Matematika 3. ||I- dif. j-ne|| I, III (1)

Pojam diferencijalne j-ne. Pikarova teorema

Napisati opšti i normalni oblik dif. j-ne prvog reda

- Opšti oblik: $\boxed{F(x,y,y')=0}$
- Normalni oblik: $\boxed{y'=f(x,y)}$

1.2 Def: rešenje, opšte, partikularno i singularno rešenje

- Rešenje: dif. j-ne je svaka f-ja koja identički zadovoljava tu j-nu
- Opšte j-ne je eksplicitno zadata familija f-ja $y=y(x,C)$ ili implicitno zadata familija $\varphi(x,y,C)=0$ koja identički zadovoljava dif. j-nu po x i C
- Partikularno rešenje dif. j-ne je svaka f-ja $y=y(x)$ koja se dobija iz opšteg rešenja te j-ne za odgovarajuće posebne vrednosti konstanata.
- Singularno rešenje je f-ja $f(x)$ koja identički zadovoljava dif. j-nu koja nije sadržana u opštem rešenju (ni za koje vrednosti integracionih konstanata ne može se dobiti iz njenog opšteg rešenja)

1.3. Def. Košijev problem. Iskazati Pikarovu teoremu

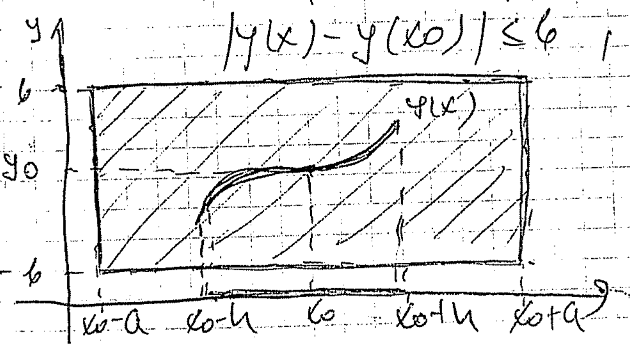
Problem: Postoji li rešenje j-ne $y'=f(x,y)$ koje zadovoljava uslov $y(x_0)=y_0$? Ako postoji, da li je jedinstveno?

Teo: Pikarova teorema: Ako je f-ja $f(x,y)$ definisana u pravougaoniku: $R=\{(x,y): |x-x_0|\le a,\ |y-y_0|\le b\}$, s centrom u tački (x_0,y_0) i ako u tom pravougaoniku za f-ju $f(x,y)$ važe uslovi:

1° $f(x,y)$ - neprekidna, pa prema tome i ograničena f-ja u pravougaonoj oblasti R: $|f(x,y)|\le M$, $M>0$

2° zadovoljava Lipšicov uslov u odn. na promenljivu y:
$$|f(x,y_2)-f(x,y_1)|\le L|y_2-y_1|, \quad L>0$$
a (x,y_1) i (x,y_2) proizvoljne tačke iz R (pravougaonika), tada za dif. j-nu $dy/dx=f(x,y)$ postoji jedinstveno rešenje: $y=y(x)$ koje zadovoljava početne uslove $y(x_0)=y_0$ i koje je def. i neprekidno diferencijabilno u intervalu $|x-x_0|\le h$, $h=\min\left(a,\frac{b}{M}\right)$.

Kada je $|x-x_0|\le h$, ovo rešenje se nalazi u $\square$ R, tj
$$|y(x)-y(x_0)|\le b, \text{ kad je } |x-x_0|\le h$$



2. Jednačine sa razdvojenim promenljivama (2.1.; 2.2; u prošlom pitanju)

23. Izvesti opšte rešenje j-ne sa razdvojenim promenljivama

$\boxed{y' = g(x)\,h(y)}$, g i h - neprekidne f-je

$$\frac{dy}{dx} = g(x)\,h(y) \qquad h(y) \neq 0$$

$$\frac{dy}{h(y)} = g(x)\,dx$$

$$\boxed{\int \frac{dy}{h(y)} = \int g(x)\,dx}$$ što predstavlja opšte rešenje j-ne

3. Homogena diferencijalna j-na I reda (3.1.; 3.2.; u I pitanju)

3.3 Izvesti opšte rešenje homogene dif. j-ne I reda

$\boxed{y' = g\left(\frac{y}{x}\right)}$, $x \neq 0$, g-neprekidna f-ja

Smena $z = \frac{y}{x} \Rightarrow y = zx$, $y' = z'x + z$ $\Rightarrow$ $z'x + z = g(z)$ $\to z = \frac{y}{x}$

$y = y(x)$
$z = z(x)$

$$z'x = g(z) - z \quad /:x$$

$$z' = \frac{g(z) - z}{x}$$

$$\frac{dz}{dx} = \frac{g(z) - z}{x}$$

$$\frac{dz}{g(z) - z} = \frac{dx}{x}, \quad \boxed{g(z) - z \neq 0}$$

$$\boxed{\int \frac{dz}{g(z) - z} = \ln|x| + C}$$ - opšte rešenje

4. J-na I reda koja se svodi na homogenu (4.1. - I pitanje)

4.2 Def: dif. j-nu I reda koja se može svesti na homogenu

• Dif. j-nu prvog reda $y' = f(x,y)$ nazivamo homogenom u odnosu na x i y, ako je $f(x,y)$ homogena f-ja nultog stepena u odn. na x i y.

4.3.
$$y' = F\left(\frac{\alpha x + \beta y + \gamma}{ax + by + c}\right)$$

F-neprekidna $\gamma \neq 0$ ili $c \neq 0$

1° $\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ a & b \end{vmatrix} = \alpha b - \beta a \neq 0$

Smena:

$x = X + h$
$y = Y + k$ ~~X i Y nove nezavisne promenljive~~

X - nova nezavisna promenljiva

Y - nova nepoznata f-ja

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dY}{dX} = F\left(\frac{\alpha(X+h) + \beta(Y+k) + \gamma}{a(X+h) + b(Y+k) + c}\right)$$

$\gamma = \alpha h + \beta k \quad c = ah + bk$

$\alpha h + \beta k + \gamma = 0$
$ah + bk + c = 0$, $(\det \neq 0)$

$$\frac{dY}{dX} = F\left(\frac{\alpha X + \beta Y}{aX + bY}\right) = F\left(\frac{\alpha + \beta \frac{Y}{X}}{a + b\frac{Y}{X}}\right)$$

2° $\alpha b - \beta a = 0$

Smena: $z = \alpha x + \beta y$ (ili $z = ax + by$)

J-na se svodi na j-nu koja razdvaja promenljive u odnosu na nepoznatu z.

5. Linearne dif. j-ne I reda (5.1.; 5.2; I- pitanje)

5.3. Izvesti opšte rešenje lin. dif. j-ne I reda

- Lin. dif. j-na I reda je j-na oblika $\boxed{y' + p(x)y = q(x)}$ koja je linearna u odn. na traženu f-ju $y(x)$ i njen izvod, pri čemu su $p(x)$ i $q(x)$ zadate neprekidne f-je nezavisno promenljive x.

Smena: $\boxed{y = uv}$, $u = u(x)$ i $v = v(x)$

$y' = u'v + v'u \Rightarrow u'v + v'u + p(x)uv = q(x)$

$$u'v + u(v' + p(x)v) = q(x)$$

$v' + p(x)v = 0$ i $u'v = q(x)$

$\frac{dv}{v} = -p(x)dx$

$\ln|v| = -\int p(x)dx + C_1$

$C_1 = 0 \Rightarrow \boxed{v = e^{-\int p(x)dx}}$ - partikularno rešenje

$\frac{du}{dx} = \frac{q(x)}{v} = q(x)e^{+\int p(x)dx}$

$\boxed{du = q(x)e^{\int p(x)dx}dx}$

$\boxed{u = \int q(x)e^{\int p dx}dx + C}$

$$\boxed{y = e^{-\int p(x)dx}\left[C + \int q(x)e^{\int p(x)dx}dx\right]}$$

opšte rešenje lin. dif. j-ne

6. Bernulijeva dif. j-na (6.1.; 6.2. I- pitanje)

6.3. Izvesti opšte rešenje Bernulijeve dif. j-ne

$$y' + p(x)y = q(x)y^{\alpha} \quad (\alpha \in R)$$

, $\alpha = 0$ - linearna j-na

$\alpha = 1$ - ~~...~~ j-na sa raz. prom.

Za $\alpha \notin \{0, 1\}$

$$y^{-\alpha}y' + p(x)y^{-\alpha+1} = q(x)$$

Smena: $y^{-\alpha+1} = z \Rightarrow y = z^{\frac{1}{1-\alpha}}$

$z' = (-\alpha+1)y^{-\alpha}y' \Rightarrow z' + (-\alpha+1)p(x)z = (-\alpha+1)q(x)$

Opšte rešenje:

$$z = e^{-(1-\alpha)\int p(x)dx}\left[(1-\alpha)\int q(x)e^{(1-\alpha)\int p(x)dx}dx + C\right]$$

Opšte rešenje Bernulijeve

$$y = y^{\alpha}e^{-(1-\alpha)\int p(x)dx}\left[(1-\alpha)\int q(x)e^{(1-\alpha)\int p(x)dx}dx + C\right]$$

7. Jna sa totalnim diferencijalom

7.1. Def: j-na sa totalnim diferencijalom

$\boxed{P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0}$ - predstavlja j-nu sa totalnim diferen. ako su $P(x,y)$ i $Q(x,y)$ neprekidne diferencijabilne f-je koje zadovoljavaju uslov $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$

$\frac{\partial P}{\partial y}$ i $\frac{\partial Q}{\partial x}$ parcijalni izvodi neprekidni u datoj oblasti D.

