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ & & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}$$

gde su $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ sopstvene vrednosti matrice F. Neophodan i potreban uslov za dijagonalizaciju je da su ove sopstvene vrednosti realne i različite.

Upravljivost, dostižljivost i osmotrivost

Stacionarni sistemi

Sistem je osmotriv ako u svakom trenutku znamo kakvo je stanje sistema.

Kod diskretnih sistema: ako je sistem dostižljiv, onda je on upravljiv. Suprotno ne važi. Međutim, ako je sistem upravljiv i ako je matrica F invertibilna, onda je sistem dostižljiv.

Kod kontinualnih: dostižljivost i upravljivost su ekvivalentni.

Linearan diskretan stacionaran sistem (F, G, H) reda n je upravlijv akko je rang matrice C jednak redu n. Matrica C je matrica upravljivosti:

$$C = [F^{n-1}G; F^{n-2}G; \dots; FG; G]$$

Linearan diskretan stacionaran sistem (F, G, H) reda n je osmotriv akko je rang matrice σ jednak redu n. Matrica σ je matrica upravljivosti:

$$\sigma = \begin{bmatrix} H \\ HF \\ \vdots \\ HF^{n-1} \end{bmatrix}$$

Linearan kontinualan staciarni sistem (F, G, H) sa prostorom stanja reda n je upravlijv akko je rang matrice C^* jednak redu n. Matrica C^* je matrica upravljivosti:

$$C^* = [G; FG; \dots; F^{n-2}G; F^{n-1}G]$$

Nestacionarni sistemi

Linearni nestacionarni vremenski kontinualan sistem (F, G, H) je upravljiv akko $\Phi(t, t_0)G(t_0)$ ima linearno nezavisne redove.

Linearni nestacionarni vremenski kontinualan sistem (F, G, H) je osmotriv akko $H(t)\Phi(t, t_0)$ ima linearno nezavisne kolone.

$\Phi(t, t_0)$ - matrica prelaza stanja. Računa se:

1. Kod stacionarnih sistema:
$$\Phi(t, t_0) = e^{F(t-t_0)}$$
2. Kod nestacionarnih sistema
$$\Phi(t, t_0) = e^{\int_{t_0}^{t} F(\tau) d\tau} \text{ pri uslovu: } F(t) \int_{t_0}^{t} F(\tau)\, d\tau = \int_{t_0}^{t} F(\tau)\, d\tau \cdot F(t)$$
ili
$$\Phi(t, t_0) = W(t) \cdot W^{-1}(t_0) \text{ pri uslovu: } \dot{W}(t) = F(t) \cdot W(t)$$

Stabilnost

Postoje sledeće vrste stabilnosti:

1. Asimptotska stabilnost - stabilnost stanja sistema
2. OUOI stabilnost - ograničen ulaz ograničen izlaz
3. Stabilnost u smislu Ljapunova

Ako je sistem asimptotski stabilan, onda je i OUOI stabilan.

Ako je sistem OUOI stabilan, upravljiv i osmotriv, onda je i asimptotski stabilan.

Asimptotska stabilnost

Asimptotska stabilnost se odnosi na stabilnost stanja, odnosno unutrašnju stablinost sistema.

Ispitivanje asimptotske stabilnosti:

1. Pomoću sopstvenih vrednosti
   kontinualno vreme: Linearan, stacionaran, vremenski neprekidan sistem je asimptotski stabilan akko su svi realni delovi sopstvenih vrednosti matrice F negativni.
   $$\det(\lambda I - F) = 0, \qquad \mathrm{Re}(\lambda) < 1$$
   diskretno vreme: Linearan, stacinaran, vremenski diskretan sistem je asimptotski stabilan akko su sve sopstvene vrednosti matrice F po modulu manje od 1, odnosno nalaze se unutar jediničnog kruga.
   $$\det(\lambda I - F) = 0, \qquad |\lambda| < 1$$
2. Kriterijumi:
   kontinualno vreme: Rausov kriterijum (routh)
   diskretno vreme: Jurijev kriterijum (jury)

OUOI stabilnost (eng. BIBO)

OUOI stabilnost zahteva da za sve ograničene ulaze, sistem da je ograničene izlaze u odzivu iz nultog stanja.

