TEORIJA VEROVATNOĆE

Grupa 1

19.01.2009. godine

1. Imamo 6 spolja identičnih kutija, od kojih su tri kutije tipa A, dve kutije tipa B i jedna kutija tipa C. Kutije tipa A sadrže po 80 belih i 20 crnih kuglica, kutije tipa B po 70 belih i 30 crnih kuglica, a kutija C 60 belih i 40 crnih kuglica. Na slučajan nacin se bira jedna kutija, a zatim se iz nje uzima uzorak od 10 kuglica sa vraćanjem. Ako je dobijen uzorak od 6 belih i 4 crne kuglice, odrediti verovatnoću da je izabrana kutija tipa A. **(20 poena)**

Resenje:

Neka su sledeći događaji označeni sa:

A – ” izvučena je kutija tipa A ”

B - “ izvučena je kutija tipa B “

C - “ izvučena je kutija tipa C “

Mogu se odrediti verovatnoće ovih događaja na osnovu broja ovih kutija, pa je

$$P(A)=\frac{3}{6}, P(B)=\frac{2}{6}, P(C)=\frac{1}{6}$$

Neka je događaj

D – “ od 10 izvučenih kuglica, 6 su bele i 4 su crne “

Ostvarenje događaja D zavisi od toga iz koje je vrste kutije uzet uzorak, pa je sada

$$P(D/A)=\binom{10}{6}\left(\frac{80}{100}\right)^6\left(\frac{20}{100}\right)^4=0.088$$

$$P(D/B)=\binom{10}{6}\left(\frac{70}{100}\right)^6\left(\frac{30}{100}\right)^4=0.2$$

$$P(D/C)=\binom{10}{6}\left(\frac{60}{100}\right)^6\left(\frac{40}{100}\right)^4=0.251$$

Sada je na osnovu totalne verovatnoće lako izračunati verovatnoću da će se ostvariti događaj D, pa je

$$P(D)=P(A)P(D/A)+P(B)P(D/B)+P(C)P(D/C),$$

Odnosno, zamenom odgovarajućih vrednosti je $P(D)=0.1525$**.**

Traženu verovatnoću, odredićemo iz Bajesove formule, odnosno

$$P(A/D)=\frac{P(A)P(D/A)}{P(D)}=0.2885.$$

2. U kutiji se nalazi po jedna bela i jedna crna kuglica. Izvlači se jedna po jedna kuglica. Ako je izvučena kuglica bela, ona se vraća u kutiju i dodaju se još dve bele kuglice, a zatim se izvlačenje ponavlja. Izvlačenje se prekida ako se izvuče crna kuglica ili najduže posle šestog izvlačenja. Neka je X slučajna promenljiva koja predstavlja broj izvlacenja. Odrediti:

- **a)** zakon verovatnoća slučajne promenljive X **(9 poena)**
- **b)** matematičko očekivanje i disperziju za X **(4 poena)**
- **c)** $E(3X+6)$ i $\sigma^2(3X-7)$ **(4 poena)**

d) verovatnoću $P(X \leq E(X))$ **(3 poena)**

Rešenje:

a) Jasno je da slučajna promenljiva X uzima vrednosti iz skupa $\{1,2,3,4,5,6\}$**.**

Imajući u obzir menjanje sadržaja kutije u zavisnosti od broja izvlačenja, dobićemo sledeće

$$X:\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4} & \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{6} & \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{8} & \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{7}{8}\cdot\frac{1}{10} & \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{7}{8}\cdot\frac{9}{10} \end{pmatrix}$$

odnosno

$$X:\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \frac{128}{256} & \frac{32}{256} & \frac{16}{256} & \frac{10}{256} & \frac{7}{256} & \frac{63}{256} \end{pmatrix}$$

b) $E(X)=\sum_{i=1}^{6} x_i p_i = \frac{693}{256} = 2.707$

$E(X^2)=\sum_{i=1}^{6} x_i^2 p_i = \frac{3003}{256} = 11.73$**, pa je sada**

$\sigma^2(X) = E(X^2) - \left(E)(X)\right)^2 = 4.402$

c) $E(3X+6) = 3E(X)+6 = 14.121$

$\sigma^2(3X-7) = 9\sigma^2(X) = 39.618$

d) $P(X \leq E(X)) = P(X \leq 2.707) = P(X=1)+P(X=2) = \frac{160}{256} = 0.625$

3. Slucajna promenljiva (X,Y) ima funkciju gustine koja je proporcionalna sa $e^{-x-\frac{y}{2}}$ za $0<x<\infty$, $0<y<\infty$, a za ostale vrednosti x i y funkcija gustine f(x,y)=0.

a) odrediti funkciju gustine za (X,Y) **(5 poena)**

b) odrediti marginalne gustine za X i Y **(4 poena)**

c) izracunati koeficijent korelacije izmedju X i Y **(4 poena)**

d) izracunati verovatnocu P(Y>X) **(7 poena)**

Rešenje :