7.2. Navesti teo. o potrebnom i dovoljnom uslovu da izraz $P(x,y) + Q(x,y)$ predstavlja totalni dif. f-je $F(x,y)$.

Teo: Neka su $P(x,y)$ i $Q(x,y)$ neprekidne zajedno sa parcijalnim izvodima na D. Tada je izraz $P(x,y)dx + Q(x,y)dy$ totalni dif. f-je $F(x,y)$ akko je $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ na D

7.3. Dokaz:

($\Rightarrow$): $Pdx + Qdy$ je tot. dif. $\Rightarrow$ ~~$\exists F$ t.d.~~ $\cancel{\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial y}}$

$\exists F$ t.d. $\frac{\partial F}{\partial x} = P$, $\frac{\partial F}{\partial y} = Q \Rightarrow \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = \frac{\partial P}{\partial y}$, $\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} \Rightarrow$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

($\Leftarrow$): $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$. Tražimo F t.d.

$* \quad \frac{\partial F}{\partial (x)} = P(x,y) \qquad \frac{\partial F}{\partial y} = Q(x,y) \quad **$

$$\Downarrow$$

$$F(x,y) = \int_a^x P(x,y)dx + \varphi(y)$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \int_a^x \frac{\partial P}{\partial y} dx + \varphi'(y) = \int_a^x \frac{\partial Q}{\partial x} dx + \varphi'(y).$$

$$= Q(x,y) - Q(a,y) + \varphi'(y) = Q(x,y)$$

$$\Rightarrow \varphi'(y) = Q(a,y) \Rightarrow \varphi(y) = \int^y Q(a,y)dy + C_1$$

$$\boxed{F(x,y) = \int_a^x P(x,y)dx + \int_b^y Q(a,y)dy + C_1}$$

6.) ...uje dif. jne oblika $F(x, y', y'')=0$ na dif. j-nu I reda

Opšti i normalni oblik dif. j-ne II reda

- Opšti: $\boxed{F(x, y, y', y'')=0}$
- normalni: $\boxed{y''=f(x, y, y')}$

2. Def: rešenje, opšte rešenje i problem sa početnim uslovom

- Rešenje: je fja $y=y(x)$ jne $y''=f(x,y,y')$ na (a,b) ako identički zadovoljava j-nu $y''=f(x,y,y')$ na (a,b)
- Opšte rešenje: je fja $y=y(x, C_1, C_2)$ odn. $\varphi(x, y, C_1, C_2)=0$ na (a,b) ako identički zadovoljava tu fju po x i po C_1 i C_2 na (a,b).
- Problem: (KP) $y''=f(x,y,y')$ Da li postoji rešenje (KP)?

$y(x_0)=y_0$ Ako postoji, da li je jedinstveno?

$y'(x_0)=y_0'$

8.3. Svesti jnu $F(x, y', y'')=0$ na j-nu I reda.

Ovo se reši snižavanjem reda date fje $F(x, y', y'')=0$

1° Ona ne sadrži y pa se može uvesti

Smena: $y'=z$, $z=z(x)$

$y''=z'$

$F(x, z, z')$ - jna I reda

$z=z(x, C_1)$ - opšte rešenje

$\boxed{y=\int z(x, C_1)dx + C_2}$ opšte rešenje polazne $F(x, y', y'')=0$ jne

~~2° Ona ne sadrži~~

9. Svođenje dif. jne ~~višeg reda~~ oblika $F(y, y', y'')=0$ na dif. j-nu I reda (9.1; 9.2 I - pita)

9.3. Svesti $F(y, y', y'')=0$ na dif. jnu I reda.

$F(y, y', y'')=0$ ne sadrži x

Smena: $y'=p(y)$, p - novo nepoznata fja koja zavisi od y $(p=p(y))$

$$y''=\frac{d}{dx}\underbrace{p(y)}_{y'}=\frac{dp}{dy}\cdot\frac{dy}{dx}=\frac{dp}{dy}p=p'\cdot p$$

$F(y, p, \frac{dp}{dy}p)=0$ dif. jna I reda

$p=p(y, C_1)$ - opšte rešenje $\Rightarrow \frac{dy}{dx}=p(y, C_1)$

$\Rightarrow \frac{dy}{p(y, C_1)}=dx$

$\Rightarrow \boxed{\int\frac{dy}{p(y, C_1)}=x+C_2}$ o.r. polazne jne

10. Def. j-ne višeg reda. Opšte rešenje. Svođenje diferencijalne j-ne $F(x, y^{(k)}, y^{(k+1)}, \dots, y^{(n)}) = 0$ na j-nu nižeg reda

10.1. Opšti i normalni oblik dif. j-ne višeg reda

- Opšti: $\boxed{F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0}$
- normalni: $\boxed{y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})}$

10.2. Def: rešenje, opšte rešenje i ~~problem~~ sa početnim uslovom

- Rešenje: je f-ja $y = y(x)$ j-ne $y^{(n)} = (x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$ na (a, b) koja identički zadovoljava j-nu na (a, b)
- Opšte rešenje: je $y = y(x, C_1, \dots, C_n)$ ili $\varphi(x, y, C_1, \dots, C_n) = 0$ j-ne višeg reda na (a, b) ako identički zadovoljava j-nu po x i po $C_1, \dots, C_n$ na (a, b)
- Košijev problem (KP): $y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$

$$y(x_0) = y_0$$
$$y'(x_0) = y_0'$$
$$\vdots$$
$$y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}$$

Postoji li rešenje (KP)?
Da li je jedinstveno?

10.3. Svođenje $F(x, y^{(k)}, y^{(k+1)}, \dots, y^{(n)}) = 0$ na j-nu nižeg reda

$$F(x, y^{(k)}, y^{(k+1)}, \dots, y^{(n)}) = 0$$

$$y^{(k)} = z$$
$$y^{(k+1)} = z'$$
$$y^{(n)} = z^{(n-k)}$$

$F(x, z, z', \dots, z^{(n-k)}) = 0$ dif. j-na nižeg reda

7

(11) Homogena linearna dif. j-na II reda. Linearno nezavisna rešenja. Determinanta Vronskog. Opšte rešenje.

11.1 Opšti oblik j-ne II reda

$$\cancel{F(x,y,y',y'')=0} \quad \boxed{y''+p(x)y'+q(x)y=f(x)}$$

11.2 Ako su $y_1(x)$ i $y_2(x)$ rešenja lin. hom. j-ne, dokazati da je i njihova lin. komb. rešenje te j-ne.

$$y = C_1y_1 + C_2y_2 \qquad y''+p(x)y'+q(x)y=f(x)$$

$$y' = C_1y_1' + C_2y_2'$$

$$y'' = C_1y_1'' + C_2y_2''$$

$$C_1y_1'' + C_2y_2'' + p(x)(C_1y_1' + C_2y_2') + q(C_1y_1 + C_2y_2) = 0$$

$$C_1(y_1''+py_1'+qy_1) + C_2(y_2''+py_2'+qy_2) \equiv 0$$

jer su, po pretpostavci, $y_1(x)$ i $y_2(x)$ rešenja j-na II reda, pa su oba izraza identički jednaki nuli. Prema tome i lin. komb. $C_1y_1+C_2y_2$

11.3 Def. lin. nezavisnosti rešenja $y_1(x)$, $y_2(x)$ i det. Vronskog.

– Dva rešenja, $y_1(x)$ i $y_2(x)$, su lin. nezav. ako je $\frac{y_2}{y_1} = u(x)$ ($\neq const.$) odn. $\alpha y_1 + \beta y_2 \neq 0$ (α i β različite od nule)

def. Ako su $y_1(x)$ i $y_2(x)$ dva rešenja hom. j-ne $y''+p(x)y'+q(x)y=f(x)$ tada se funkcionalna det.

$$\boxed{W(x) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}}$$

zove determinanta Vronskog

Teo. Ako su $y_1(x)$ i $y_2(x)$ dva lin. nezav. rešenja j-ne $y''+p(x)y'+q(x)y=f(x)$, tada je odgovarajuća det. Vronskog

$$W(x) \neq 0, \ \forall x \in (a,b),$$

a ako su lin. zav. tada je $W(x)=0$.

11.4 Dokazati teo. o vezi lin. nezavisnosti rešenja i det. Vronskog

pps. $W(x_0)=0$ u nekoj tački $x_0 \in (a,b)$

$$W(x_0) = \begin{vmatrix} y_{10} & y_{20} \\ y_{10}' & y_{20}' \end{vmatrix} = 0$$

gde je $y_{10}=y_1(x_0)$, $y_{10}'=y_1'(x_0)$, $y_{20}=y_2(x_0)$, $y_{20}'=y_2'(x_0)$. Posmatrajmo hom. sis. linearnih algebarskih j-na:

$$(S) \quad \begin{cases} \alpha y_{10} + \beta y_{20} = 0 \\ \alpha y_{10}' + \beta y_{20}' = 0 \end{cases},$$

čija det. $D = W(x_0) = 0$, te sistem (S) osim trivijalnog rešenja ima i netrivijalno $\{\alpha,\beta\}$, pomoću koga ćemo obrazovati novu f-ju.