Ispitivanje:

1. Pomoću polova prenosne funkcije:

   1.1 Vremenski kontinualni:

$$G(s) = H(sI - F)^{-1}G$$

- polovi $G(s)$ treba da budu u levoj poluravni, tj $s_i < 0$

   1.2 Vremenski diskretni:

$$G(z) = H(zI - F)^{-1}G$$

- polovi $G(z)$ treba da budu u jediničnom krugu, tj $|z_i| < 1$

2. Pomoću impulsnog odziva:

   2.1. Vremenski kontinualni:

      2.1.1. Nestacionarni

$$\int_{-\infty}^{t} \|g(t,\tau)\| \, d\tau \le M_g , \qquad M_g \in R^+$$

$$g(t,\tau) = H(t)\Phi(t,\tau)G(\tau)$$

      2.1.2. Stacionarni

$$\int_{-\infty}^{t} \|g(\tau)\| \, d\tau \le M_g , \qquad M_g \in R^+$$

$$g(\tau) = He^{F}G$$

   2.2. Vremenski diskretni:

      2.1.1. Nestacionarni

$$\sum_{-\infty}^{n} \|g(n,k)\| \le M_g , \qquad M_g \in R^+$$

      2.1.2. Stacionarni

$$\sum_{-\infty}^{n} \|g(n)\| \le M_g , \qquad M_g \in R^+$$

Granični krug je trajektorija po kojoj se stanja kreću periodično.

Stabilnost u smislu Ljapunova

Neka $\dot{x} = f(x)$ ima ravnotežnu tačku $(0,0)$ i funkcija V (funkcija Ljapunova) ima neprekidne parcijalne izvode u $V_0 = 0$, $V(x) > 0$ za $x \neq 0$. Tada:

- ako je $\dot{V}\big(x(t)\big) \leq 0$, onda je $(0,0)$ slabo stabilna ravnotežna tačka;
- ako je $\dot{V}\big(x(t)\big) < 0$, onda je $(0,0)$ asimptotski stabilna ravnotežna tačka;
- ako je $\dot{V}\big(x(t)\big) > 0$, onda je $(0,0)$ nestabilna ravnotežna tačka;

Fazni portreti se koriste za linearne i stacionarne sisteme II reda i to za kvalitativno ispitivanje. Fazni portret prikazuje putanju (trajektoriju) međuzavisnosti stanja, odnosno prikazuje jedno stanje u zavisnosti od drugog stanja.

Moze doć pitanje koliko ima nestabilnih stanja? Odgovor bi bio: 0 ih je na jediničnom krugu, negativni su van kruga i nestabilni su, a pozitivni su unutar kruga i stabilni su.

Primenom Laplasove transformacije sopstvene vrednosti matrice F postaju polovi prenosne funkcije.

1. U teoriji upravljanja Laplasova transformacija se primenjuje pri resavanju diferencijalnih jednacina:

a) za prevodjenje diferencijalne jednacine u vremenski domen t
b) za vracanje resenja algebarske jednacine u vremenski domen t
c) za prevodjenja algebarske jednacine u kompleksni domen s
d) nista od navedenog

2. Veza izmedju Hevisajdove i Dirakove funkcije:

a) Hevisajdova funkcija je iznad dirakove funkcije
b) Dirakova funkcija je izvod Hevisajdove funkcije
c) Laplasovom transformacijom Hevisajdove funkcije dobijamo Dirakovu funkciju
d) U opstem slucaju ne postoji veza izmedju ove dve funkcije

3. Z transformacija prevodi iz **realnog** u **kompleksni** domen.

4. Kada se vrsi diskretizacija:

a) sto je manja perioda odabiranja preciznije opisujemo analogni signal
b) sto je veca perioda odabiranja preciznije opisujemo analogni signal
c) ako je perioda odabiranja previse mala postoji nedovoljno vrednosti za cuvanje u memoriji
d) ako je perioda odabiranja previse velika onda je skup vrednosti veliki za cuvanje u memoriji

5. Odnos izmedju ucestalosti odabiraca Ω i granicne ucestalosti spectra ω_g je:

a) $\omega_g > 2\ \Omega$
b) $\omega_g < 2\ \Omega$
c) $\Omega > 2\ \omega_g$
d) $\Omega < 2\ \omega_g$

6. Inverzna Z transformacija od z/z-1 je: **h(n)**

7. Definisati i nacrtati Dirakovu funkciju u kontiualnom vremenu:

Dirak je aproksimacija pravougaonika povrsine jedan beskonacno velike amplitude.

