3.1 Сигурни, случајни и немогући догађаји

Теорија вероватноће – основна научна дисциплина која омогућава решавање проблема статистичке анализе: проблема непотпуности података и проблема масовности података; представља „костур“ статистике и настала је применом математике у играма на срећу у XVII веку; математичка дисциплина која се бави израчунавањем законитости случајних појава.

Постоје три врсте догађаја:

1) Немогући догађаји
2) Сигурни догађаји
3) Случајни догађаји – догађаји који се могу, али и не морају остварити; проучавају се путем експеримената.

Појаве детерминистичког карактера – појаве које се могу потпуно описати помоћу сигурних и немогућих догађаја.

Скуп елементарних догађаја – скуп могућих исхода експеримената; било који резултат експеримента се описује једним и само једним елементом скупа могућих исхода.

Скуп елемената елементарних догађаја може бити:

1) Коначан
2) Бесконачан, а пребројив
3) Бесконачно непребројив

Случајни догађај – подскуп скупа елементарних догађаја.

Немогућ догађај – подскуп скупа елементарних догађаја који нема ниједан елемент и означава се са $\emptyset$.

Супротан догађај – догађај $\overline{A}$ који се оствари онда и само онда када се догађај A не оствари.

Сигуран догађај – супротан догађај немогућег догађаја; означава се са Ω.

A имплицира B – ако се сваки пут када се оствари догађај A остварује и догађај B; A ⊆ B

A и B су једнаки – ако истовремено A имплицира B и B имплицира A, тј. ако је A ⊆ B и B ⊆ A

Унија догађаја A и B - догађај који се оствари онда и само онда кад се оствари бар један од догађаја A и B; A ∪ B

Пресек догађаја A и B – случајан догађај који се остварује онда и само онда кад се остваре оба догађаја; A · B или A ∩ B

Искључивање догађаја A и B – ако и само ако је њихов пресек немогућ догађај; A ∩ B = ∅

Закони који важе на операцијама уније и пресека над случајним догађајима:

1) Комутативност - A · B = B · A и A ∪ B = B ∪ A
2) Асоцијативност – (A ∪ B) ∪ C = A ∪ (B ∪ C) и (A · B) · C = A · (B · C)
3) Дистрибутивност - A · (B ∪ C) = (B · A) ∪ (A · C)

Особине наведених дефиниција и операција на случајним догађајима:

1) A и $\overline{\mathrm{A}}$ се међусобно искључују јер A · $\overline{\mathrm{A}}$ = ∅
2) Сваки случајан догађај A имплицира сигуран догађај Ω; A ⊆ Ω
3) Ако A имплицира B, онда A ∪ B = B и A · B = A
4) Унија случајног догађаја A и немогућег догађаја ∅ је A ∪ ∅ = A, док је њихов пресек A · ∅ = ∅
5) Унија и пресек случајног догађаја A са самим собом је сам догађај A, тј. A ∪ A = A и A · A = A
6) Посматрајмо догађај A ∪ B; он се остварује када се оствари барем један од ова два догађаја. Супротан догађај је догађај који се оствари када се не оствари ниједан од њих, тј. када се оствари пресек $\overline{A}$ и $\overline{B}$; $\overline{A \cup B}$ = $\overline{A}$ · $\overline{\mathrm{B}}$

3.2 Вероватноћа

Класична дефиниција вероватноће – вероватноћа a priori; дефинисање преко једнако вероватних догађаја; омогућава одређивање вероватноће случајних догађаја класе експеримената са коначним бројем једнако вероватних могућих резултата.

Вероватноћа случајног догађаја A – однос броја повољних резултата за догађај A и броја могућих резултата експеримената; означава се као P(A) = $\frac{m}{n}$; ово је вероватноћа a priori.

Особине вероватноће a priori:

1) Вероватноћа било ког догађаја је ненегативан број; P(A) $\geq$ 0
2) Вероватноћа сигурног догађаја је једнака јединици. Ако је Ω сигурни догађај, онда је за Ω број повољних резултата m = n, тако да је: P(Ω) = 1
3) Ако се случајни догађаји A и B међусобно искључују, онда је број повољних резултата за њихову унију једнак: $m = m_A + m_B$
4) Вероватноћа немогућег догађаја је једнака нули; P(∅) = 0
5) Вероватноћа супротног догађаја је једнака P($\overline{\mathrm{A}}$) = 1 - P(A)

Проблем Chevalier de Mere; посматрају се два експеримента:

1) Баца се правилма коцка 4 пута и посматра се догађај да бар једанпут падне шестица
2) Бацају се истовремено две коцке 24 пута и посматра се догађај да бар једанпут падне пар шестица.

Проблем је да се одреди који је од ова два догађаја вероватнији.

Геометријска вероватноћа – проширење класичне дефиниције вероватноће да барата са експериментима са бесконачно могућим резултатима; дефиниција геометријске вероватноће се може проширити и на једнодимензионалан, тродимензионалан или вишедимензионалан простор.