$\bar{y}(x) = \alpha y_1(x) + \beta y_2(x)$, koja u skladu sa teoremom o zavisnosti (nezavisnosti dva rešenja) takođe predstavlja rešenje dif. j-ne II reda. S obzirom na sistem (S), u tački x_0 važi uslov:

$$\bar{y}(x_0) = \alpha y_1(x_0) + \beta y_2(x_0) \qquad (\circ)$$

Međutim, osim f-je $\bar{y}(x)$, početni uslov $(\circ)$ zadovoljava i f-ja $y=0$, koja odgovara trivijalnom rešenju sistema (S), a to protivureči Peanovoj teoremi. Dakle $W(x) \neq 0$, $\forall x \in (a,b)$

Ako je u drugom slučaju, $y_2/y_1 = k$ $(\neq 0)$ tj. $y_2 = k y_1$, tada je, očigledno,

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1 & ky_1 \\ y_1' & ky_1' \end{vmatrix} = 0.$$

11.6. Navesti teoremu o opštem rešenju lin. hom. dif. j-ne II reda.

Teo: Ako su y_1 i y_2 dva lin. nez. rešenja, tj. takva rešenja dif. j-ne II reda da je uvek $\frac{y_2}{y_1} \neq const.$, tada netrivijalna lin. komb. tih f-ja $y = C_1 y_1 + C_2 y_2$ predstavlja opšte rešenje dif. j-ne II reda.

12. Nalaženje opšteg rešenja hom. lin. dif. j-ne II reda, ako je poznato jedno partikularno rešenje (12.1. prethodno pitanje)

12.2. Navesti teo. opštem rešenju hom. lin. dif. j-ne (11.5) + (2)

Teo: Ako je $y(x)$ neko rešenje hom. lin. dif. j-ne $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$ onda je $Cy(x)$, gde je $C \neq 0$ proizvoljna konstanta, rešenje te j-ne. * – II reda

(2) Teo: Opšte rešenje hom. lin. j-ne n-tog reda

$$y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + p_2 y^{(n-2)} + \dots + p_{n-1} y' + p_n y = f(x), \quad \boxed{f(x) = 0}$$

ima oblik

$$\boxed{y_h = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \dots + C_n y_n,}$$

gde je $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ fundamentalni sistem rešenja te j-ne, a $C_1, C_2, \dots, C_n$ su integracione konstante.

12.3. Ako je poznato jedno netrivijalno rešenje hom. lin. j-ne II reda, onda se drugo, lin. nezavisno rešenje, nalazi iz j-ne I reda. Dokazati.

Teo: Ako je $y_1(x)$ jedno partikularno rešenje j-ne II reda

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0,$$

onda se drugo, lin. nezavisno rešenje $y_2(x)$ nalazi iz j-ne I reda.

12.3. DOK: Prema pretpostavci je

$$y_2 = \underline{\underline{u y_1}} \Rightarrow y_2' = \underline{\underline{u y_1'}} + u' y_1$$

$$y_2'' = \underline{\underline{u \cdot y_1''}} + 2u' y_1' + \boxed{u'' y_1}$$

$$y_2'' + p y_2' + q y_2 = u\left[y_1'' + p y_1' + q y_1\right] + u'(2y_1' + p y_1) + u'' y_1$$

gde su leva strana (lin. dif. j-na II reda po y_2) i $u[y_1'' + p y_1' + q y_1]$ identički je jednaki 0 ($\equiv 0$). Zato ostaje:

$$u'(2y_1' + p y_1) + u'' y_1 = 0$$

$$\left(2\frac{y_1'}{y_1} + p\right)u' + \frac{du'}{dx} = 0,$$

što predstavlja j-nu I reda po u'. Odatle nalazimo (razdvajanjem promenljivih) $u(x)$ i zatim neposredno $u(x)$, čime dobijamo $\boxed{y_2 = y_1 u}$

13. Hom. lin. dif. j-na II reda s const. koeficijentima

13.1. Napisati opšti oblik hom. lin. dif. j-ne II reda s const. koef.

$$\boxed{y'' + a_1 y' + a_2 y = 0} \qquad (*)$$

13.2. Izvesti karakterističnu j-nu date homogene j-ne

Potražimo jedno rešenje (*) j-ne sa const. koef. u obliku $y = e^{kx}$, gde const. k treba odrediti tako da f-ja e^{kx} identički zadovoljava tu j-nu

$$\left.\begin{matrix} y' = k e^{kx} \\ y'' = k^2 e^{kx} \end{matrix}\right\} \Rightarrow k^2 e^{kx} + a_1 \cdot k e^{kx} + a_2 e^{kx} = 0$$

$$e^{kx}(k^2 + a_1 k + a_2) = 0, \quad \boxed{e^{kx} \neq 0 \ \forall k}$$

$$\boxed{k^2 + a_1 k + a_2 = 0}$$

Dakle, eksponencijalna f-ja e^{kx} će biti rešenje hom. j-ne ako i samo ako je k koren kvadratne j-ne, tzv. karakteristične j-ne date hom. j-ne.

13.3. Napisati opšte rešenje u zavisnosti od korena karakteristične j-ne

1° $k_1 \neq k_2$ $(k_1, k_2 \in \mathbb{R}) \Rightarrow \boxed{y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}}$

2° $k_1 = k_2$ $(\equiv k,\ k \in \mathbb{R}) \Rightarrow \boxed{y = C_1 e^{kx} + C_2 x e^{kx}}$

3° k_1 i k_2 konjugovano kompleksni oblika $k_{1/2} = \alpha \pm i\beta$, $\beta \neq 0$

$$\left.\begin{matrix} y_1 = e^{\alpha x}\cos\beta x \\ y_2 = e^{\alpha x}\sin\beta x \end{matrix}\right\} \Rightarrow \boxed{y = C_1 e^{\alpha x}\cos\beta x + C_2 e^{\alpha x}\sin\beta x}$$

14. Metoda neodređenih koef. za rešavanje nehomogene lin. dif. j-ne II reda sa konst. koef.

14.1. Def. nehom. lin. dif. j-ne II reda

Def: Lin. dif. j-na II reda je j-na linearna u odn. na nepoznatu f-ju i njene izvode I i II reda

$$\boxed{y''+p(x)y'+q(x)y=f(x)}$$

Ako je $f(x) \equiv 0$ j-na je homogena.

14.2. Struktura opšteg rešenja nehomogene lin. dif. j-ne II reda

Opšte rešenje nehom. lin. dif. j-ne II reda je zbir opšteg rešenja odgovarajuće homogene (j-ne sa leve str. jednakosti) i proizvoljnog partikularnog rešenja $y_p(x)$ date nehom. j-ne

$$\boxed{y=C_1y_1+C_2y_2+y_p(x)}$$

14.3. Metoda neodređenih koef. za rešavanje NHLDJ II reda sa const. k.

$$\cancel{y^{(n)}+p_1 y^{(n-1)}+p_2 y^{(n-2)}+\dots+p_{n-1}y'+p_n y=f(x)}$$

$$y''+p_1y'+p_2y=f(x)$$

$p_i=$ const. $i=1,2$

1° $f(x)=e^{\alpha x}[P(x)\cos\beta x+Q(x)\sin\beta x]$, $P(x)$ i $Q(x)$ - polinomi

$st(P)=p$ i $st(Q)=q$

(stepeni polinoma P i Q)

$$\boxed{y_p=x^k e^{\alpha x}[R(x)\cos\beta x+S(x)\sin\beta x]}$$

$R(x)$ i $S(x)$ polinomi sa neodređenim koef.

- $st(R)=st(S)=\max\{p,q\}$
- $k=\begin{cases}0, & \text{ako je } \alpha\pm i\beta \text{ nije koren karakteristične j-ne}\\ \text{višestrukost korena } \alpha\pm i\beta\end{cases}$

Koeficijenti se određuju uvrštavanjem u samu j-nu.

- Spec. slučajevi:

1° $\alpha=0,\ \beta=0 \Rightarrow f(x)=P(x)$

2° $\alpha=0,\ \beta\neq 0 \Rightarrow f(x)=P(x)\cos\beta x+Q(x)\sin\beta x$ ($P/Q\equiv 0$ moguće)

3° $\alpha\neq 0,\ \beta=0 \Rightarrow f(x)=e^{\alpha x}P(x)$

5. Metoda varijacije konstanti za rešavanje nehomogene lin. dif. j-ne II reda

(15.1. - prethodno pitanje, 15.2 - prethodno pitanje)

15.3. Izvesti metodu varijacije konstanti za rešavanje NHLDJ II reda.

Ova metoda se koristi i pri rešavanju NHJ sa const. koef. kada je $f(x)$ proizvoljna f-ja.