8. Ako na blok dijagramu imamo element za jedinicno kasnjenje (to je z^{-1}) onda to znaci da posmatramo sistem koji je:

a) kontinuaalan
b) diskretan
c) linearan
d) nista navedeno

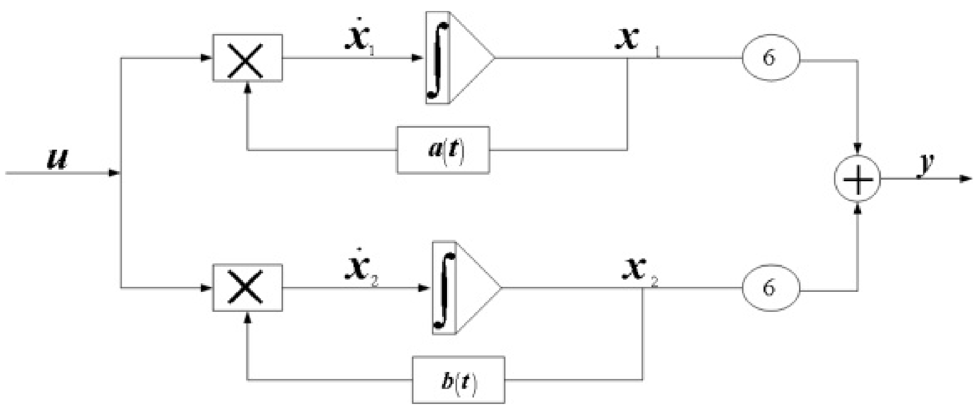
9. Kod standardnog sistema ulaz-izlaz ako je (u,y) par ulaz-izlaz sistema onda je **sistem vremenski invarijantan ukoliko je njegov vremenski pomeren par ($z^{-\tau}$*u,$z^{-\tau}$*y) za svako dozvoljeno kasnjenje τεT.**

10. Operator pomeranja u vremenu se definise kao:

$z^{-\tau}$*f(t)=f(t- τ)   za svako τЄT

11. Osnovna razlika izmedju lokalne i globalne funkcije prelaza stanja je: **lokalna opisuje samo trenutno stanje a globalna opisuje sva stanja**.

12. Sistem je opisan modelom prikazanim na slici:



Odrediti X, U, Y, Ω, lokalne funkcije prelaza stanja f i izlaza η

13. Formula za prenosnu funkciju linearnih, stacionarnih neprekidnih sistema sa jednim ulazom i jednim izlazom (SISO) glasi:

14. Dogadjaj je __________________ u odnosu na nulto stanje x_θ ako postoji takav trenutak $t \geq \tau$ i takvo ulazno dejstvo $u \in \Omega$ tako da je $x_\theta = \Phi(t,\tau,x,u)$

a) linearan
b) upravljiv
c) osmotriv
d) dostizljiv

15. Kod diskretnih sistema vazi:

a) ako je sistem upravljiv onda je i dostizljiv
b) ako je sistem dostizljiv onda je i osmotriv
c) ako je sistem osmotriv onda je i upravljiv
d) nista od navedenog

16. Linearan nestacionaran kontinualan sistem (F,G,H) je upravljiv ako **je rang matrice C jednak redu sistema.**

17. Primenom Laplasove transformacije sopstvene vrednosti matrice F postaju **polovi prenosne funkcije**.

18. Napisati kriterijum i ispitati da li je asimptotski stabilan sistem kome odgovara karakteristicna jednacina:

19. Nacrtati primer za stabilan granicni krug:

20. Za model sistema (F,G,H)=const u diskretnom vremenu prenosna funkcija se moze izracunati:

21. Uslov za odredjivanje ravnoteznog stanja sistema u diskretnom vremenu je:

X(n+1) = X(n)

22. Veza izmedju lokalne i globalne funkcije prelaza stanja u kontinualnom vremenu je:

23. Kod kontinualnih sistema:

a) ako je sistem upravljiv onda je i dostizljiv
b) ako je sistem dostizljiv onda je i osmotriv
c) ako je sistem osmotriv onda je i upravljiv
d) nista od navedenog

24. Ako je moguce da sistem iz stanja mirovanja, pomocu odgovarajucih ulaznih dejstava dostigne neko zeljeno stanje u nekom narednom trenutku onda taj sistem ima osobinu **dostizljivosti**.