Проблем сусрета – два лица су се договорила да се нађу на договореном месту у временском интервалу од једног сата. Први који дође на уговорено место чека 20 минута, после чега одлази. Ако сваки од њих може доћи у било којем тренутко посматраног сата, а њихови доласци су међусобно независни, колика је вероватноћа сусрета?

Бафонов (Buffon) проблем – танка игла дужине 2l се баца на случајан начин на равну површину која је поодељена паралелним линијама удаљеним за 2a једна од друге (l < a). Која је вероватноћа да ће игла пресећи једну од паралелних линија?

Емпиријска вероватноћа

Релативна фреквенција – количник броја реализације догађаја A n(A) и броја понављања експеримента n; $f = \frac{n(A)}{n}$

Емпиријска вероватноћа – вероватноћа a posteriori; статистичка вероватноћа; гранична вредност догађаја A ако број понављања експеримента неограничено расте и ако релативна фреквенција догађаја A тежи неком коначном броју; $P(A) = \lim_{n \to \infty} \frac{n(A)}{n}$

Основни проблем дефинисања емпиријске вероватноће је проблем егзистенције и једнозначности граничне вредности; ако она не постоји и није једнозначна за неке случајне догађаје, онда нема смисла ни вероватноћа дефинисана том граничном вредношћу.

Вероватноћа a posteriori има исте особине као вероватноћа a priori.

Аксиоматска дефиниција вероватноће

Вероватноћа (по аксиоматској дефиницији) – свака функција P дефинисана на случајним догађајима која пресликава случајне догађаје у реалне бројеве и има три особине:

1) Ненегативност – сваком случајном догађају A функција P придружује ненегативан број P(A)
2) Нормираност – сигурном догађају функција P придружује број један
3) Адитивност – Ако се случајни догађаји A_1, A_2… међусобно искључују, онда функција P придружује њиховој унији број који је једнак збиру бројева које функција P придружује догађајима A_1, A_2…

Ове три особине представљају аксиоме који одређују вероватноћу. Све остале особине и примена целе теорије вероватноће је базирана на овим аксиомима.

A priori и a posteriori вероватноћа поседују ове три особине.

3.3 Условне вероватноће и независност

Условна вероватноћа – међусобна веза догађаја A и B; означава се са P(A|B)

Условна вероватноћа догађаја A, под условом да се реализује догађај B, је једнака количнику вероватноће истовременог остварења догађаја A и B и вероватноће догађаја B,

$$P(A|B) = \frac{P(A \cdot B)}{P(B)}$$

Условна вероватноћа задовољава сва три аксиома којима је она дефинисана.

Формула потпуне (тоталне) вероватноће

Нека су $B_1, B_2, \dots, B_n$случајни догађаји који се међусобно искључују и чија унија је сигуран догађај тј.

$$B_i \cdot B_j = \emptyset$$

за свако $i \neq j, j \in \{1,2, \dots, n\}$,

$$\sum_{k=1}^{n} B_k = \Omega$$

Тада је вероватноћа догађаја A једнака:

$$P(A) = \sum_{k=1}^{n} P(B_k) \cdot P(A|B_k)$$

Где су $P(B_k)$ вероватноће догађаја B_k, а $P(A|B_k)$ условне вероватноће догађаја A под условом да се реализовао B_k.

Бајесова формула

За сваки догађај B_kусловна вероватножа његове реализације када се реализовао догађај A је једнака:

$$P(B_k|A) = \frac{P(B_k) \cdot P(A\,|B_k)}{\sum_{i=1}^{n} P(B_i) \cdot P(A|B_i)}$$

Независни догађаји

Нека је A_1случајан догађај везан за први експеримент, а A_2 случајан догађај везан за други експеримент. Тада реализација догађаја A_1не утиче на реализацију догађаја A_2 и кажемо да су догађаји A_1 и A_2 међусобно независни.

Нека су A_1 и A_2 било која два случајна догађаја. Рећи ћемо да су A_1 и A_2 међусобно независни ако и само ако је:

$$P(A_1 \cdot A_2) = P(A_1) \cdot P(A_2)$$

Догађаји A_1 и A_2 су међусобно независни ако и само ако је условна вероватноћа једног од њих, под условом да се реализовао други, једнака вероватноћи тог догађаја.

Нека је A_1, A_2 … низ случајних догађаја. Ако за сваки изабрани низ:

$$A_{i1}, A_{i2}, \dots, A_{in}$$

Вероватноћа пресека једнака производу вероватноће, тј. ако је:

$$P(A_{i1} \cdot A_{i2} \cdot \dots \cdot A_{in}) = P(A_{i1}) \cdot P(A_{i2}) \cdot \dots \cdot P(A_{in})$$

Тада кажемо да је низ A_1, A_2 … низ независних догађаја.