Pretpostavimo da smo za odgovarajuću homogenu j-nu

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$$

našli njena opšte rešenje $y_h = C_1y_1 + C_2y_2$. Partikularno rešenje nehomogene j-ne $y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x)$ tražićemo u obliku

$$y_p = C_1(x)y_1 + C_2(x)y_2 \quad (*)$$

(varirаćemo const.) gde su $C_1(x)$ i $C_2(x)$ nepoznate f-je koje treba odrediti iz uslova $y_p(x)$ da identički zadovoljava datu nehom. j-nu, a y_1 i y_2 poznata lin. nez. par. rešenja hom. j-ne. Diferenciranjem izraza $(*)$

$$y'_p = C'_1(x)y_1 + C_1(x)y'_1 + C'_2(x)y_2 + C_2(x)y'_2$$

$$** \quad - \quad C'_1(x)y_1 + C'_2(x)y_2 = 0$$ - zato što su $C_1(x)$ i $C_2(x)$ f-je takve da izraz y'_p ima isti oblik kao i kad zavisi od običnih konstanata C_1 i C_2

$$\Downarrow$$

$$(***) \begin{cases} y'_p = C_1(x)y'_1 + C_2(x)y'_2 \\ y''_p = C_1(x)y''_1 + C_2(x)y''_2 + C'_1(x)y'_1 + C'_2(x)y'_2 \end{cases}$$

Pomnožimo y_p sa $q(x)$, y'_p sa $p(x)$ i unesimo, zajedno sa y''_p, u nehom. j-nu.

$$C_1(x)\underbrace{[y''_1 + py'_1 + qy_1]}_{=0} + C_2(x)\underbrace{[y''_2 + py'_2 + qy_2]}_{=0} + C'_1(x)y'_1 + C'_2(x)y'_2 = f(x)$$

jer su y_1 i y_2 rešenja homogene (po pretpostavci)

$$C'_1(x)y'_1 + C'_2(x)y'_2 = f(x) \quad (2)$$

Iz $(**)$ i (2) dobija se

$$\begin{aligned} C'_1(x)y_1 + C'_2(x)y_2 &= 0 \\ C'_1(x)y'_1 + C'_2(x)y'_2 &= f(x) \end{aligned} \quad , \quad W(x) \neq 0$$

$$C'_1(x) = \frac{1}{W(x)}(-y_2 \cdot f(x)) \qquad C'_2(x) = \frac{1}{W(x)} y_1 \cdot f(x)$$ $\boxed{W(x) \text{ det. Vronskog}}$

Zatim se integrale f-je $C_1(x)$ i $C_2(x)$, prilikom čega se mogu uvesti proizvoljne konstante i odmah formirati opšte rešenje NHLDJ

16. Hom. lin. dif. jne višeg reda. Fundamentalni sis. rešenja. Def. Vronskog (R)

16.1 Napisati opšti oblik hom. lin. dif. jne n-tog reda

$$y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + p_2 y^{(n-2)} + \dots + p_{n-1} y' + p_n y = f(x) \quad / \quad f(x)=0$$

16.2. Def. lin. nezavisnost rešenja $y_1(x) \dots y_n(x)$ i det. Vronskog

Def: Sistem n fja $\varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x)$ je linearno zavisan ako se bilo koja od tih fja može predstaviti kao netrivijalna lin. kom. ostalih, a linearno nezavisan ako se nijedna od tih fja ne može predstaviti kao netrivijalna lin. kom.

Drugim rečima, sistem n fja $\varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x)$ je LZ ako postoje konst. $C_1, \dots, C_n$ koje nisu sve 0, takve da je

$$\sum_{i=1}^{n} C_i \varphi_i(x) = C_1 \varphi_1(x) + \dots + C_n \varphi_n(x) = 0$$

LNZ, ako je, ma kakve bile konst. $C_1, \dots, C_n$ koje nisu sve 0, uvek

$$\sum_{i=1}^{n} C_i \varphi_i(x) = C_1 \varphi_1(x) + \dots + C_n \varphi_n(x) = \phi(x)$$

Def: Ako su $y_1(x), \dots, y_n(x)$ partikularna reš. HLDJ n-tog reda onda odgovarajuća det. Vronskog glasi:

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ y_1' & y_2' & & y_n' \\ \vdots & & & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \dots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

16.3 Navesti teo. ovezi lin. nezavisnosti rešenja i det. Vronskog

Teo: Da bi sis. od n partikularnih reš. $y_1(x) \dots, y_n(x)$ HJna n-tog reda bio lin. nezavisan (tj. fundamentalni sistem), neophodno je i dovoljno da det Vronskog bude za sve dopustive x različita od nule:

$$\boxed{W(x) \neq 0}$$

16.4. Navesti teo. o opštem rešenju HLDJ n-tog reda

Teo: Opšte rešenje hom. jne n-tog reda ima oblik

$$\boxed{y_h = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \dots + C_n y_n}$$

gde je $y_1(x), \dots, y_n(x)$ fundamentalni sis. rešenja te jne, a $C_1, \dots, C_n$ integracione konstante

17. Opšte rešenje NHDJ n-tog reda. Metoda varijacije konstanti:

17.1. Def. nehom. LDJ n-tog reda

$$\boxed{y^{(n)}+p_1y^{(n-1)}+p_2y^{(n-2)}+\dots+p_{n-1}y'+p_ny=f(x)},\quad f(x)\neq 0$$

17.2 Struktura opšteg rešenja NHLDJ n-tog reda

Opšte rešenje NHJ n-tog reda je zbir opšteg rešenja $y_h(x)$ odgovarajuće homogene i jednog, bilo kojeg, partikularnog rešenja $y_p(x)$ te nehom. f-je

$$\boxed{y=C_1y_1+\dots+C_ny_n+y_p}$$

17.3 Navesti metodu varijacije konstanti za rešavanje NHLDJ n-tog reda

U slučaju NHLDJ II reda imali smo f-je $C_1(x)$ i $C_2(x)$ u ovom slučaju biće ih n $(C_1(x),\dots,C_n(x))$

$$y_h=C_1y_1(x)+\dots+C_ny_n(x)$$

$$y_{nh}=C_1(x)y_1(x)+\dots+C_n(x)y_n(x)$$

F-je $C_1(x),\dots,C_n(x)$ se dobijaju iz sistema

$$\begin{aligned}&C_1'y_1+\dots+C_n'y_n=0\\&C_1'y_1'+\dots+C_n'y_n'=0\\&\dots\dots\dots\\&C_1'y_1^{(n-1)}+\dots+C_n'y_n^{(n-1)}=f(x)\end{aligned}$$

$$\det=W(x)\neq 0 \Rightarrow C_1'=U_1(x) \qquad \Rightarrow C_1=\int u_1(x)dx+C_1$$

$$C_n'=U_n(x) \qquad C_n=\int u_n(x)\,dx+C_n$$

$$\boxed{y_{nh}=\sum_{i=1}^{n}\left(\int u_i(x)dx+C_i\right)\cdot y_i=\underbrace{\sum_{i=1}^{n}C_iy_i}_{y_h}+\underbrace{\sum_{i=1}^{n}y_i\left(\int u_i dx\right)}_{y_p}}$$

18. HLDJ n-tog reda sa const. koef.

18.1 Def. hom. lin. DJ n-tog reda

$$\boxed{y^{(n)}+p_1y^{(n-1)}+p_2y^{(n-2)}+\dots+p_{n-1}y'+p_ny=f(x)},\quad \boxed{f(x)=0}$$

18.2 Izvesti karakterističnu j-nu date homogene

Rešenje HLDJ n-tog reda ~~potražimo~~ sa const. koef. potražimo u obliku $y=e^{kx}$, gde k treba odrediti tako da f-ja e^{kx} identički zadovoljava tu j-nu.

$$\left.\begin{aligned}y'&=ke^{kx}\\y''&=k^2e^{kx}\\&\vdots\\y^{(n)}&=k^ne^{kx}\end{aligned}\right\}\Rightarrow k^ne^{kx}+p_1k^{(n-1)}e^{kx}+\dots+p_{n-1}ke^{kx}+p_ne^{kx}=0 \;/:e^{kx}$$

$$\boxed{k^n+p_1k^{(n-1)}+\dots+p_{n-1}k+p_n=0}$$

jer je $e^{kx}\neq 0$ za bilo koje k

18.3. Napisati opšte rešenje u zavisnosti od korena karakteristične j-ne

J-na $k^n + p_1 k^{(n-1)} + \dots + p_{n-1} k + p_n = 0$ je karakteristična j-na date hom. n-tog reda. i koja ima n rešenja: $k_1, \dots, k_n$. Rešenja karakteristične j-ne $k_1, \dots, k_n$ generisaće tražena, nezavisna partikularna rešenja $y_1, \dots, y_n$, a samim tim i opšte rešenje date LHDJ. sa const. koef.

1° slučaj: $k_1 \dots k_n$ su realna i različita $\Rightarrow y_1 = e^{k_1 x} \dots y_n = e^{k_n x}$

2° slučaj: postoje jednaka (višestruka) realna rešenja $k_1 = \dots = k_t$

$\Rightarrow y_1 = e^{k_1 x}, y_2 = x e^{k_2 x}, \dots, y_t = x^{t-1} e^{k_t x}$

3° slučaj: postoje nerealna (kompleksna), različita rešenja

$k_{1/2} = \alpha \pm i\beta \Rightarrow y_1 = e^{\alpha x}\cos\beta x$

$y_2 = e^{\alpha x}\sin\beta x$

4° slučaj: postoje višestruka kompleksna rešenja $k_1 = \dots = k_t = \alpha + i\beta$,

$k_{t+1} = \dots = k_{2t} = \alpha - i\beta \Rightarrow y_1 = e^{\alpha x}\cos\beta x, \; y_2 = x e^{\alpha x}\cos\beta x \dots y_t = x^{t-1} e^{\alpha x}\cos\beta x$

$y_{t+1} = e^{\alpha x}\sin\beta x, \; y_{t+2} = x e^{\alpha x}\sin\beta x$

$y_{2t} = x^{t-1} e^{\alpha x}\sin\beta x$

19. Metoda neodređenih koef. za rešavanje NHLDJ n-tog reda sa KK Struktura opšteg rešenja NHLDJ.

19.1. Napisati NHLDJ n-tog reda

$y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + \dots + p_{n-1} y' + p_n y = f(x)$

19.2. Struktura opšteg rešenja NHLDJ

$y = C_1 y_1 + \dots + C_n y_n + y_p$ (rešenje odgovarajuće homogene i partikularno rešenje početne)

19.3. Metoda neodređenih koef.

$y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + \dots + p_{n-1} y' + p_n y = f(x)$

leva strana jednakosti je odgovarajuća homogena j-na čije rešenje se dobija rešavanjem karakteristične j-ne $y_H = C_1 y_1 + \dots + C_n y_n$. Problem se svodi na nalaženje y_p polazne NHDJ, ako se zna da je $y = y_H + y_p$