25. Nulto stanje sistema x_θ se dobija **kada na sistem deluju nulti ulaz i nulto izlazno dejstvo**.

26. Stanje sistema je **sazeta predstava prethodnih ponasanja sistema dovoljno jasna da na osnovu ulaza mozemo da odredimo izlaze i prelaze stanja sistema.**

27. Teorema o dualnosti tvrdi da ako je sistem upravljiv, onda je njegov dualan sistem **osmotriv**.

28.Asimptotska stabilnost sistema se odnosi na **unutrasnju stabilnost sistema**.

29. Kod teoreme o odabiranju potrebno je da ucestalost odabiraca bude $\boldsymbol{\Omega \geq 2\omega_g}$

30. Odziv sistema na jedinicnu pobudu naziva se **inpulsni odziv**.

31.U teoriji sistema pri resavanju diferencijalnih jednacina inverzna Laplasova transformacija se primenjuje:

a) za prevodjenje diferencijalne jednacine u kompleksni domen S
b) za vracanje resenja algebarske jednacine u vremenski domen n
c) za prevodjenje diferencijalne jendacine u kompleksni domen z
d) za vracanje resenja algebarske jednacine u vremenski domen t

32. Fazni portret prikazuje **putanju medjuzavisnosti stanja odnosno jedno stanje u zavisnosti od drugog**.

33. Za sistem kome odgovara navedena Rausova sema odrediti:

1	1/2
3	-1/2
2/3	0
-1/3	0

Da li je sistem simptotski stabilan? **Ne**

Broj promena znaka govori o broju **polova u desnoj poluravni**.

34. U teoriji sistema, pri resavanju diferencijalnih jednacina Z transformacija se primenjuje:

a) za prevodjenje diferencijalne jednacine u vremenski domen n
b) za vracanje resenja algebarske jednacine u vremenski domen n
c) za prevodjenje algebarske jednacine u kompleksni domen z
d) nista od navedenog

35. Za prevodjenje modela sistema sa U/I preslikavanjem u model u prostoru stanja mozemo koristiti:

a) osobinu odabiranja
b) osobinu saglasnosti stanja
c) osobinu razdvajanja
d) osobinu jednoznacnog inverznog preslikavanja

36. Inverzna Z transformacija od 1 je **δ(n)**

37. Ako pokrenemo neki program i ocekujemo da rezultat (izlaz) zavisi od podataka (ulaza) sa kojim smog a snabdeli i od izvrsavanja samog programa, a nije vazno vreme kada smo pokrenuli program, onda taj sistem ima osobinu **vremenske invarijantnosti**.

38. Potreban i dovoljan uslov za prevodjenje sistema (F,G,H) u njegov dijagonalizovan oblik (F,G,H) je **da je matrica F invertiblna i da su sopstvene vrednosti realne i razlicite.**

40. Za dati model sistema nacrtati odgovarajuci analogni model:

$\dot{x}_1(t)=x\ 1(t)+\ x\ 1(t)\ \cdot x_2(t)+u(t)$

$\dot{x}_2(t)=a\cdot x_2(t)+u(t)$

$y(t)=\ x1\ (t)$

$a \varepsilon R$

41. Dat je model sistema:

$\dot{x}_1(t) = 3*x(t)*u(t)$

$y(t) = 5*x(t)$

Odrediti nule u prostoru ulaza, stanja i izlaza, Oy, Ox, Ou, OΩ i nulto stanje Xθ ako je odgovarajuca funkcija odziva sistema:

42. Definisati i nacrtati odskocnu (Hevisajdovu) funkciju u diskretnom vremenu:

Hevisajdova funkcija h (t) (jedinična odskočna funkcija) koja je deo po deo konstantna, sa jediničnim skokom u t = 0.