Pošto je dato da je funkcija gustine proporcionalna sa funkcijom $e^{-x-\frac{y}{2}}$**, odnosno** $f(x,y) \sim e^{-x-\frac{y}{2}}$**, onda će funkcija gustine biti jednaka**

$$f(x,y) = ce^{-x-\frac{y}{2}}, gde \quad je \quad c \in R$$

Na osnovu osobine funkcije gustine da je $\iint_D f(x,y)dxdy = 1$ **odredićemo nepoznatu konstantu, a samim tim i funkciju gustine.**

a) $c\iint_D e^{-x-\frac{y}{2}}dxdy = c\int_0^{+\infty} e^{-x}dx \int_0^{+\infty} e^{-\frac{y}{2}}dy = c(e^{-x}\,|_{\infty}^{0})2(e^{-\frac{y}{2}}\,|_{\infty}^{0}) = 2c$

Izjednačavanjem poslednjeg izraza sa 1 dobijamo da je $c=\frac{1}{2}$**, pa je sada konačno funkcija gustine data sa** $f(x,y)=\frac{1}{2}e^{-x-\frac{y}{2}}$.

b) marginalne gustine određujemo po definiciji, pa je

$$f_1(x)=\int_0^{+\infty} f(x,y)dy=\frac{1}{2}\int_0^{+\infty} e^{-x-\frac{y}{2}}dy=\frac{1}{2}e^{-x}\int_0^{+\infty} e^{-\frac{y}{2}}dy=\frac{1}{2}e^{-x}2(e^{-\frac{y}{2}}|_{\infty}^{0})=e^{-x}$$

$$f_2(y)=\int_0^{\infty} f(x,y)dx=\frac{1}{2}e^{-\frac{y}{2}}\int_0^{\infty} e^{-x}dx=\frac{1}{2}e^{-\frac{y}{2}}e^{-x}|_{\infty}^{0}=\frac{1}{2}e^{-\frac{y}{2}}$$

c) pošto je $f_1(x)f_2(y)=\frac{1}{2}e^{-x}e^{-\frac{y}{2}}=\frac{1}{2}e^{-x-\frac{y}{2}}=f(x,y)$ **zaključujemo da su promenljive X i Y nezavisne pa je koeficijent korelacije** $\rho_{XY}=0.$

d) **Događaj** $\{Y>X\}$ **obrazovan je od svih tačaka oblasti**

$D_1=\{(x,y):y>x,x>0,y>0\}$

pa traženu verovatnoću dobijamo kao

$$P(Y>X)=\iint_{B_1}\frac{1}{2}e^{-x-\frac{y}{2}}dxdy=\frac{1}{2}\int_0^{+\infty} e^{-\frac{y}{2}}dy\int_0^{y} e^{-x}dx=\frac{1}{2}\int_0^{+\infty} e^{-\frac{y}{2}}(1-e^{-y})dy=\frac{2}{3}.$$

4. Slučajna promenljiva X ima normalnu raspodelu $N(50,100)$. Posmatra se slučajna promenljiva Y koja je definisana sa

$$Y=\begin{cases}1, & X\le a\\ 0, & X>a\end{cases}$$

Odrediti nepoznatu konstantu a tako da očekivana vrednost slučajne promenljive Y bude 0.2. **(20 poena)**

Rešenje:

Na osnovu definicije očekivane vrednosti, imamo da je

$$E(Y)=1\cdot P(X\le a)+0\cdot P(X>a)$$

Odnosno, $E(Y)=P(X\le a)=0.2$ **(po uslovu zadatka)**

Dalje je $P(X\le a)=P(\frac{X-\mu}{\sigma}\le\frac{a-50}{10})=\phi(\frac{a-50}{10})=0.2$

Jasno je da je vrednost argumenta negativna pa je $\phi(-\frac{a-50}{10})=0.8$

pa na osnovu vrednosti za funkciju raspodele za sličajnu promenljivu koja ima standardizovanu normalnu raspodelu, dobijamo

$$-\frac{a-50}{10}=0.84\text{, pa je } a=50-10\cdot 0.84=50-8.4=41.6$$

5. Dati su podaci koji predstavljaju vek trajanja određenog tipa kondenzatora (u časovima);

6800	6200	7100	7290	6000	9130	11500	8900	9310	6400

7520	9040	8020	10500	11800	6900	8340	7200	10880	8910
7330	8380	7500	8990	10680	7400	9640	10960	9800	8520
9990	7466	8800	9200	7980	8100	7280	7830	7300	7700

a) srediti podatke u intervalnu klasifikaciju sa širinom intervala 1000 **(4 poena)**
b) izračunati sve mere varijabiliteta **(12 poena)**
c) na histogramu relativnih frekvencija grafički predstaviti kvartile. **(4 poena)**

Rešenje:
Videti zbirku zadataka " Rešeni zadaci iz verovatnoće ", autora M. Bulajić, D. Vukmirović, Z. Radojičić, strana 28, zadatak 24.