Ako je $f(x) = e^{\alpha x}[P_{m_1}(x)\cos\beta x + Q_{m_2}(x)\sin\beta x]$ ($P_{m_1}(x)$ i $Q_{m_2}(x)$ su polinomi stepena m_1 i m_2) $\Rightarrow$

$y_p = x^k e^{\alpha x}[P^*_m(x)\cos\beta x + Q^*_m(x)\sin\beta x]$, $m = \max\{m_1, m_2\}$

$P^*_m(x)$ i $Q^*_m(x)$ polinomi m-tog stepena sa neodređenim koeficijentima i k višestrukost korena $\alpha \pm i\beta$ u karakterističnoj j-ni

1° $f(x) = P_{m_1}(x)\cos\beta x + Q_{m_2}(x)\sin\beta x \Rightarrow \boxed{\alpha = 0}$

$y_p = x^k [P^*_m(x)\cos\beta x + Q^*_m(x)\sin\beta x]$, k-višestrukost korena $0 \pm i\beta$

2° $f(x) = e^{\alpha x} P_m(x) \Rightarrow \boxed{\beta = 0}$

$y_p = x^k e^{\alpha x} P^*_m(x)$, k višestrukost korena $\alpha + 0i$

3° $f(x) = P_m(x) \Rightarrow \boxed{\alpha = \beta = 0}$

$y_p = x^k P^*_m(x)$, k višestrukost korena $0 + 0i$

4° Ako $\alpha \pm \beta i$ nisu rešenja karakteristične jne, to znači da je $\boxed{k=0}$ tj. $x^k = 1$. Polinom $P^*_m(x)$, sa neodređenim koef., je npr. $P^*_m(x) = A_0 x^m + A_1 x^{m-1} + \dots + A_{m-1}x + A_m$. Tako da je $P^*_0(x) = A$, $P^*_1(x) = Ax$, $P^*_2(x) = Ax^2 + Bx + C$

II - Sistemi lin. dif. jna

1. Sistem LDJ. Egzistencija i jedinstvenost rešenja

1.1. Napisati sis. n linearnih dif. jna I reda u skalarnom i matričnom obliku. Homogen i nehomogen sistem.

$$(*)\quad \begin{aligned} x'_1 &= a_{11}(t)x_1 + \dots + a_{1n}(t)x_n + b_1(t) \\ &\dots \\ x'_n &= a_{n1}(t)x_1 + \dots + a_{nn}(t)x_n + b_n(t) \end{aligned}$$

skalarni oblik

NOS - normalni oblik sistema

, ako ~~je~~ barem jedna od fja $b_1(t), \dots, b_n(t)$ nije identički jednaka 0 sistem $(*)$ se naziva nehomogeni sistem. U suprotnom, sistem $(*)$

$$\begin{aligned} x'_1 &= a_{11}(t)x_1 + \dots + a_{1n}(t)x_n \\ &\dots \\ x'_n &= a_{n1}(t)x_1 + \dots + a_{nn}(t)x_n \end{aligned}$$

i naziva se homogeni sistem.

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad \frac{dX}{dt} = \begin{bmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{bmatrix}, \quad B(t) = \begin{bmatrix} b_1(t) \\ \vdots \\ b_n(t) \end{bmatrix}, \quad A(t) = \begin{bmatrix} a_{11}(t) & \dots & a_{1n}(t) \\ \vdots & & \\ a_{n1}(t) & & a_{nn}(t) \end{bmatrix}$$

$$\boxed{\frac{dX}{dt} = A(t)X + B(t)}$$

- vektorski oblik

$$\begin{bmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}(t) & \dots & a_{1n}(t) \\ \vdots & & \\ a_{n1}(t) & \dots & a_{nn}(t) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1(t) \\ \vdots \\ b_n(t) \end{bmatrix}$$

~~vektorski~~ matrični oblik

1.2. Košijev problem

za sisteme sastoji se u nalaženju rešenja

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= x_1(t) \\ &\vdots \\ x_n &= x_n(t) \end{aligned}\right\} \Rightarrow \text{koje zadovoljava uslov} \quad \begin{aligned} x_1(t_0) &= x^0_1 \\ &\vdots \\ x_n(t_0) &= x^0_n \end{aligned}$$

1.3 Teo. o egzistenciji i jedinstvenosti rešenja

Teo: Neka su f-je $a_{ij}(t)$, $b_i(t)$, $i=1,\dots,n$ i $j=1,\dots,n$, neprekidne na (a,b). Neka $t_0 \in (a,b)$ i neka su $x_1^0 \dots x_n^0$ proizvoljni realni brojevi. Tada sistem

$$\frac{dX}{dt} = A(t)X + B(t)$$

ima jedno rešenje

$$x_1 = x_1(t)$$
$$\vdots$$
$$x_n = x_n(t),$$

koje zadovoljava uslov

$$x_1(t_0) = x_1^0; \dots; x_n(t_0) = x_n^0$$

i ono je def. na celom intervalu (a,b)

2. Hom. sis. LDJ. Osnovna svojstva

2.1. Napisati HS od n LDJ u skalarnom i matričnom obliku

$$\boxed{\frac{dX}{dt} = A(t)\cdot X}$$ ~~skalarni~~ matrični NOS-skalarni

$$\begin{bmatrix} x_1' \\ \vdots \\ x_n' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}(t) & \cdots & a_{1n}(t) \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1}(t) & & a_{nn}(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$ vektorski

2.2 Ako su $X_1(t),\dots,X_n(t)$ rešenja HS, dokazati da je njihova lin. kom. rešenje sistema

Teo: Ako su

$$X_1(t) = \begin{bmatrix} x_{11}(t) \\ \vdots \\ x_{n1}(t) \end{bmatrix}, \dots, X_m(t) = \begin{bmatrix} x_{1m}(t) \\ \vdots \\ x_{nm}(t) \end{bmatrix}$$

rešenja sistema na (a,b) i $C_1,\dots,C_m$ su proizvoljne const., tada

$$X(t) = C_1X_1(t) + \dots + C_mX_m(t) = \begin{bmatrix} C_1x_{11}(t) + \dots + C_mx_{1m}(t) \\ \vdots \\ C_1x_{n1}(t) + \dots + C_mx_{nm}(t) \end{bmatrix}$$

rešenje HS na (a,b)

2.3 Def. lin. nezavisnost rešenja $X_1(t)\dots X_n(t)$ i det. Vronskog

Def: Za m rešenja HS $X_1(t)\dots X_m(t)$ kažemo da su <u>linearno zavisna</u> na (a,b) akko postoje const. $C_1 \dots C_m$, od kojih je bar jedna različita od 0 tako da je $C_1X_1(t) + \dots + C_mX_m(t) = 0$, $a<t<b$,

U suprotnom, tj. ako iz

$$C_1X_1(t) + \dots + C_mX_m(t) = 0, \quad a<t<b,$$

sledi da je $C_1 = \dots = C_m = 0$, kažemo da su rešenja <u>linearno nezavisna</u>.

$$\cancel{\begin{vmatrix} X_{11}(t) & \cdots & X_{1n}(t) \\ \vdots & & \vdots \\ X_{n1}(t) & & X_{nn}(t) \end{vmatrix} \neq 0 \quad a<t<b}$$

Dokaz 2.2. Kako su $X_1(t)\dots X_m(t)$ rešenja sistema $\Rightarrow$

$$\frac{dX(t)}{dt} = C_1\frac{dX_1(t)}{dt} + \dots + C_m\frac{dX_m(t)}{dt} =$$
$$= C_1A(t)X_1(t) + \dots + C_mA(t)X_m(t) = A(t)\cdot\sum_{i=1}^{m} C_iX_i(t)$$
$$= A(t)X(t), \quad a<t<b$$

2.3. det Vronskog

$$\boxed{W(x) = \begin{vmatrix} x_{11}(t) & \dots & x_{1n}(t) \\ \vdots & & \vdots \\ x_{n1}(t) & & x_{nn}(t) \end{vmatrix}}$$

2.4. Iskazati i dokazati teo. o vezi lin. nezav. i det. Vronskog

teo: Neka su

$$X_1(t) = \begin{bmatrix} x_{11}(t) \\ \vdots \\ x_{n1}(t) \end{bmatrix}, \dots, X_n(t) = \begin{bmatrix} x_{1n}(t) \\ \vdots \\ x_{nn}(t) \end{bmatrix}$$

rešenja HS i neka su elementi matrice $A(t)$ neprekidne f-je na (a,b). Tada je potreban i dovoljan uslov za lin. nezavisnost rešenja $X_1(t) \dots X_n(t)$

$$(*) \quad W(x) = \begin{vmatrix} x_{11}(t) & \dots & x_{1n}(t) \\ \vdots & & \\ x_{n1}(t) & \dots & x_{nn}(t) \end{vmatrix} \neq 0 \quad a<t<b$$

Dok: Pokažimo da je uslov potreban. Neka su $X_1(t) \dots X_n(t)$ LNZ i pretpostavimo da $*$ ne važi tj. da postoj $t \in (a,b)$ tako da je

$$W(x) = 0 \quad (x_{ij}(t_0))$$

tada HS lin. algebarskih j-na

$$c_1 x_{11}(t_0) + \dots + c_n x_{1n}(t_0) = 0$$
$$\vdots$$
$$c_1 x_{n1}(t_0) + \dots + c_n x_{nn}(t_0) = 0$$

osim trivijalnog rešenja ima i netrivijalnih rešenja. Neka je $\bar{c}_1, \dots \bar{c}_n$ jedno netrivijalno rešenje datog sistema. No tada je

$$X(t) = \bar{c}_1 X_1(t) + \dots + \bar{c}_n X_n(t)$$

rešenje HS koje zadovoljava početni uslov $X(t_0)=0$. Na osnovu teo. o jedinstv. rešenja je $X(t)=0$, $a<t<b$, tj.

$$\bar{c}_1 X_1(t) + \dots + \bar{c}_n X_n(t) = 0 \quad , t \in (a,b)$$

što je u kontradikciji sa pretpostavkom o lin. nezavisnosti rešenja $X_1(t) \dots X_n(t)$. Dakle $W(x)=0$ je ne održiva pa $W(x) \neq 0$ važi.