43. OUOI stabilnost podrazumeva da **na ograniceno ulazno dejstvo dobijamo ogranicene izlaze**.

44. U teoriji sistema inverzna Laplasova transformacija se primenjuje:

a) za lakse resavanje diferencijalnih jednacina svodjenjem na algebarske jednacije
b) za odredjivanje odziva linearnih stacionarnih sistema na datu pobudu
c) za odredjivanje prenosne funkcije linearnih stacionarnih sistema
d) za lakse resavanje diferencijalnih jednacina svodjenjem na algebarske jednacine

45. Za sistem u diskretnom vremenu data je Jurijeva sema:

1.00	0.50	-0.50
-0.50	0.50	1.00
0.75	0.75	0.00
0.75	0.75	0.00
0.00	0.00	0.00

Da li je sistem asimptotski stabilan? **Ne (prva kolona, nula, neparno mesto)**

Broj sopstvenih vrednosti na jedinicnom krugu je: **1 (broj nula)**

46. Prema teoremi o odabiranju ako je ucestalost odabiraca dva puta manja od granicne ucestalosti spectra signala onda **dolazi do gubljenja informacija o sistemu**.

47. Za neprekidne sisteme sa jednim ulazom i jednim izlazom (SISO) formula za prenosnu funkciju glasi:

48. Ako u svakom trenutku mozemo da odredimo stanje u kome se sistem nalazi onda taj sistem ima osobinu **osmotrivosti**.

49. Nacrtaj nestabilan granicni krug:

50. Odziv linearnog sistema je zbir **odziva iz nultog stanja i odziva na nulto ulazno dejstvo**.

51. Za ispitivanje asimptotske stabilnosti nelinearnih sistema koristi se **stabilnost ljapunova**.

52. Z transformacija se moze izvesti iz Laplasove transformacije uvodjenjem smene **$Z=e^{ST}$**

53. Prevesti mozel iz oblika ulazno-izlaznog preslikavanja

y(n+2) + y(n+1) + 0.5*y(n) = U(n), nεZ

u moel sistema u prostoru stanja.

54. Uslov za odredjivanje ravnoteznog stanja sistema u kontinualnom vremenu je **$\dot{x}=0$**

55. Nacrtati $f(t) = h(t) – h(t-t_0)$

56. Koji modeli stanja postoje u zavisnosti u kom su vremenu? **Kontinualni i diskontinualni**

57. Laplas od Diraka je **1**

58. Nacrtaj $r=(r-3)(r-5)$

59. Odredi da li je sistem asimptotski stabilan:

$\lambda^2 + 1/2*\lambda - 1/2$

60. Polovi kontinualne funkcije treba da budu u:

a) levoj poluravni
b) desnoj poluravni
c) jedinicnom krugu

61. Kada je ucestalost odabiranja dva puta manja od granicne ucestalosti spectra signala onda **dolazi do gubljenja informacija**.

62. Na osnovu reda izvoda u pocetnoj jednacini moze da se odredi:

a) broj jednacina stanja
b) broj promenljivih stanja
c) broj integratora na blok dijagramu
d) sve navedeno

63. Podela sistema u zavisnosti od vremena je na **kontinualne** i **diskontinualne**.

Teorija sistema

usmeni ispit, januar 2012. godine **Grupa B**

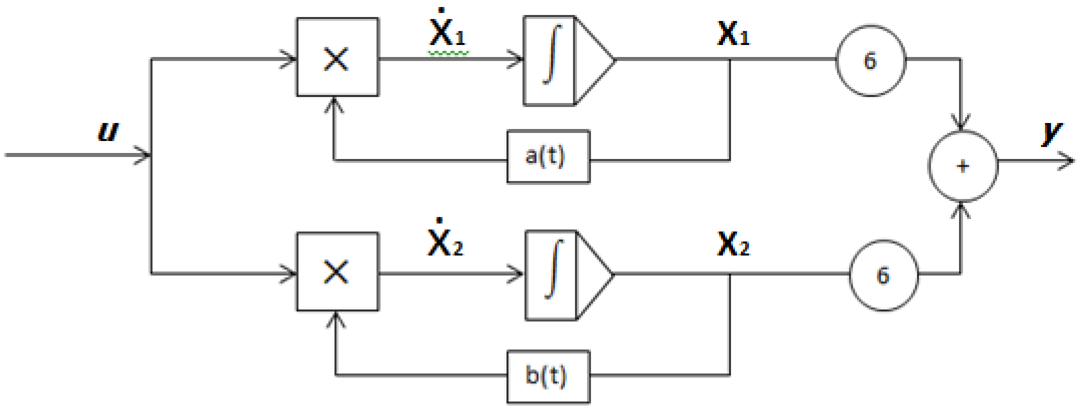
Test nosi ukupno 30 bodova. Svako pitanje ima samo jedan tačan odgovor i nema negativnih poena.