Pokažimo sad da je uslov dovoljan. Neka važi $W(x) \neq 0$ i neka je t_0 proizvoljna tačka iz (a,b)

$$W(x) \neq 0 \quad (x_{ij}(t_0))$$

Pretpostavimo da je

$$c_1 X_1(t) + \dots + c_n X_n(t) = 0 \quad a<t<b$$

tada je za $t=t_0$

$$C_1X_1(t_0)+\dots+C_nX_n(t_0)=0, \quad tj.$$

$$C_1x_{11}(t_0)+\dots+C_nx_{1n}(t_0)=0$$
$$\vdots$$
$$C_1x_{n1}(t_0)+\dots+C_nx_{nn}(t_0)=0$$

iz čega sledi da konst. $C_1,\dots,C_n$ zadovoljavaju homogeni sistem lin. algebarskih jna. Det. ovog sistema je $\neq 0$, pa stoga on ima samo trivijalna rešenja, dakle $C_1=\dots=C_n=0$. Obzirom da

$$C_1X_1(t)+\dots+C_nX_n(t)=0 \quad a<t<b$$

sledi $C_i=0$, $i=\overline{1,n}$ $X_1(t),\dots,X_n(t)$ su po def. lin. nezavisna

3. Opšte rešenje hom. sis. [3.1. prethodno; 3.2 -]

3.~~4 Napisati homogen sis.~~

3.3. Iskazati i dok. teo. o opštem rešenju lin. hom. sis. dif. jna

teo: Neka su elementi matrice $A(t)$ neprekidne f-je na (a,b) i neka su

$$X_1(t)=\begin{bmatrix}x_{11}(t)\\ \vdots\\ x_{n1}(t)\end{bmatrix},\dots, X_n(t)=\begin{bmatrix}x_{1n}(t)\\ \vdots\\ x_{nn}(t)\end{bmatrix}$$

lin. nezavisna rešenja HS. Tada je svako rešenje HS oblika

$$X(t)=C_1X_1(t)+\dots+C_nX_n(t), \quad a<t<b$$

DOK: Neka je

$$X(t)=\begin{bmatrix}x_1(t)\\ \vdots\\ x_n(t)\end{bmatrix}$$

proizvoljno rešenje sistema HS, i neka je t_0 ma koja tačka intervala (a,b). Pokažimo da postoje br. $C_1,\dots,C_n$ tako da je

$$C_1X_1(t_0)+\dots+C_nX_n(t_0)=X(t_0)$$
$$\Updownarrow \text{ odn.}$$
$$C_1x_{11}(t_0)+\dots+C_nx_{1n}(t_0)=x_1(t_0)$$
$$\vdots$$
$$C_nx_{n1}(t_0)+\dots+C_nx_{nn}(t_0)=x_n(t_0)$$

$x_1(t),\dots,x_n(t)$ su LNZ, a kako je $t_0\in(a,b)$, a rešenja $x_1(t),\dots,x_n(t)$ su LNZ, na osnovu teo. o potrebnom i dovoljnom uslovu linearne nezavisnosti (2.4)

$$\begin{vmatrix}x_{11}(t_0) & \dots & x_{1n}(t_0)\\ \vdots & & \\ x_{n1}(t_0) & \dots & x_{nn}(t_0)\end{vmatrix}\neq 0.$$

pa konstante $C_1,\dots,C_n$ postoje i jednoznačno su određene. S druge strane $C_1X_1(t)+\dots+C_nX_n(t)$ je rešenje HS:

$$C_1X_1(t_0)+\dots+C_nX_n(t_0)=X(t_0)$$
$$X(t)=X(t_0), \quad t_0\in(a,b)$$
$$\Downarrow$$
$$C_1X_1(t)+\dots+C_nX_n(t)=X(t)$$

4. Fundamentalna matrica HSLDJ. Potreban i dovoljan uslov. Opšte rešenje HS izraženo preko fundamentalne matrice.

4.1. matrični oblik HS

$$\frac{dX}{dt} = A(t)X \qquad \frac{dX}{dt} = \begin{bmatrix} x_1' \\ \vdots \\ x_n' \end{bmatrix}, \quad A(t) = \begin{bmatrix} a_{11}(t) & \cdots & a_{1n}(t) \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1}(t) & & a_{nn}(t) \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

4.2. Def. fundamentalne matrice

Def. Matrica $\Phi(t)$ reda $n \times n$ naziva se fund. matrica HS ako su kolone $\Phi(t)$ linearno nezavisna rešenja sistema $\frac{dX}{dt} = A(t)X$

4.3. Iskazati i dok. potrebne i dovoljne uslove da data matrica bude fundamentalna.

Teo: Matrica $\Phi(t)$ je fundamentalna matrica HS akko je $\Phi(t)$ rešenje $\frac{d\Phi}{dt} = A(t)\Phi$ i ako je $\det \Phi(t) \neq 0 \ \forall t \in (a,b)$

Dok: Ako je $\Phi(t)$ fundamentalna matrica, njene kolone su po def. linearno nezavisna rešenja $\frac{dX}{dt} = A(t)X$. Na osnovu teoreme o linearnoj nezavisnosti rešenja sistema $\frac{dX}{dt} = A(t)X$ i veze def Vronskog, znamo da je determinanta $\neq 0$, $a<t<b$.

Neka je sada $\det\Phi(t) \neq 0$, $a<t<b$. Kako $\Phi(t)$ zadovoljava matričnu dif. jnu. $\left[\frac{d\Phi}{dt} = A(t)\Phi\right]$, kolone matrice $\Phi(t)$ su rešenja $\frac{dX}{dt} = A(t)X$. Na osnovu teoreme o nezavisnosti (linearnoj) rešenja sistema, kolone matrice $\Phi(t)$ su lin. nez. Dakle $\Phi(t)$ je po def. fund. mat.

4.4. Opšte rešenje izraženo preko fundamentalne matrice

$$\boxed{X(t) = \Phi(t) \cdot C}$$ matrični zapis *(ovo je zapravo odgovor na pitanje)

$X = C_1X_1 + \cdots + C_nX_n$ vektorski zapis

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= C_1x_{11} + \cdots + C_nx_{1n} \\ &\vdots \\ x_n &= C_1x_{n1} + \cdots + C_nx_{nn} \end{aligned}\right\}$$ skalarni zapis

5. Nehomogeni sis. LDJ. Opšte rešenje nehom. sis.

5.1 Napisati NHS od n DJ I reda i pridruženi hom. sis. u skal. i mat. oblike

$\frac{dX}{dt} = A(t)X + B(t)$ $\qquad \frac{dX}{dt} = A(t)X$ — pridruženi homogeni sistem

~~$x_1' = a_{11}(t)x_1 + \cdots + a_{1n}(t)x_n$~~

$$\begin{bmatrix} x_1' \\ \vdots \\ x_n' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}(t) & \cdots & a_{1n}(t) \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1}(t) & \cdots & a_{nn}(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1(t) \\ \vdots \\ b_n(t) \end{bmatrix}$$, za $B(t)=0$ — sistem je homogen

$$x_1' = a_{11}(t)x_1 + \cdots + a_{1n}(t)x_n + b_1(t)$$
$$\vdots$$
$$x_n' = a_{n1}(t)x_1 + \cdots + a_{nn}(t)x_n + b_n(t)$$

SRY :'(

5.2 Ako su $x_1(t) \dots x_n(t)$ rešenja pridruženog hom. sis. i $y(t)$ partikularno rešenje nehomogenog sistema, dokazati da je
$$x_{nh}(t) = C_1 x_1(t) + \dots + C_n x_n(t) + y(t)$$

20

DOK: Neka je $X(t)$ proizvoljno reš. NHS i neka $t_0 \in (a,b)$

(o) $C_1 x_1(t_0) + \dots + C_n x_n(t_0) + y(t_0) = x(t_0)$

$\boxed{OK!O}$

$$(*) \begin{cases} C_1 x_{11}(t_0) + \dots + C_1 x_{1n}(t_0) + y_1(t_0) = x_1(t_0) \\ \vdots \\ C_1 x_{n1}(t_0) + \dots + C_n x_{nn}(t_0) + y_n(t_0) = x_n(t_0), \end{cases}$$

kako je $t_0 \in (a,b)$ a rešenja $x_1(t), \dots, x_n(t)$ lin nezavisna, na osnovu teo. o potrebnoj i dovoljnosti uslova lin. nezavisnosti rešenja važi

$$\begin{vmatrix} x_{11}(t_0) & \dots & x_{1n}(t_0) \\ \vdots & & \\ x_{n1}(t_0) & & x_{nn}(t_0) \end{vmatrix} \neq 0$$

pa konstante zadovoljavaju (*). S druge str. na osnovu linearnosti $C_1 x_1(t) + \dots + C_n x_n(t) + y(t)$ je rešenje $\frac{dX}{dt} = A(t)X$. Prema (o) rešenja $C_1 x_1(t) + \dots + C_n x_n(t)$ i ~~$X(t)$~~ imaju istu vrednost u $t_0 \in (a,b)$ stoga se po teo. moraju poklapati na čitavom intervalu (a,b) $\forall t$:

$$X(t) = x_1 C_1(t) + \dots + x_n C_n(t), \quad a < t < b$$

Pokažimo da se mogu odrediti konstante $C_1, \dots, C_n$ tako da je

$$C_1 x_1(t_0) + \dots + C_n x_n(t_0) + y(t_0) = X(t_0)$$

Osim toga

$$\frac{d}{dt}\Big(\underbrace{C_1 x_1(t) + \dots + C_n x_n(t)}_{\sum C_i x_i(t)} + y(t)\Big) = \underbrace{C_1 \frac{dx_1}{dt} + \dots + C_n \frac{dx_n}{dt}}_{\sum C_i \frac{dx_i}{dt}} + \frac{dy}{dt} =$$
$$= C_1 A(t) x_1(t) + \dots + C_n A(t) x_n(t) + A(t) y(t) + B(t) =$$
$$= A(t)\big(C_1 x_1(t) + \dots + C_n x_n(t) + y(t)\big) + B(t).$$

Dakle $C_1 x_1(t) + \dots + C_n x_n(t) + y(t)$ je rešenje $\frac{dX}{dt} = A(t)X + B(t)$, koje zadovoljava početni uslov kao rešenje $X(t)$. Na osn. teo. o jedinstvenosti rešenja

$$X(t) = C_1 x_1(t) + \dots + C_n x_n(t) + y(t), \quad a < t < b$$

5.3 Pod kojim uslovom n-parametarska familija $x_{nh}(t)$ sadrži sva rešenja NHS.

Svi elementi matrice $A(t)$ i vektora $B(t)$ moraju biti neprekidni na (a,b) i da su $x_1(t), \dots, x_n(t)$ lin. nezavisna rešenja pridruženog homogenog sistema i da je $y(t)$ partikularno rešenje NHS.

Metoda varijacije konst. za rešavanje sistema

6.3 $x_1(t) = \begin{bmatrix} x_{11}(t) \\ \vdots \\ x_{n1}(t) \end{bmatrix}, \dots, x_n(t) = \begin{bmatrix} x_{1n}(t) \\ \vdots \\ x_{nn}(t) \end{bmatrix}$

Neka su $x_1(t), \dots, x_n(t)$ lin. nez. reš. sis. $\frac{dx}{dt} = A(t)x$.

Potražimo reš. NHS u obliku

~~$x(t) = c_1(t)x_1(t) + \dots + c_n(t)x_n(t)$~~

$$x(t) = c_1(t)x_1(t) + \dots + c_n(t)x_n(t)$$

gde je $x(t)$ rešenje $\frac{dx}{dt} = A(t)x + B(t)$, $a<t<b$

$$\frac{dc_1}{dt}x_1 + c_1\frac{dx_1}{dt} + \dots + \frac{dc_n}{dt}x_n + c_n\frac{dx_n}{dt} =$$

$$= A(t)(c_1x_1 + \dots + c_nx_n) + B(t) \Rightarrow$$

$$\frac{dc_1}{dt}x_1 + \dots + \frac{dc_n}{dt}x_n = B(t)$$

$$\left.\begin{aligned} &\frac{dc_1}{dt}x_{11} + \dots + \frac{dc_n}{dt}x_{1n} = b_1(t) \\ &\vdots \\ &\frac{dc_1}{dt}x_{n1} + \dots + \frac{dc_n}{dt}x_{nn} = b_n(t) \end{aligned}\right\} (SAJ) \to \text{sistem linearnih algebarskih j-na}$$

Kako su $x_1(t), \dots, x_n(t)$ lin. nez. reš. HS, det. sistema lin. algb. j-na (SAJ) je razl. od 0 pa sis. ima jedinstveno rešenje

$$\frac{dc_1}{dt} = v_1(t), \dots, \frac{dc_n}{dt} = v_n(t)$$

$c_1(t), \dots, c_n(t)$ određuju se integracijom

$$c_1(t) = \int v_1(t)dt + C_1, \dots, c_n(t) = \int v_n(t) + C_n$$

pritom $c_i(t)$ $(i=1,\dots,n)$ zavise od const. C_i koje se javljaju pri integraciji. Za tako određene f-je $c_i(t)$ jasno je da je rešenje sistema:

$$x(t) = c_1(t)x_1(t) + \dots + c_n(t)x_n(t) = \left(\int v_1(t)dt + C_1\right)x_1(t) + \dots + \left(\int v_n(t)dt + C_n\right)x_n(t)$$

Kako je $x(t) = C_1(t)x_1(t) + \dots + C_n(t)x_n(t) + x_1(t)\int v_1 dt + \dots + x_n(t)\int v_n(t)\,dt$

imamo da je $x(t)$ zbir opšteg rešenja HS i partikularnog NHS

6.2 Struktura opšteg rešenja ~~H~~ NHS

$$\boxed{x(t) = C_1x_1(t) + \dots + C_nx_n(t) + y(t)}$$

opšte rešenje homogenog sis. + partikularno rešenje nehomogenog sis.

7. Rešavanje HSLDJ s KK. Karakteristična jna i karak. vrednosti. Jednostruki realni koreni

7.1. Napisati HS od n LDJ I reda sa KK

$$\boxed{\begin{aligned} x_1' &= a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n \\ &\vdots \\ x_n' &= a_{n1}x_1 + \dots + a_{nn}x_n \end{aligned}} \qquad (\circ)$$

gde su a_{ij} $(i,j = 1,\dots,n)$ konstante.

7.2. Izvesti karakterističnu jnu

Da bi se odredilo opšte rešenje $(\circ)$ sistema, dovoljno je naći n linearno nezavisnih rešenja ovog sistema. Potražimo ga u obliku

$$\boxed{\begin{aligned} x_1 &= A_1 e^{\lambda t} \\ &\vdots \\ x_n &= A_n e^{\lambda t}, \end{aligned}}$$

gde su $A_1,\dots,A_n$ konstante i λ isto. Tada je

$$\begin{aligned} x_1' &= \lambda A_1 e^{\lambda t} \\ &\vdots \\ x_n' &= \lambda A_n e^{\lambda t} \end{aligned}$$

Smenom u $(\circ)$ dobijamo

$$\begin{aligned} \lambda A_1 e^{\lambda t} &= e^{\lambda t}(a_{11}A_1 + \dots + a_{1n}A_n) \\ &\vdots \\ \lambda A_n e^{\lambda t} &= e^{\lambda t}(a_{n1}A_1 + \dots + a_{nn}A_n) \end{aligned} \quad \Big/ : e^{\lambda t}, \; -\lambda A_i$$

$$\begin{aligned} (a_{11}-\lambda)A_1 + \dots + a_{1n}A_n &= 0 \\ &\vdots \\ a_{n1}A_1 + \dots + (a_{nn}-\lambda)A_n &= 0 \end{aligned}$$

Sistem ima netrivijalna rešenja akko je njegova det jednaka 0

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{n1} & \dots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

Jna se zove **karakteristična jna**, njena rešenja $\lambda_1,\dots,\lambda_n$ nazivaju se **karakteristične vrednosti**.

$$\boxed{\det(A-\lambda I)=0}$$

7.3 Jednostruki koren (realni)

$\lambda = a$, za λ iz karakteristične jne

$$X = u e^{\lambda t}, \quad x_i = u_i e^{\lambda t}$$

gde je u sopstveni vektor koji odgovara sopstvenoj vrednosti λ, tj. u je rešenje jne $(A - \lambda I)u = 0$

$$\begin{aligned} (a_{11} - \lambda)u_1 + \dots + a_{1n}u_n &= 0 \\ &\vdots \\ a_{n1}u_1 + \dots + (a_{nn} - \lambda)u_n &= 0 \end{aligned} \Rightarrow \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{n1} & & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \lambda$$

8.3. Jednostruki kompleksni koreni

$\lambda = \alpha \pm i\beta$, za λ iz karakteristične jne.

$$X_{kom} = u e^{\lambda i t},$$

gde je u jedan sopstveni vektor koji odgovara λ_i

$$X_i = Re(X_{kom}) \qquad X_{i+1} = Im(X_{kom})$$

$e^{it} = \cos t + i \sin t$ – Ojlerova jna

9.3. Realni višestruki koren

$\lambda = a$ je realan koren reda k

$$x_1 = P_1(t)e^{at}$$

$$x_n = P_n(t)e^{at}$$

gde su $P_1(t), \dots, P_n(t)$ polinomi stepena $k-1$, tj.

$$P_1(t) = A_1 + A_2 t + \dots + A_k t^{k-1} = B_1 + B_2 t + \dots + B_k t^{k-1} \text{ itd}$$

Koeficijenti ovih polinoma (njih ukupno $k \cdot n$) određuju se uvrštavanjem u HSLDJ sa KK.
Rešava se dobija sistem LJ čija matrica ima rang $k(n-1)$
Stoga se dati sis. može svesti na kvazi trougaoni oblik sa k slobodnih i $k(n-1)$ vezanih promenljivih.

10. Određivanje fundamentalne matrice pomoću matričnog eksponenta

10.1. Def. pojam matričnog eksponenta

Matrični eksponent e^A je matrica koja se definiše sa:

$$\boxed{e^A \overset{\text{def}}{=} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!} = I + A + \frac{A^2}{2!} + \frac{A^3}{3!} + \cdots}$$

Pokazuje se da je matrica e^A dobro def., tj. da red $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}$ konvergi za svaku realnu ili kompleksnu matricu $A = \|a_{ij}\|_{n \times n}$.