1. (2 poena)
   Za model sistema (F,G,H)=const. u diskretnom vremenu prenosna funkcija se može izračunati:

2. (1 poen)
   Uslov za određivanje ravnotežnog stanja sistema u diskretnom vremenu je:

3. (2 poena)
   Veza između lokalne i globalne funkcije prelaza stanja u kontinualnom vremenu je:

4. (3 poena)
   Sistem je opisan modelom prikazanim na slici:



   Odrediti ***X, U, Y, Ω,*** lokalne funkcije prelaza stanja *f*, izlaza ***η***

5. (1 poen)
   Kod kontinualnih sistema:
   a) ako je sistem upravljiv onda je i dostižljiv;
   b) ako je sistem dostižljiv onda je i osmotriv;
   c) ako je sistem osmotriv onda je i upravljiv;
   d) ništa od navedenog.

6. (1 poen)
   Ako je moguće da sistem iz stanja mirovanja, pomoću odgovarajućih ulaznih dejstava dostigne neko željeno stanje u nekom narednom trenutku onda taj system ima osobinu:

7. (1 poen)
   Nulto stanje sistema X_Θ se dobija:

8. (2 poena)
   Stanje sistema je:

9. (1 poen)
   Teorema o dualnosti tvrdi da ako je sistem upravljiv, onda je njegov dualan sistem:

10. (1 poen)
    Asimptotska stabilnost se odnosi na:

11. (1 poen)
    Kod teoreme o odabiranju potrebno je da učestanost odabirača bude:

12. (1 poen)
    Odziv sistema na jediničnu pobudu naziva se:

13. (1 poen)
    U Teoriji sistema, pri rešavanju diferencijalnih jednačina inverzna Laplasova transformacija se primenjuje:
    a) za prevođenje diferencijalne jednačine u kompleksni domen S;
    b) za vraćanje rešenja algebarske jednačine u vremenski domen n;
    c) za prevođenje diferencijalne jednačine u kompleksni domen Z;
    d) za vraćanje rešenja algebarske jednačine u vremenski domen t.

14. (2 poena)
    Fazni portret prikazuje:

15. (3 poena)
    Za sistem kome odgovara navedena Rausova šema odrediti:

1	$\frac{1}{2}$
3	$-\frac{1}{2}$
$\frac{2}{3}$	0
$-\frac{1}{3}$	0

Da li je sistem asimptotski stabilan?

Broj promena znaka govori o broju:

16. (1 poen)
    Definisati i nacrtati Dirakovu impulsnu funkciju u kontinualnom vremenu.

17. (3 poena)
    Za dati model sistema nacrtati odgovarajući analogni model:
    $\dot{x}_1(t)=x_1(t)+ x_1(t) \cdot x_2(t)+u(t)$
    $\dot{x}_2(t)=a \cdot x_2(t)+u(t)$
    $y(t)= x_1(t)$
    $a \epsilon R$

18. (1 poen)
    U Teoriji sistema, pri rešavanju diferentnih jednačina Z transformacija se primenjuje:
    a) za prevođenje diferentne jednačine u vremenski domen n;
    b) za vraćanje rešenja algebarske jednačine u vremenski domen n;
    c) za prevođenje algebarske jednačine u kompleksni domen Z;
    d) ništa od navedenog.

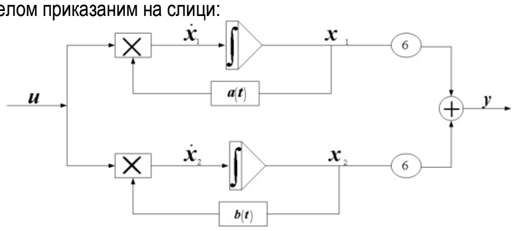
19. (1 poen)
    Za prevođenje modela sistema sa U/I preslikavanjem u model u prostoru stanja možemo koristiti:
    a) osobinu odabiranja;
    b) osobinu saglasnosti stanja;
    c) osobinu razdvajanja;
    d) osobinu jednoznačnog inverznog preslikavanja.

20. (1 poen)
    Operator pomeranja u vremenu se definiše kao:

Катедра за електронско пословање и управљање системима
Лабораторија за системе

Теорија система – припрема за усмени испит	**Број бодова**	**Презиме и име студента**	**Број индекса**
30. децембар 2011.			

Одговорите на постављена питања избором из листе понуђених одговора или дописивањем тачног одговора. Питања могу бити вреднована са 1, 2 или 3 поена (укупно 30 поена). Свако питање има само један тачан одговор и нема негативних поена.

Р. б.	Питање	Одговор	Бодови
1.	*(1 поен)* У теорији управљања Лапласова трансформација се примењује при решавању диференцијалних једначина: (а) за превођење диференцијалне једначине у временски домен t; (б) за враћање решења алгебарске једначине у временски домен t; (в) за превођења алгебарске једначине у комплексни домен s; (г) ништа од наведеног.	а б в г	
2.	*(1 поен)* Веза између Хевисајдове и Диракове функције: (а) Хевисајдова функција је извод Диракове функције; (б) Диракова функција је извод Хевисајдове функције; (в) Лапласовом трансформацијом Хевисајдове функције добијамо Диракову функцију; (г) У општем случају не постоји веза између ове две функције.	а б в г	
3.	*(1 поен)* Z трансформација преводи из __________ у ____________ домен.		
4.	*(1 поен)* Када се врши дискретизација: (а) што је мања периода одабирања прецизније описујемо аналогни сигнал; (б) што је већа периода одабирања прецизније описујемо аналогни сигнал; (в) ако је периода одабирања превише мала постоји недовољно вредности за чување у меморији; (г) ако је периода одабирања превише велика онда је скуп вредности велики за чување у меморији.	а б в г	
5.	*(2 поена)* Однос између учесталост одабирача Ω и граничне учесталости спектра ω□ је: (а) ω□ > 2 Ω (б) ω□ < 2 Ω (в) Ω > 2ω□ (г) Ω < 2ω□	а б в г	
6.	*(1 поен)* Инверзна Z трансформација од z/z-1 је: _________________.		
7.	*(2 поена)* Дефинисати и нацртати Диракову функцију у континуалном времену: ____.		
8.	*(1 поен)* Ако на блок дијаграму имамо елемент за јединично кашњење онда то значи да посматрамо систем који је: (а) континуалан; (б) дискретан; (в) линеаран; (г) није одређено.	а б в г	
9.	*(2 поен)* Код стационарног система улаз-излаз ако је (u, y) пар улаз-излаз система онда је: ____________________________.		
10.	*(2 поена)* Основна разлика између локалне и глобалне функције прелаза стања је: ___________________________________.		
11.	*(3 поена)* Систем је описан моделом приказаним на слици:  Одредити X, U, Y, Ω, локалне функције прелаза стања f и излаза η ____		
12.	*(1 поен)* Формула за преносну функцију линеарних, стационарних непрекидних система са једним улазом и једним излазом (SISO) гласи: ____________________________.		
13.	*(2 поена)* Догађај је _________ у односу на нулто стање x_θ ако постоји такав тренутак $t \geq \tau$ и такво улазно дејство $u \in \Omega$ тако да је $x_\theta = \Phi(t, \tau, x, u)$ (а) линеаран (б) управљив; (в) осмотив; (г) достижљив.	а б в г	
14.	*(1 поен)* Код дискретних систем важи: (а) ако је систем управљив онда је и достижљив; (б) ако је систем достижљив онда је и осмотрив; (в) ако је систем осмотрив онда је и управљив; (г) ништа од наведеног.	а б в г	
15.	*(2 поен)* Линеаран нестационаран континуалан систем (F,G,H) је управљив акко: ___________________________________.		
16.	*(2 поена)* Применом Лапласове трансформације сопствене вредности матрице F постају ____________________________.		
17.	*(3 поена)* Написати критеријум и испитати да ли је асимптотски стабилан систем коме одговара карактеристична једначина: $z^2 + \frac{1}{2}z - \frac{1}{2}$ ____.		
18.	*(2 поен)* Нацртати пример за стабилан гранични круг. ____		