10.2 Naći izvod matričnog eksponenta e^{At}

$$e^{At} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(At)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!} t^k$$

$$\frac{d}{dt} e^{At} = \frac{d}{dt} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!} t^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!} \cdot \frac{d}{dt} t^k = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{A^k}{(k-1)!} t^{k-1} =$$

$$= A \sum_{k=1}^{\infty} \frac{A^{k-1}}{(k-1)!} t^{k-1} = A \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!} t^k$$

$$\boxed{\frac{d}{dt} e^{At} = A e^{At}}$$

* Indukcijom se može pokazati da je:

$$\frac{d^m}{dt^m} \left(e^{At}\right) = A^m e^{At}, \quad m \in N$$

Pokazuje se takođe da za proizvoljnu matricu (kvadratnu) A i brojeve t_1 i t_2 važi:

$$\underline{e^{A(t_1+t_2)} = e^{At_1} \cdot e^{At_2}} \quad \text{koristeći ovo svojstvo} \quad \underline{(e^A)^{-1} = e^{-A}} \quad (e^A \text{ nesingularna})$$

$\underline{e^{A+B} = e^A e^B}$ (A i B su istog reda)

$e^{B^{-1}AB} = B^{-1} e^A B$ (B nesingularna)

10.3 Naći fund. mat. HS u LDJ sa KK preko mat. eksponente

$\frac{dX}{dt} = AX$ – hom. sis sa const. koef.

Pokažimo da je: $\Phi(t) = e^{At}$, fund. mat. datog sistema. Kako je

$$\frac{d}{dt} e^{At} = A e^{At} \Rightarrow \underline{\Phi(t) = e^{At}} \text{ zadovoljava matričnu DJ:}$$

$$\boxed{\frac{d\Phi}{dt} = A\Phi}$$

Pored toga $\det e^{At} \neq 0$, prema teo. o potrebnim i dovoljnim uslovima da mat. bude fund. (4.3) zaključujemo da je $\Phi(t) = e^{At}$ fund. mat. hom. sis sa KK.

Opšte rešenje: $\boxed{X(t) = e^{At} \cdot C}$

11. Stabilnost rešenja sistema LDJ sa KK

11.1 Def stabilnost trivijalnog reš. HS od LDJ sa KK

(25.)

Neka je dat sistem lin. j-na:

$$x_1' = a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n + b_1(t)$$
$$\vdots$$
$$x_n' = a_{n1}x_1 + \dots + a_{nn}x_n + b_n(t) \qquad (*)$$

Def: Neka je

$$x_1 = x_1(t, t_0, x_1^0, \dots, x_n^0)$$
$$\vdots$$
$$x_n = x_n(t, t_0, x_1^0, \dots, x_n^0)$$

ono rešenje sistema (*) koje zadovoljava početni uslov:

$$x_1(t_0, t_0, x_1^0, \dots, x_n^0) = x_1^0$$
$$\vdots$$
$$x_n(t_0, t_0, x_1^0, \dots, x_n^0) = x_n^0$$

Dato rešenje je stabilno u smislu Ljapunova akko

$$\{(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0), |x_i^0 - \bar{x}_i^0| < \delta\}, \ i = 1, \dots, n$$

sledi

$$|x_i(t, t_0, x_1^0, \dots, x_n^0) - \bar{x}_i(t, t_0, \bar{x}_1^0, \dots, \bar{x}_n^0)| < \varepsilon, \ i = 1, \dots, n$$

za sve $t_0 \le t < \infty$

gde je

$$x_1 = \bar{x}_1(t, t_0, \bar{x}_1^0, \dots, \bar{x}_n^0)$$
$$\vdots$$
$$x_n = \bar{x}_n(t, t_0, \bar{x}_1^0, \dots, \bar{x}_n^0)$$

ono rešenje sistema (*) koje zadovoljava početni uslov

$$\bar{x}_1(t_0, t_0, \bar{x}_1^0, \dots, \bar{x}_n^0) = \bar{x}_1^0$$
$$\vdots$$
$$\bar{x}_n(t_0, t_0, \bar{x}_1^0, \dots, \bar{x}_n^0) = \bar{x}_n^0$$

11.2 Def. asimptotske stabilnosti triv. reš HS od n LDJ sa KK

Def: Trivijalno rešenje homogenog sistema je asimptotski stabilno akko je stabilno i $\exists \delta_0 > 0$:

$$\boxed{|\bar{x}_i^0| < \delta_0, \ i = 1, \dots, n} \Rightarrow$$

$$\boxed{\lim_{t \to \infty} \bar{x}_i(t, t_0, \bar{x}_1^0, \dots, \bar{x}_n^0) = 0}, \ i = 1, \dots, n$$

11.3 Iskazati teo. o potrebnom i dovoljnom uslovu za asim. stab.

teo: Trivijalno rešenje HS je asimptotski stabilno akko svi koreni karakteristične j-ne

$$\begin{vmatrix} a_{11} - s & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} - s \end{vmatrix} = 0$$

imaju negativne realne delove

11.4. Pod kojim uslovima trivijalno rešenje nije stabilno

- TEO: Ako bar jedno rešenje kar. f-je ima pozitivan realni deo onda trivijalno rešenje AS nije stabilno u smislu Ljapunova
- Ako limes nedefinisan za neko određeno t rešenje nije stabilno
- Ako nije zadovoljen Hurvicov kriterijum

$$\Delta_1 > 0, \dots, \Delta_n > 0$$

gde je Δ_i $(i = 1, \dots, n)$ glavni minor matrice reda $n \times n$ oblika

$$\begin{bmatrix} a_1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_n & a_{n-1} & a_{n-2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & a_n \end{bmatrix}$$

$$F(y, y', y'')$$

$$y' = z, \quad z(y)$$

$$y'' = z' z$$

$$F(y, z, z'z)$$

$$z = z(y, C_1) \Longrightarrow y' = z(y, C_1)$$

$$\frac{dy}{dx} = z(y, C_1)$$

$$\frac{dy}{z(y, C_1)} = dx$$

$$\int \frac{dy}{z(y, C_1)} = \int dx$$

$$\int \frac{dy}{z(y, C_1)} = |x| + C_2$$

Dodatak:

1. Lipšicov uslov: (LU)

Def. Za f-ju se kaže da zadovoljava LU u intervalu $[a,b]$, ako postoji takav pozitivan br. L da je za proizvoljne vrednosti x_1 i x_2 koje pripadaju intervalu $[a,b]$ zadovoljava nejednakost:

$$\boxed{|f(x_2)-f(x_1)| \leq L|x_2-x_1|}$$

2. Singularne tačke

Def. Tačke u kojima uslovi teoreme o egzistenciji i jedinosti nisu ispunjeni zovu se singularne tačke integralnih krivih $y=\varphi(x,c)$

3. Teorema o egzistenciji rešenja j-ne $\frac{dy}{dx}=f(x,y)$, pri uslovu

$y(x_0)=y_0$

• Peanova teorema: Ako je f-ja $f(x,y)$ na desnoj strani j-ne

*) $\frac{dy}{dx}=f(x,y)$ definisana i neprekidna u pravougaonoj oblasti

$$R=\{(x,y): |x-x_0| \leq a,\ |y-y_0| \leq b\},$$

pa prema tome i ograničena

$$|f(x,y)| \leq M \quad ,\ \forall (x,y) \in R,\ M>0$$

tada postoji rešenje $y=y(x)$ j-ne (*) koje zadovoljava početni uslov i definisano i neprekidno diferencijabilno u intervalu:

$$|x-x_0| \leq h \quad ,\ h=\min\left(a, \frac{b}{M}\right)$$

4. Rikartijeve dif. j-ne

$$y'+p(x)y^2+q(x)y=r(x)$$

$p(x), q(x)$ i $r(x)$ neprekidne na $a \leq x \leq b$ $(p(x) \not\equiv 0)$

(svodi se na Bernulijevu

*8) Uslovi za j-nu sa totalnim diferencijalom

$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$, $\frac{\partial P}{\partial y}$; $\frac{\partial Q}{\partial x}$ neprekidni par. izvodi na oblasti D

$$\boxed{F(x,y)=\int dF = C}$$

$$\boxed{dF(x,y) = P(x,y)dx + Q(x,y)=0}$$

6. Ojlerova DJ: (n-tog reda)

$$\boxed{x^n y^{(n)} + a_1 x^{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} x y' + a_n y = f(x)}$$

gde su $a_1, \dots, a_n$ – const., za $f(x)=0$ je homogena

Smenom $x = e^t$ $(t = \ln|x|)$ svodi se na LDJ sa KK

• Karakt. jne ODJ

$$r^2 + (a-1)r + b = 0 \quad (\text{sa korenima } r_1 \text{ i } r_2)$$

1° $(a-1)^2 - 4b > 0$

$$y_1 = x^{r_1} \quad y_2 = x^{r_2}$$

$$y = C_1 x^{r_1} + C_2 x^{r_2}$$

2° $(a-1)^2 - 4b = 0$

$$y_1 = x^r, \quad y_2 = u(x) \cdot y_1 \ \dots$$

3° $(a-1)^2 - 4b < 0$

$$y_{1/2} = x^{\alpha \mp i\beta} = x^{\alpha} e^{\pm \beta \ln x}$$

$$y_{1/2} = x^{\alpha} \cos(\beta \ln x) \pm i x^{\alpha} \sin(\beta \ln x)$$

$$y_1 = x^{\alpha} \cos(\beta \ln x) \qquad y_2 = x^{\alpha} \sin(\beta \ln x)$$

tami ♡
bey

$F(y, y', y'')$